Вихри в невязкой несжимаемой жидкости

Владислав Жвик

Семинар «Когомологические аспекты геометрии дифференциальных уравнений»

Независимый Московский Университет

5 декабря 2018, Москва

Содержание

1. Введение

- Потенциальное течение $\qquad \boldsymbol{\omega} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{V} = \nabla\varphi$

$$\Delta\varphi = 0$$

$$\varphi_t + \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \Phi(t)$$ интеграл Коши-Лагранжа

- Завихренное течение $\qquad \boldsymbol{V} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A} + \nabla\varphi$

$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0$ калибровка

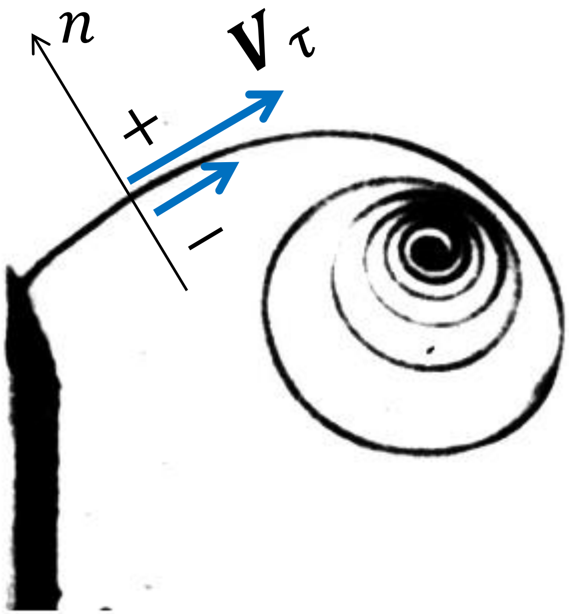
$$\Delta\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\omega} \Rightarrow \boldsymbol{A} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\boldsymbol{\omega}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} d\tau'$$

$d\tau'$ – элементарный объем

$$\begin{cases} \boldsymbol{V} = \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int \frac{\boldsymbol{\omega}' \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} d\tau' + \nabla\varphi \\ \boldsymbol{\omega}_t + (\boldsymbol{V}\nabla)\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}\nabla)\boldsymbol{V} \Leftrightarrow \boxed{\dfrac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = (\boldsymbol{\omega}\nabla)\boldsymbol{V}} \end{cases}$$

уравнение Гельмгольца

Вихревая пелена



$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{r})\delta(n)$$

Тангенциальный разрыв скорости

$$[\boldsymbol{V}_\tau] := \boldsymbol{V}_{\tau+} - \boldsymbol{V}_{\tau-} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{e}_n$$

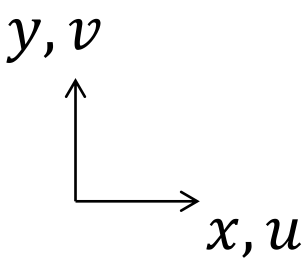
Граничные условия на поверхности вихревой пелены

$$[\boldsymbol{V}_n] = 0 \qquad [p] = 0$$

Точка вихревой пелены с постоянным разрывом потенциала $[\varphi] = \Gamma = \mathrm{const}$ перемещается со скоростью $\boldsymbol{V}_* = (\boldsymbol{V}_+ + \boldsymbol{V}_-)/2$

$$[p] = 0 \;\Rightarrow\; \left[\varphi_t + \frac{V^2}{2}\right] = 0 \;\Rightarrow\; [\varphi]_t + (\boldsymbol{V}_*\nabla)[\varphi] = 0$$

Двумерные течения



$$z = x + iy \qquad \boldsymbol{A} = (0,0,\psi) \qquad \psi\text{ – функция тока}$$

$$V = u + iv \qquad \boldsymbol{\omega} = (0,0,\omega)$$

$$\begin{cases} \Delta\psi = -\omega \quad \Rightarrow \quad \bar{V}(z) = u - iv = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int \dfrac{\omega'}{z - z'} dS' + \bar{V}_{\Pi} \\[2em] \dfrac{d\omega}{dt} = 0 \end{cases}$$

$\bar{V}_{\Pi}$ - потенциальное течение

комплексный потенциал (регулярная функция z) $\quad w(z) = \varphi + i\psi$

Комплексно сопряженная скорость $\quad \dfrac{dw}{dz} = \bar{V}$

скорость, индуцируемая вихревой пеленой $z(\Gamma, t)$

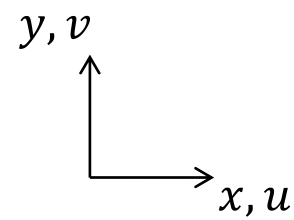
$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{d\Gamma'}{z - z(\Gamma', t)}$$

уравнение эволюции вихревой пелены $z(\Gamma, t)$

$$\frac{\partial \bar{z}\,(\Gamma, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{v.\,p.}\int \frac{d\Gamma'}{z(\Gamma, t) - z(\Gamma', t)}$$

2. Класс двумерных автомодельных отрывных течений

Двумерные уравнения Эйлера



$$u_t + uu_x + vu_y + p_x = 0$$
$$v_t + uv_x + vv_y + p_y = 0$$
$$u_x + v_y = 0$$

Базис алгебры симметрий

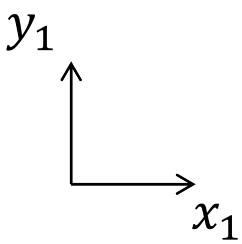
$X_1 = \partial_t$	Однородность времени
$X_2 = y\partial_x - x\partial_y + v\partial_u - u\partial_v$	Изотропия пространства
$X_3 = 2t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y - u\partial_u - v\partial_v - 2p\partial_p$ $X_4 = t\partial_t + x\partial_x + y\partial_y$	Масштабные преобразования
$X_{f_1} = f_1(t)\partial_x + \dot{f}_1(t)\partial_u - x\ddot{f}_1(t)\partial_p$ $X_{f_2} = f_2(t)\partial_y + \dot{f}_2(t)\partial_v - y\ddot{f}_2(t)\partial_p$	Обобщенный принцип относительности Галилея
$X_\varphi = \varphi(t)\partial_p$	Потенциальное силовое поле

Определение показателя автомодельности n

$$X = (1-n)X_3 + (2n-1)X_4 =$$
$$t\partial_t + nx\partial_x + ny\partial_y + (n-1)u\partial_u + (n-1)v\partial_v + 2(n-1)p\partial_p$$

Инварианты

$$I_1 = \frac{x}{t^n} \qquad I_2 = \frac{y}{t^n} \qquad I_3 = \frac{u}{t^{n-1}} \qquad I_4 = \frac{v}{t^{n-1}} \qquad I_5 = \frac{p}{t^{2(n-1)}}$$

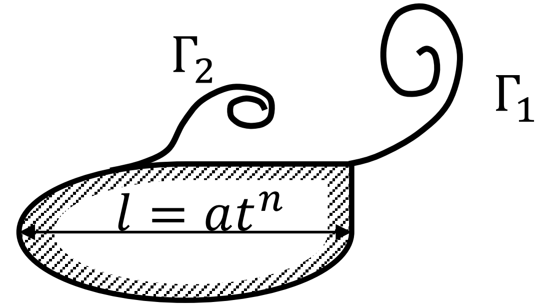


$$\boldsymbol{r}_1 = (x_1, y_1)$$

$$\boldsymbol{r} = (x, y)$$

$$\frac{1}{2} \le n \le 1$$

$$V_{1\infty} = bt^{n-1}$$



$$\boldsymbol{r}_1 = at^n\boldsymbol{r}$$

$$\boldsymbol{V}_1 = at^{n-1}\mathbf{V}(\boldsymbol{r})$$

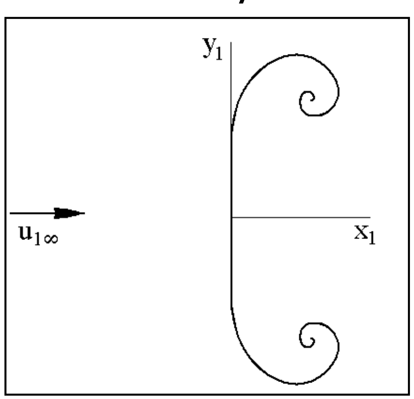
$$\Gamma = \oint \boldsymbol{V}_1 d\boldsymbol{r}_1 = a^2 t^{2n-1} G$$

$n = 1/2$ течение Никольского

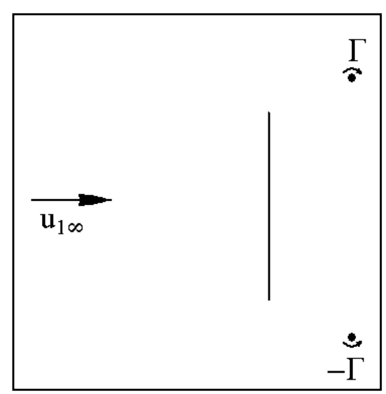
$\Gamma = a^2 G = \mathrm{const}$ циркуляция не зависит от времени $\Longrightarrow$ вихревые пелены вырождаются в дискретные вихри

Обтекание расширяющейся пластины

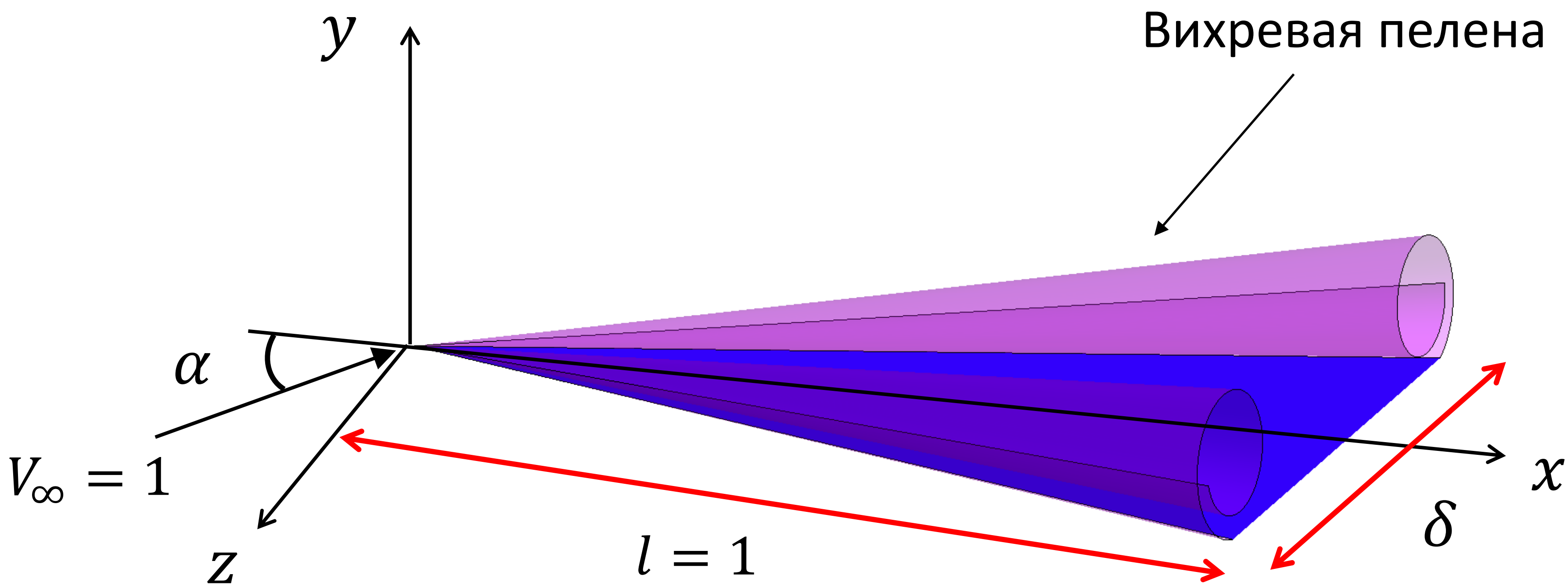
$n > 1/2$



$n = 1/2$



2. Нестационарная аналогия



$\nabla_3 = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$

$\Delta_3 = (\nabla_3, \nabla_3)$

стационарное течение

узкое тело $\delta \ll 1$

малый угол атаки $\alpha = O(\delta)$

$F(x, y, z) = 0$ поверхность тела и вихревых пелен

$$\Delta_3 \varphi = 0$$

непротекание

$$(\nabla_3 \varphi, \nabla_3 F) = 0$$

непрерывность давления на вихревой пелене

$$\left[\frac{(\nabla_3 \varphi)^2}{2}\right] = 0$$

Рассмотрим две асимптотические области:

Ω_2: $x \sim y \sim z \sim O(1)$

Решение в области Ω_2 имеет вид:

$$\varphi = x\cos\alpha + y\sin\alpha \approx x + \alpha y - \frac{\alpha^2}{2}x \qquad \text{однородный поток}$$

Ω_1: $x \sim O(1), \qquad y \sim z \sim O(\delta)$

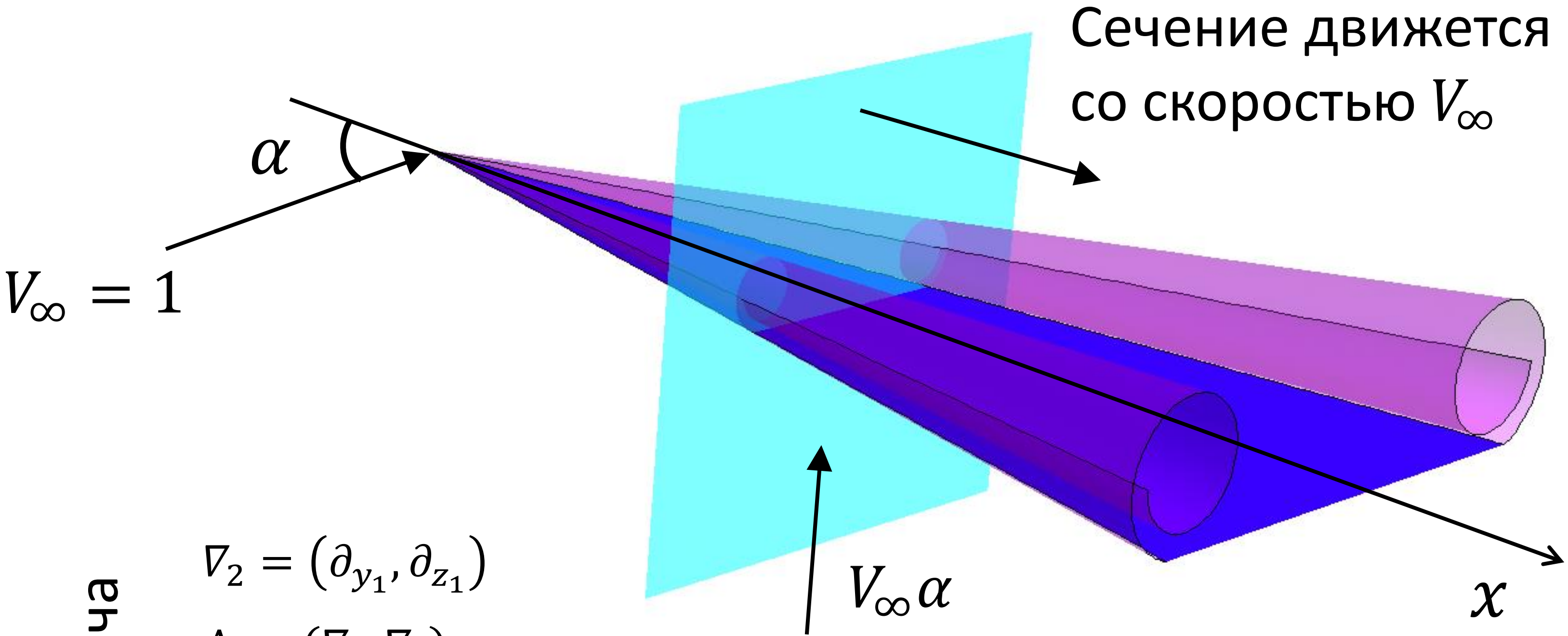
$$\boldsymbol{V} = (u, v, w) \qquad u \sim O(1), \qquad v \sim w \sim O(\delta)$$

Введем новые переменные в области Ω_1: $y_1 = y/\delta \qquad z_1 = z/\delta$

$$v = \delta \cdot v_1 + o(\delta) \qquad w = \delta \cdot w_1 + o(\delta) \qquad v_1 \sim w_1 \sim O(1)$$

Решение в области Ω_1 имеет вид:

$$\varphi(x, y_1, z_1) = x + \delta^2 \varphi_1(x, y_1, z_1) + \mu(\delta)\varphi_2(x) + o(\delta^2)$$



$\nabla_2 = \left(\partial_{y_1}, \partial_{z_1}\right)$

$\Delta_2 = (\nabla_2, \nabla_2)$

Двумерная
нестационарная задача

$$\begin{cases} \Delta_2 \varphi_1 = 0 \\ F_x + (\nabla_2 \varphi_1, \nabla_2 F) = 0 \\ \left[\varphi_{1x} + \dfrac{(\nabla_2 \varphi_1)^2}{2}\right] = 0 \end{cases}$$

непротекание

x =время

непрерывность давления
на вихревых пеленах

3. Несимметричные вихревые структуры на параболическом крыле

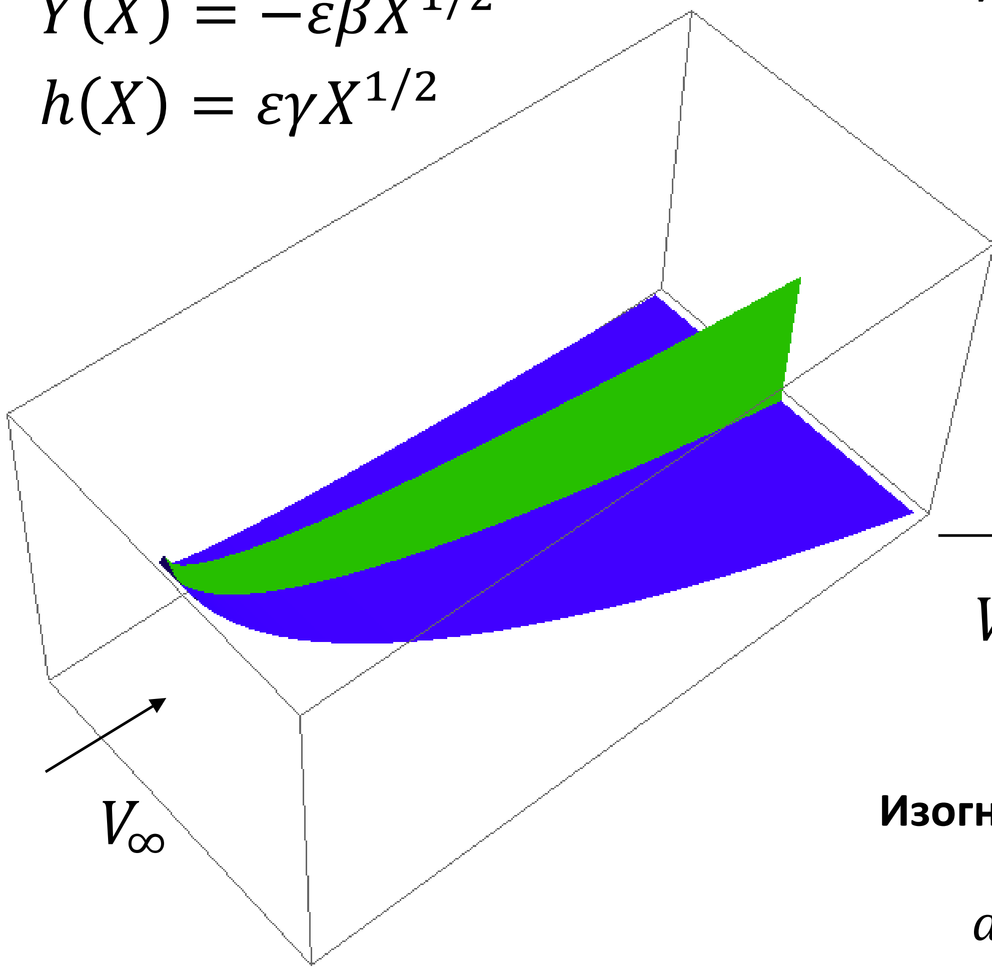
Параболическое крыло с перегородкой

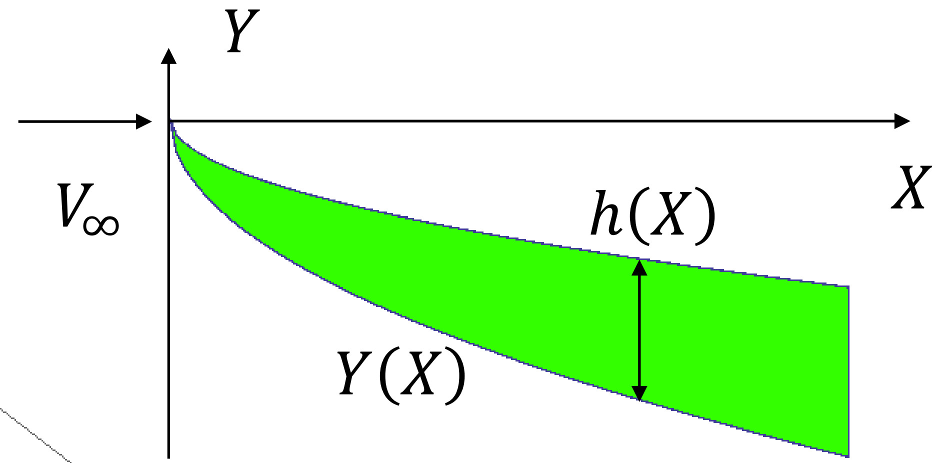
Удлиненное тело $X_{max} \gg \varepsilon^2$

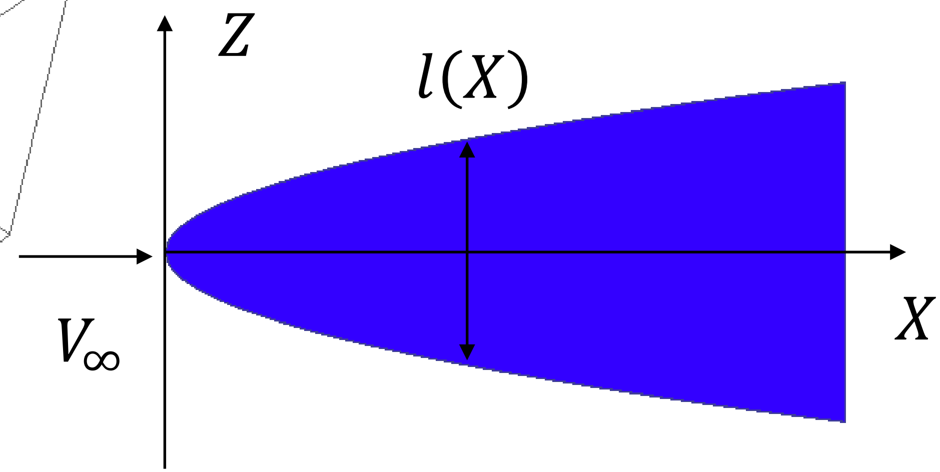
$$l(X) = 2\varepsilon\alpha X^{1/2}$$

$$Y(X) = -\varepsilon\beta X^{1/2}$$

$$h(X) = \varepsilon\gamma X^{1/2}$$







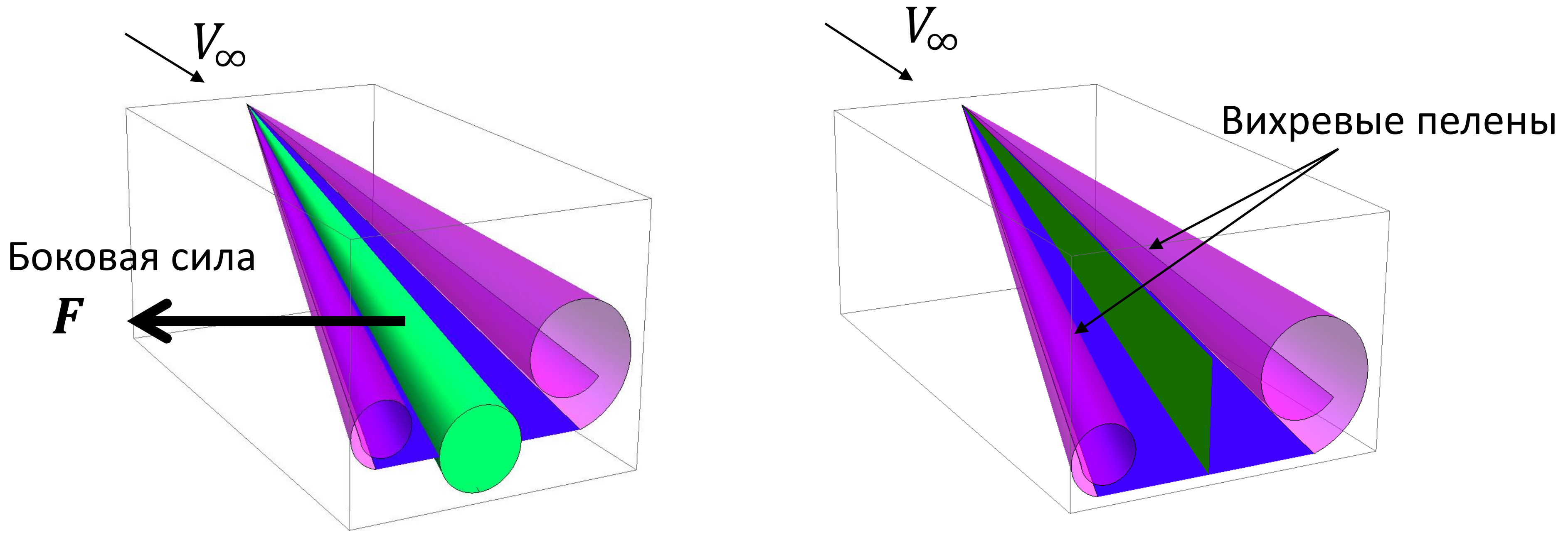
Изогнутость крыла

$$a_0 = \frac{\beta}{\alpha}$$

Высота перегородки

$$b = \frac{\gamma}{\alpha}$$

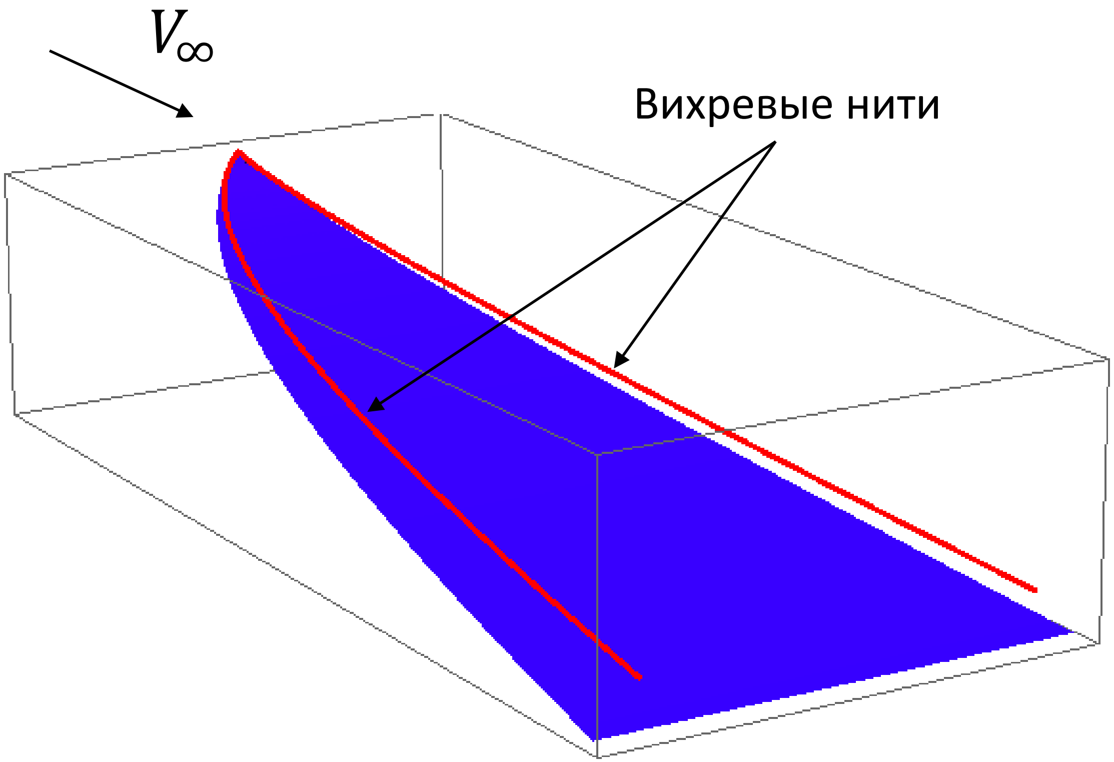
Несимметричные решения



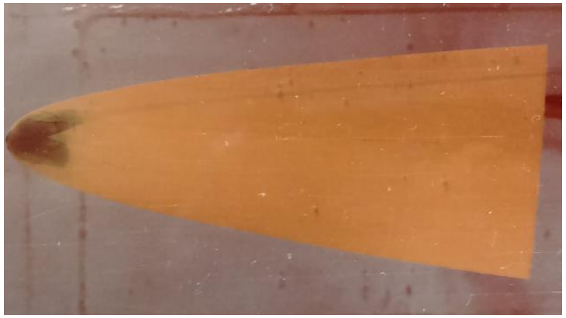
➢ При достаточно больших углах атаки симметричное решение неустойчиво, и реализуется устойчивое несимметричное решение

Симметричное решение

Решение Никольского, Бетяева, Малышева



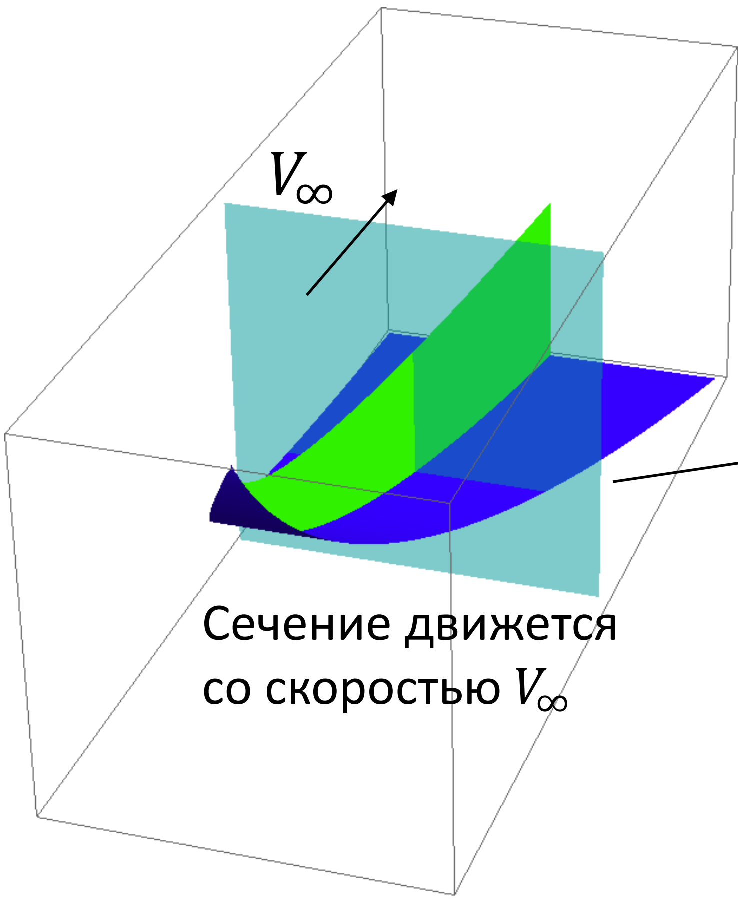
Эксперимент с лыжей Никольского в гидротрубе



- **Никольский А.А., Бетяев С.К., Малышев И.П.** О предельной форме отрывного автомодельного течения идеальной жидкости // В сб.: Проблемы прикладной математики и механики. – М.: Наука, 1971.
- **Бакулин В.Л., Гайфуллин А.М.** Экспериментальное исследование течения в ядре вихревой структуры // Ученые записки ЦАГИ. 1987. Т. 18, № 4. С. 117-119.

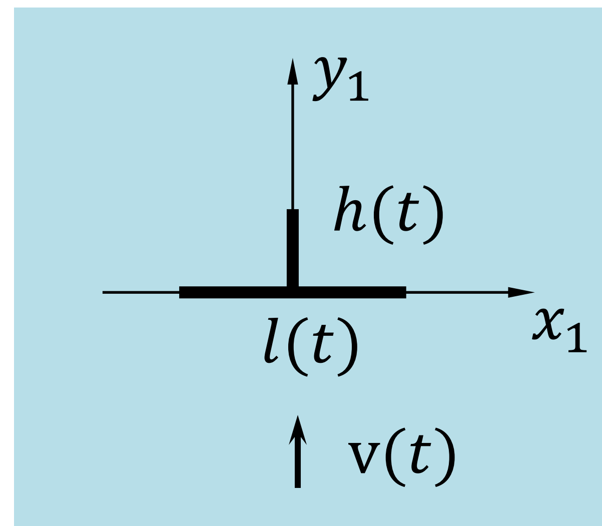
1. Применение нестационарной аналогии (нестационарная аналогия справедлива при $x \gg \varepsilon^2$, когда тело можно считать удлиненным)

Трехмерная задача



Плоская задача
(Расширяющаяся пластинка
с перегородкой)

$$t = x/V_\infty$$



$$l(t) = 2at^{1/2} \qquad a = \varepsilon\alpha V_\infty{}^{1/2}$$

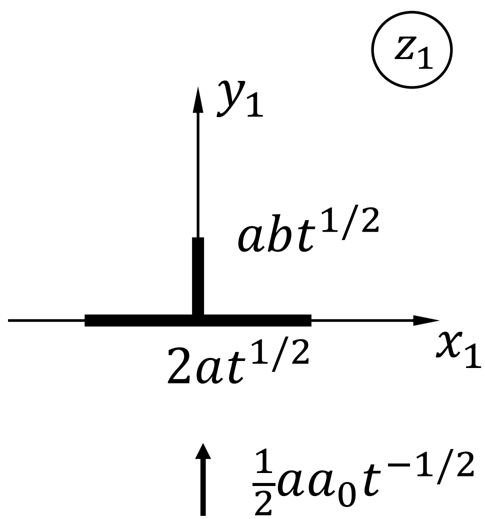
$$h(t) = abt^{1/2}$$

$$\mathrm{v}(t) = \tfrac{1}{2}aa_0t^{-1/2}$$

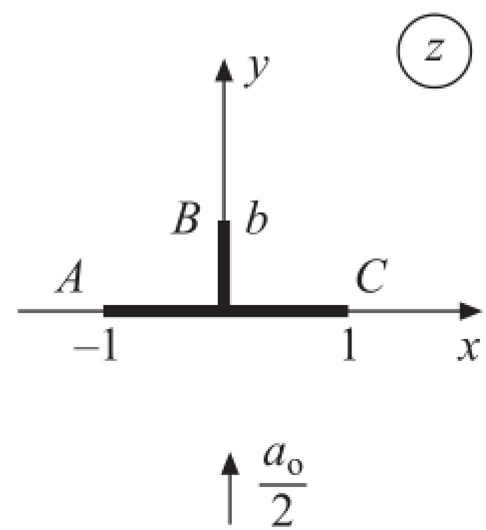
2. Переход к автомодельным переменным

- комплексная координата $z_1 = x_1 + iy_1 = at^{1/2}z \qquad z = x + iy$
- вектор скорости $\boldsymbol{V}_1 = at^{-1/2}\mathbf{V}(z)$
- циркуляция $\Gamma = \oint \boldsymbol{V}_1 d\boldsymbol{r}_1 = a^2 G$
- комплексный потенциал $w_1 = a^2 w$

Физическая плоскость



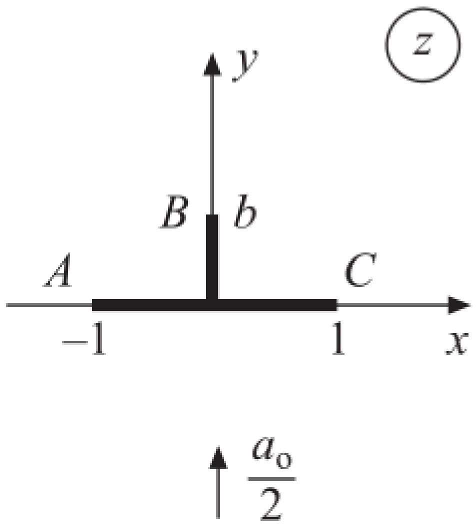
Автомодельная плоскость



3. Конформное отображение пластинки с перегородкой в цилиндр

Автомодельная плоскость

$$z = x + iy$$



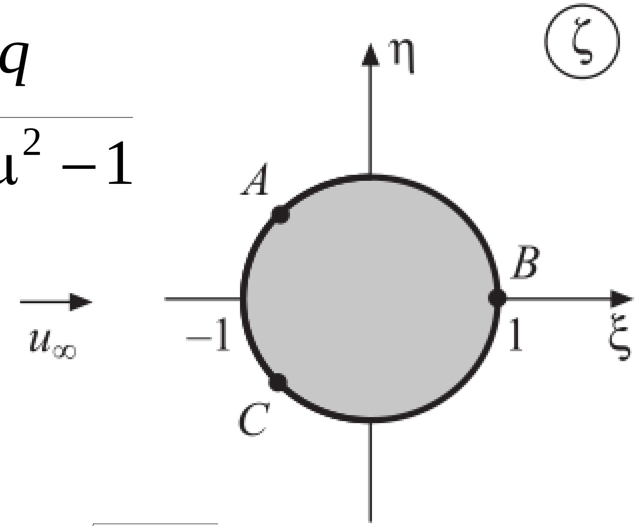
$$\sigma(z) = \sqrt{z^2 - 1}$$

$$\mu(\sigma) = p\sigma + q$$

$$\zeta(\mu) = \mu + \sqrt{\mu^2 - 1}$$

Конформная плоскость

$$\zeta = \xi + i\eta$$



$$p = \frac{-2i}{1 + \sqrt{1 + b^2}} \qquad q = \frac{1 - \sqrt{1 + b^2}}{1 + \sqrt{1 + b^2}}$$

Регулярные ветви корней выбраны условиями $\sigma(+\infty) = +\infty, \ \zeta(+\infty) = +\infty$

$$u_\infty = \frac{1 + \sqrt{1 + b^2}}{8} a_0$$

$$z_{A,C} = \mp 1 \ \longmapsto \ \zeta_{A,C} = q \pm i\sqrt{1 - q^2}$$

$$z_B = ib \ \longmapsto \ \zeta_B = 1$$

4. Вывод системы из 9 алгебраических уравнений

- Комплексный потенциал течения в конформной плоскости есть сумма потенциалов однородного потока, диполя в центре цилиндра, трех реальных вихрей в точках ζ_j и трех сопряженных вихрей в инверсных точках внутри цилиндра

$$\frac{dw}{d\zeta} = u_\infty\left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) + \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{G_j}{\zeta - \zeta_j} + \frac{-G_j}{\zeta - 1/\overline{\zeta}_j}\right)$$ комплексно сопряженная скорость

- Комплексно сопряженная скорость вихрей в физической плоскости (вихрь не может перемещать себя сам)

номер вихря

$$\frac{d\overline{z_{1j}}}{dt} = \lim_{z_1 \to z_{1j}}\left(\frac{dw_1}{dz_1} - \frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma_j}{z_1 - z_{1j}}\right) \qquad j = 1,2,3 \qquad (1)$$

- Уравнения (1) в автомодельных переменных (три комплексных уравнения) с учетом того, что в автомодельной плоскости вихри неподвижны

$$\frac{\overline{z}_j}{2} = \lim_{z \to z_j}\left(\frac{dw}{dz} - \frac{1}{2\pi i}\frac{G_j}{z - z_j}\right) \qquad j = 1,2,3 \qquad (2)$$

- Условия Чаплыгина-Жуковского о конечности скорости на кромках A,B,C (три вещественных уравнения)

$$\left.\frac{dw_1}{dz_1}\right|_{A,B,C} < \infty \implies \left.\frac{dw}{d\zeta}\right|_{A,B,C} = 0 \qquad (3)$$

- Система уравнений (2), (3) сводится к девяти вещественным уравнениям относительно координат вихрей в конформной плоскости ζ_j и их циркуляций G_j

5. Система из 9 алгебраических уравнений

Условия неподвижности вихрей в автомодельной плоскости

$$\frac{\overline{z_j}}{2}\frac{1-1/\zeta_j^{\,2}}{2p}\frac{\sigma_j}{z_j}=u_\infty\left(1-\frac{1}{\zeta_j^{\,2}}\right)+\frac{1}{2\pi i}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{3}\left(\frac{G_k}{\zeta_j-\zeta_k}-\frac{G_k}{\zeta_j-1/\overline{\zeta}_k}\right)-\frac{1}{2\pi i}\frac{G_j}{\zeta_j-1/\overline{\zeta}_j}+\frac{G_j}{2\pi i}A_j$$

$$A_j=\lim_{\zeta\to\zeta_j}\left(\frac{1}{\zeta-\zeta_j}-\frac{1}{z-z_j}\frac{dz}{d\zeta}\right)=-\frac{1-1/\zeta_j^{\,2}}{4p\sigma_j z_j^{\,2}}-\frac{1}{\zeta_j(\zeta_j^{\,2}-1)}$$

$j\ =\ 1,2,3$ – номер вихря

Конечная скорость на кромках

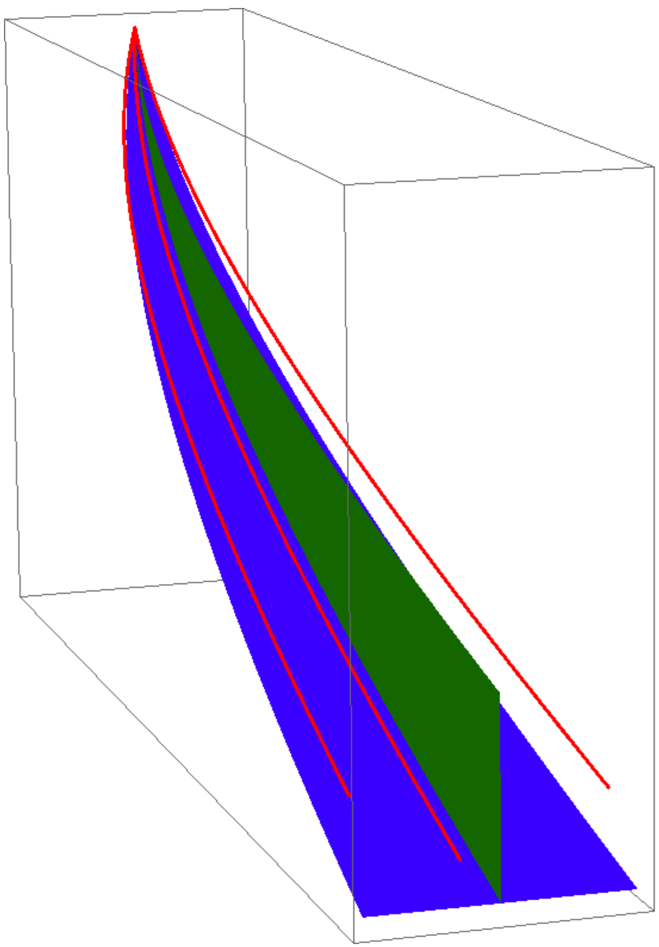
$$4\pi u_\infty\,\mathrm{Im}\,\zeta_m+\sum_{j=1}^{3}G_j\frac{\left|\zeta_j\right|^2-1}{\left|\zeta_j-\zeta_m\right|^2}=0$$

$m\ =\ A,B,C$ – номер кромки

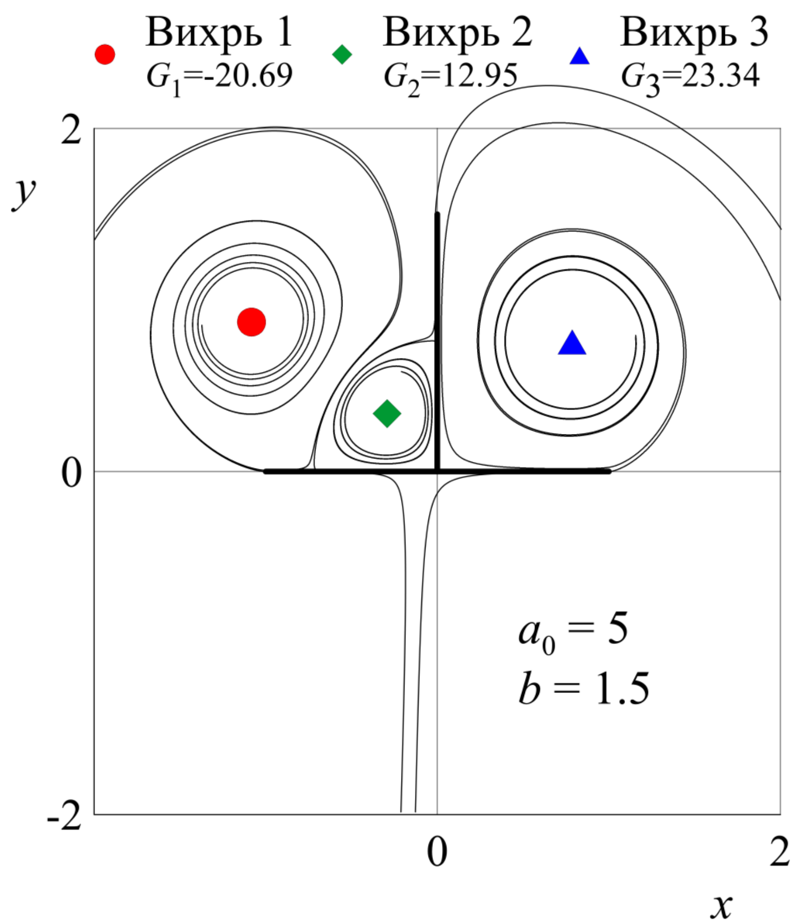
6. Координаты (ζ_j) и циркуляции (G_j) вихрей определяются путем численного решения полученной системы уравнений методом Ньютона

Пример несимметричного решения

- Положение вихревых нитей



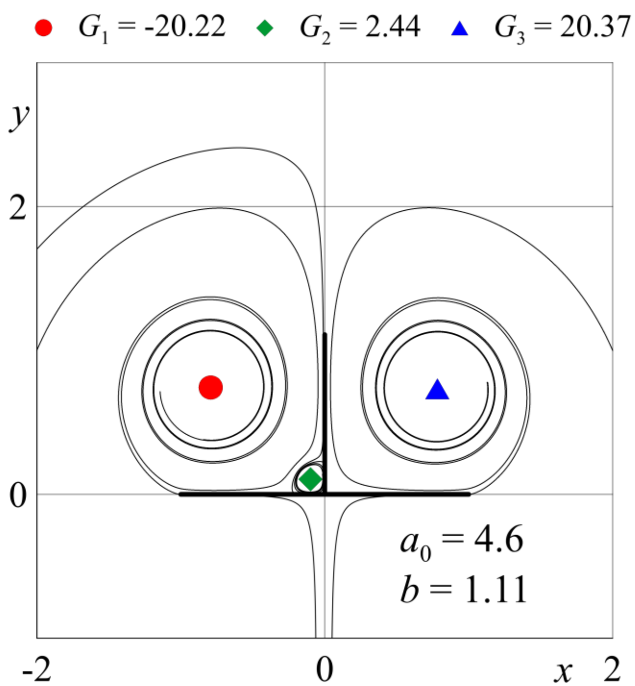
- Автомодельные траектории – траектории фиксированных жидких частиц в автомодельной плоскости



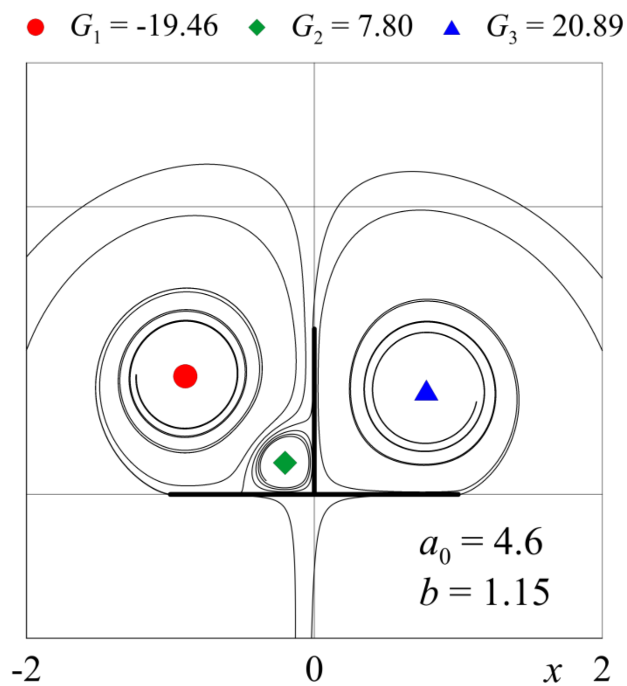
- При значениях изогнутости $a_0 < 2.8128$, по-видимому, не существует несимметричных решений
- При $2.8128 \leq a_0 \leq 4.6$ при уменьшении высоты перегородки b несимметричное решение непрерывно переходит в симметричное при некотором критическом значении b
- При $a_0 > 2.8128$ несимметричное решение стремится к несимметричному пределу при увеличении высоты перегородки

$$a_0 = 4.6$$

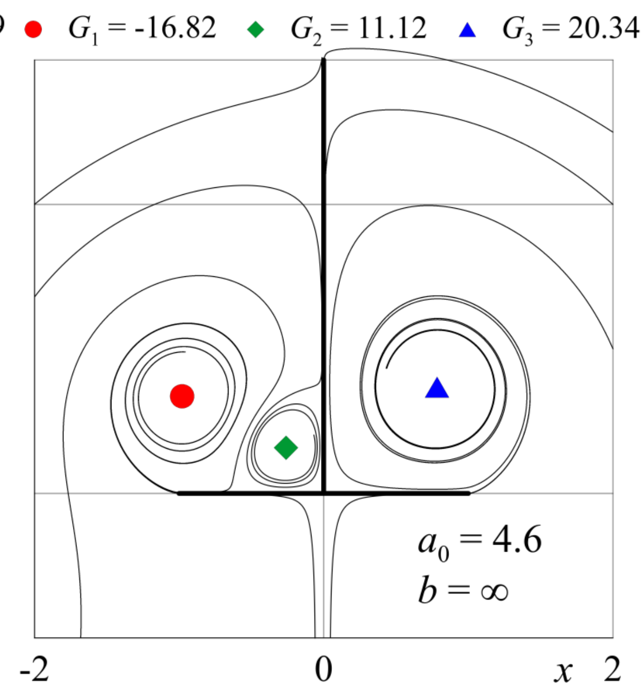
Слабонесимметричное решение



Промежуточное решение



Предельное несимметричное решение (при бесконечно большой перегородке)



➢ При $a_0 \geq 4.7$ отсутствует непрерывный переход к симметричному решению при уменьшении высоты перегородки