5. *Иванов Г.Е.* Множества, слабо выпуклые по Виалю и по Ефимову–Стечкину // Изв. РАН. Сер. мат. 2005. Т. 69, №6. С. 35–60.
6. *Иванов Г.Е.* Слабо выпуклые множества и их свойства // Мат. заметки. 2006. Т. 79, №1. С. 60–86.

Optimal control on Lie groups and integrable Hamiltonian systems

V. Jurdjevic

University of Toronto, Canada

This lecture will be about two natural left invariant variational problems on semi-simple Lie groups G that admit an involutive automorphism σ. In such situations, the set of fixed points of σ is a closed subgroup K of G, and the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of G admits a Cartan decomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{k}$ with $\mathfrak{k}$ equal to the Lie algebra of K, and $\mathfrak{p}$ a vector space subject to Lie algebraic conditions

$$[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{k}, \qquad [\mathfrak{p}, \mathfrak{k}] = \mathfrak{p}. \tag{1}$$

The above decomposition defines two natural distributions on G: the first distribution $\mathcal{H}$ is defined as

$$\mathcal{H}(g) = \{gX \colon X \in \mathfrak{p}\}, \qquad g \in G, \tag{2}$$

while the second distribution $\mathcal{A}$ is affine, and is defined by an element $A \in \mathfrak{p}$ with

$$\mathcal{A}(g) = \{g(A + X) \colon X \in \mathfrak{k}\}, \qquad g \in G. \tag{3}$$

In this notation, gX stands for the left translate by g of an element $X \in \mathfrak{g}$.

In the first case, any two points in G can be connected by a horizontal curve in $\mathcal{H}$ whenever $\mathfrak{p} + [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] = \mathfrak{g}$, while the same is true in the second case whenever A is regular. In this parlance, curve $g(t)$ in G is an integral curve of a distribution $\mathcal{D}$, or a horizontal curve, if $dg/dt \in \mathcal{D}(g)$.

Then a suitable scalar multiple of the Killing form can be used to define the length on the space of horizontal curves, which, in turn, induces a natural sub-Riemannian metric on G that is central to the geometry of the underlying symmetric space G/K. In the second case, a negative multiple $\langle \cdot, \cdot \rangle$ of the Killing form $\mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, A \circ \mathrm{Ad}\, B)$ defines a natural energy function $(1/2) \int_0^T \langle U(t), U(t) \rangle \, dt$ associated with every horizontal curve $g(t)$ that is a solution of $dg/dt = g(t)(A + U(t))$, which then induces an optimal control problem of finding a horizontal curve that connects two given points in G along which the energy transfer is minimal.

The solutions of this optimal control problem will be the main focus of the lecture. In particular, I will show that the Hamiltonian for this problem, obtained by the Maximum Principle of optimal control, leads to the class of Hamiltonians on $\mathfrak{g}$ that admit spectral parameter representations with important contributions to the theory of integrable Hamiltonian systems. Particular cases provide natural explanations for the classical results of Fock and Moser linking Kepler's problem to the geodesics on spaces of constant curvature, and J. Moser's work on integrability based on isospectral methods, in which C. Newmann's mechanical problem on the sphere and C. L. Jacobi's geodesic problem on an ellipsoid play the central role. The talk will also address the relevance of this class of Hamiltonians to the elastic curves on spaces of constant curvature.

Динамика сингулярно возмущенных моделей на основе логистического уравнения с запаздыванием (The dynamics of singular perturbed models based on logistic equation with delay)

С. А. Кащенко (S. A. Kaschenko)

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова, Ярославль, Россия

kasch@uniyar.ac.ru

Исследуется широкий класс моделей, возникающих в математической экологии. В основе их лежит логистическое уравнение с запаздыванием. Основное предположение состоит в том, что рассматриваемые системы содержат большие или малые параметры, задающие сингулярные возмущения. Известные асимптотические методы оказываются неприменимыми. Для изучения динамических свойств решений разработан специальный метод большого параметра. Суть его состоит в следующем.

В фазовом пространстве исходной системы выделяется некоторое множество $S(x)$, зависящее от векторного параметра x. Затем исследуется асимптотика всех решений с начальными условиями из $S(x)$. Удается показать, что через некоторый промежуток времени все эти решения попадают в множество $S(\overline{x})$, причем для $\overline{x}$ выполняются асимптотические равенства вида $\overline{x} = F(x) + o(1)$. В итоге приходим к выводу, что динамика решений из $S(x)$ определяется динамическими свойствами конечномерного отображения $F(x)$. Тем самым по грубым устойчивым периодическим траекториям этого отображения строится асимптотика соответствующего цикла той же устойчивости.

Обратим внимание, что для некоторых из рассматриваемых систем в их фазовом пространстве имеется несколько множеств типа $S(x)$. И для каждого из этих множеств получены результаты о существовании аттракторов и об асимптотике решений из них.

Для ответа на вопрос об устойчивости периодических решений из $S(x)$ исследуется асимптотика мультипликаторов матрицы монодромии линеаризованного (на периодическом решении) уравнения.

Наиболее тонкий момент в методе большого параметра связан с определением множеств $S(x)$. Здесь необходимо использовать некоторую дополнительную информацию о структуре решений. В каждом из рассмотренных уравнений выбор таких множеств оказался довольно естественным.

Отметим, что указанным методом удалось исследовать ряд важных с прикладной точки зрения задач.