

Теорема. Решение $V(t, x) = \varphi^T(t)x(t)$ уравнения (4) есть непрерывная функция $\varphi^T(t)x(t)$, удовлетворяющая уравнению (11), при этом оптимальное значение функционала качества есть

$$J^0(x(\cdot), \varphi(\cdot)) = \varphi^T(t_0)x(t_0).$$

Для отыскания условия “движения” функции $s(t) = \varphi^T(t)x(t)$ к решению (8), введем функцию Ляпунова

$$V_L(\varphi, x) = \frac{1}{2} [V(t, x) - \varphi^T(t)x(t)]^2. \quad (12)$$

Полная производная функции Ляпунова (12) для выполнения этой задачи должна быть меньше нуля при $x(t) \neq 0$, $\varphi(t) \neq 0$, откуда имеем

$$s(t) = \{\varphi^T(t)x(t)\} \leq V(t, x) \frac{x^T(t)C^TQCx(t)}{\varphi^T(t)\Pi(x)\varphi(t)}. \quad (13)$$

Выполнение условия (13) обеспечивает “движение” функции $s(t)$ из любой периферии множеств, образуемых верхними и нижними решениями (7) при $\varphi^T x(t) \neq V(t, x)$, к значению $s(t) = \varphi^T(t)x(t) - V(t, x)$.

Список литературы

1. *Bellman R.* Dynamic programming. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1957.
2. *Isaacs R.* Differential games. New York: J. Wiley and Sons, 1965.
3. *Crandall M.G., Ishii H., Lions P.L.* User's quite to viscosity solutions of second order partial differential equation // Bull. Amer. Math. Soc. 1992. V. 27. P. 1–67.
4. *Субботин А.И.* Обобщенные решения уравнений в частных производных первого порядка. Перспективы динамической оптимизации. М.; Ижевск.: Ин-т компьютер. исслед., 2003.

HOMOTOPICALLY VISIBLE AND INVISIBLE SINGULAR TRAJECTORIES

A. A. Agrachev

SISSA, Trieste, Italy

Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

`agrachev@sissa.it`

In this talk I will try to link optimal control theory with homotopic topology. These are rather distant domains to which Lev Semenovich Pontryagin made fundamental contributions.

Let M be a Riemannian manifold equipped with a bracket generating vector distribution $\Delta \subset TM$ and let $\Omega_\Delta \subset H^1([0, 1]; M)$ be the space of integral curves of the distribution. The *boundary map*

$$\partial_\Delta: \Omega_\Delta \rightarrow M \times M, \quad \partial_\Delta(\gamma) = (\gamma(0), \gamma(1)),$$

is smooth. *Singular trajectories* are just critical points of this map.

We study the influence of singular trajectories on the homotopy type of Lebesgue sets of the action functional on the generalized loop spaces $\partial_{\Delta}^{-1}(q_0, q_1)$ in order to develop a Morse theory for these spaces. The role of singular trajectories is very different for rank 2 distributions and for distributions of rank greater than 2. In particular, these trajectories do not influence the homotopy type of the Lebesgue sets in the case of a generic distribution of rank greater than 2 and may produce homotopic obstructions in the rank 2 case.

Let the distribution Δ has rank 2; different segments $\gamma|_{[0,t]}$ of the same singular trajectory γ also play different roles. Given $t > 0$, we define and compute two integral-valued and monotonically increasing (with t) indices $I_0^t(\gamma)$ and $I^t(\gamma)$ associated to $\gamma|_{[0,t]}$, where $0 \leq I_0^t(\gamma) \leq I^t(\gamma) \leq I_0^t(\gamma) + 1$. If $I_0^t(\gamma) < I^t(\gamma)$, then $\gamma|_{[0,t]}$ is homotopically indistinguishable in the Lebesgue sets; if $I_0^t(\gamma) = I^t(\gamma) = I$, then $\gamma|_{[0,t]}$ provides a homotopical obstruction of dimension I . Both indices are equal to 0 for small t . I am going to explain the construction of these indices and to illustrate general results by examples of left-invariant distributions on the groups $U(2)$ and $GL(2)$.

This is a joint work with Francesco Boarotto and Antonio Lerario.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИГРЫ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ,
ОПИСЫВАЕМЫЕ УРАВНЕНИЯМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА
(PURSUIT DIFFERENTIAL GAMES DESCRIBED BY EQUATIONS
OF FRACTIONAL ORDER)

Х. Н. Алимов (Kh. N. Alimov)

Джизакский педагогический институт, Джизак, Узбекистан

xakim-alimov@mail.ru

Пусть движение объекта в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ описывается дифференциальным уравнением дробного порядка вида

$${}_0^C D_t^\alpha z = Az + Bu - Gv + f(t), \quad (1)$$

где $z \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, ${}_0^C D_t^\alpha$ — оператор дробного дифференцирования, $0 < \alpha < 1$, $t \in [0, T]$, A , B и G — постоянные матрицы размеров $n \times n$, $p \times n$ и $q \times n$ соответственно, u , v — управляющие параметры, u — управляющий параметр преследующего игрока, $u \in P \subset \mathbb{R}^p$, v — управляющий параметр убегающего игрока, $v \in Q \subset \mathbb{R}^q$, P и Q — компакты, $f(t)$ — известная измеримая вектор-функция. Дробную производную будем понимать как левостороннюю дробную производную Капуто [1–4]. Напомним, что дробная производная Капуто произвольного нецелого порядка $\alpha > 0$ от функции $z(t) \in AC^{[\alpha]+1}(a, b)$, $a, b \in \mathbb{R}^1$, определяется выражением

$${}_{a+}^C D_t^\alpha z(t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \{\alpha\})} \int_a^t \frac{d^{[\alpha]+1} z(\xi)}{d\xi^{[\alpha]+1}} \frac{d\xi}{(t - \xi)^{\{\alpha\}}}. \quad (2)$$

Кроме того, в пространстве $\mathbb{R}^n$ выделено терминальное множество M . Цель преследующего игрока — вывести z на множество M , убегающий игрок стремится этому помешать.