Многогранники Погорелова и трехмерные гиперболические многообразия

А.Ю. Веснин

Расширенное заседание семинара "Геометрия, топология и математическая физика", посвященное 75-летнему юбилею Николая Петровича Долбилина, 19 декабря 2018 г.

Цель доклада: представить взгляд на гиперболические 3-многообразия с точки зрения раскрасок многогранников.

История построения примеров 3-многообразий

Пусть $\mathbb{H}^3$ – трехмерное гиперболическое пространство (пространство Лобачевского $\mathbb{L}^3$).

Пусть Г – дискретная подгруппа группы $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^3)$, действующая без неподвижных точек.

Факторпространство $\mathbb{H}^3/\Gamma$ – гиперболическое 3-многообразие.

Ф. Клейн, 1928, "Неевклидова геометрия": Примеры компактных гиперболических 3-многообразий (пространственных форм Клиффорда – Клейна) пока не известны.

Примеры гиперболических 3-многообразий конечного объема:

- **Gieseking, 1914:** некомпактное, неориентируемое.
- **Löbell, 1931:** компактное, ориентируемое.
- **Weber, Seifert, 1933:** компактное, ориентируемое "додекаэдральное гиперболическое пространство".

План

Мы опишем построение гиперболических 3-многообразий из **прямоугольных многогранников**.

- Пусть $R \in \mathbb{H}^3$ – ограниченный прямоугольный многогранник.
    - Какие комбинаторные многогранники можно реализовать как прямоугольные в $\mathbb{H}^3$?
    - Как описать множество всех гиперболических прямоугольных многогранников?
- Пусть G – группа, порожденная отражениями в гранях R (прямоугольная группа Коксетера), а $\Gamma < G$ – подгруппа без кручений. Тогда $\mathbb{H}^3/\Gamma$ – гиперболическое 3-многообразие.
    - Как найти подгруппу без кручений? Например, раскрасив грани многогранника в 4 цвета!
    - Когда разные раскраски приводят к разным многообразиям? Ответ с помощью торической топологии!
- Топологические свойства многообразия $\mathbb{H}^3/\Gamma$.
    - Что можно сказать, если в реберном графе многогранника есть гамильтонов цикл?

Прямоугольные “строительные блоки”

Единственность остроугольных многогранников в $\mathbb{H}^n$

Пусть $\mathbb{H}^n$ – n-мерное гиперболическое пространство.

Андреев, 1970: Ограниченный остроугольный (все двугранные углы не более $\pi/2$) многогранник в $\mathbb{H}^n$ однозначно определяется комбинаторным типом и двугранными углами.

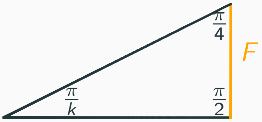
Мы будем обсуждать два класса остроугольных многогранников:

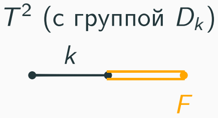
- Коксетеровские многогранники, с двугранными углами вида π/k, где $k \geq 2$.
- Прямоугольные многогранники, с двугранными углами $\pi/2$.

Существование в $\mathbb{H}^2$

Если P – прямоугольный k-угольник в $\mathbb{H}^2$, то $k \geq 5$.

Конструкция из кокссетеровских симплексов.
Пусть $T^2 \in \mathbb{H}^2$ – треугольник с углами $\frac{\pi}{k}$, $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{4}$, где $\frac{\pi}{k} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi$. Пусть F – ребро, противолежащее углу $\frac{\pi}{k}$. Диаграмма Коксетера для группы, порожденной отражениями в сторонах T^2:





"Черная" поддиаграмма соответствует диэдральной группе D_k порядка $2k$. Объединение

$$P^2 = \bigcup_{g \in D_k} g(T^2)$$

является прямоугольным k-угольником в $\mathbb{H}^2$ со сторонами $\partial P^n = \cup_{g \in D_k} g(F)$.

Существование в $\mathbb{H}^3$ и $\mathbb{H}^4$

Lanner [1950]: Число ограниченных коксетеровских симплексов в $\mathbb{H}^3$ равно 9, а в $\mathbb{H}^4$ равно 5.

Среди них есть указанные ниже симплексы $T^3 \subset \mathbb{H}^3$ и $T^4 \subset \mathbb{H}^4$:

T^3 (с группой H_3)

T^4 (с группой H_4)

"Черные" поддиаграммы соответствуют конечным группам Коксетера H_3 и H_4 порядков 120 и 14400, соответственно. Объединение

$$P^n = \bigcup_{g \in H_n} g(T^n)$$

является прямоугольным многогранником в $\mathbb{H}^n$ с гранями $\partial P^n = \cup_{g \in H_n} g(F)$.

P^3 является додекаэдром, а P^4 – 120-клеточником.

Отсутствие в $\mathbb{H}^n$, $n > 4$

Пусть a_k – число k-мерных граней в n-мерном многограннике P, а

$$a_k^\ell = \frac{1}{a_k} \sum_{\dim F = k} a_\ell(F)$$

– среднее число ℓ-граней в k-мерных подмногогранниках.

Никулин, 1981: Для $n \geq 4$ и $\ell < k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ имеем

$$a_k^\ell < \binom{n-\ell}{n-k} \frac{\binom{\left[\frac{n}{2}\right]}{\ell} + \binom{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{\ell}}{\binom{\left[\frac{n}{2}\right]}{k} + \binom{\left[\frac{n+1}{2}\right]}{k}}.$$

Используем этот результат для a_2^1, где $\ell = 1$, $k = 2$. Тогда

$$a_2^1 < \begin{cases} 4 + \frac{4}{n-2}, & \text{если} \quad n \quad \text{четно}, \\ 4 + \frac{4}{n-1}, & \text{если} \quad n \quad \text{нечетно}. \end{cases}$$

Но $5 \leq a_2^1$.

Следствие: При $n > 4$ в $\mathbb{H}^n$ нет ограниченных прямоугольных многогранников.

Прямоугольные многогранники конечного объема в $\mathbb{H}^n$

Примеры известны только для $n \leq 8$. Рассмотрим симплексы $T^3, \dots, T^8$ со следующими диаграммами Коксетера:

T^3 (с группой B_3)

T^4 (с группой F_4)

T^5 (с группой D_5)

T^6 (с группой E_6)

T^7 (с группой E_7)

T^8 (с группой E_8)

"Черные" поддиаграммы соответствуют конечным группам Коксетера: $|B_3| = 2^3 \cdot 3!$, $|F_4| = 1152$, $|D_5| = 2^4 \cdot 5!$, $|E_6| = 72 \cdot 6!$, $|E_7| = 72 \cdot 8!$, $|E_8| = 192 \cdot 10!$.

Dufour, 2010: Нет прямоугольных многогранников конечного объема в $\mathbb{H}^n$ для $n > 12$.

Вопрос. Существуют ли прямоугольные многогранники конечного объема при $n = 9, 10, 11, 12$?

Многогранники Погорелова

Прямоугольные многогранники в $\mathbb{H}^3$

Погорелов, 1967: Многогранник P может быть реализован в $\mathbb{H}^3$ как ограниченный прямоугольный многогранник тогда и только тогда, когда

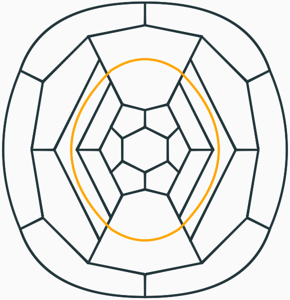
(1) каждая вершины инцидентна 3 ребрам (говорят, что многогранник простой);
(2) каждая грань имеет не менее 5 сторон;
(3) если простая замкнутая кривая на поверхности многогранника разделяет две грани (является призматическим обходом), то она пересекает не менее 5 ребер;
(4) P может быть реализован в $\mathbb{H}^3$ с двугранными углами, меньшими чем $\pi/2$.

Андреев, 1970: Не нужно отдельно требовать выполнение условия (4).

Условия (1) и (3) влекут (2).

Пример “плохого” призматического обхода

Многогранник, который удовлетворяет (1) и (2), но не удовлетворяет (3):



Здесь призматический обход, разделяющий две 6-угольные грани, пересекает только 4 ребра.

Многогранники Погорелова

Опр. Комбинаторный многогранник называется многогранником Погорелова, если

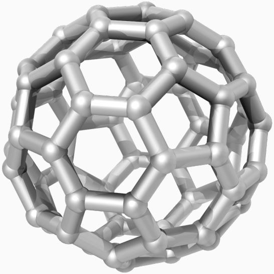
- каждая его вершина инцидентна 3 ребрам (простой многогранник);
- каждый призматический обход пересекает не менее 5 ребер.

академик Алексей Васильевич Погорелов [1919–2002].

Комбинаторный многогранник может быть реализован как ограниченный прямоугольный многогранник в $\mathbb{H}^3$ тогда и только тогда, когда он является многогранником Погорелова.

Фуллерены являются многогранниками Погорелова

Простой многогранник, имеющий только пятиугольные и шестиугольные грани, называется фуллереном.



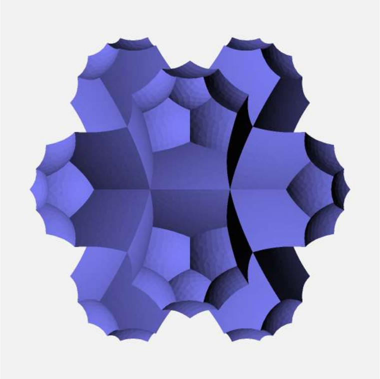
Došlić, 2003; Бухштабер – Ероховец, 2015: Если P – фуллерен, то каждый призматический обход имеет не менее 5 граней.

Следствие. Фуллерены являются многогранниками Погорелова.

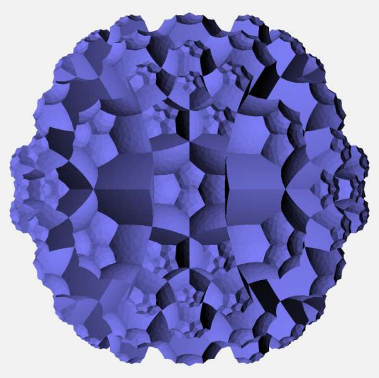
Прямоугольный додекаэдр в $\mathbb{H}^3$

Комбинаторно простейшим многогранником Погорелова является додекаэдр.

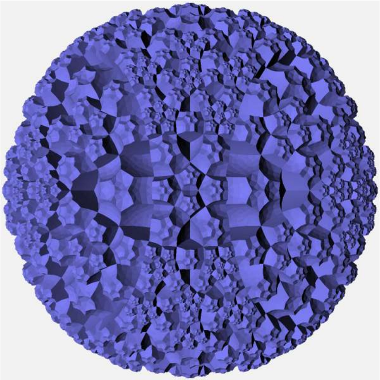
Замощение $\mathbb{H}^3$ прямоугольными додекаэдрами, I



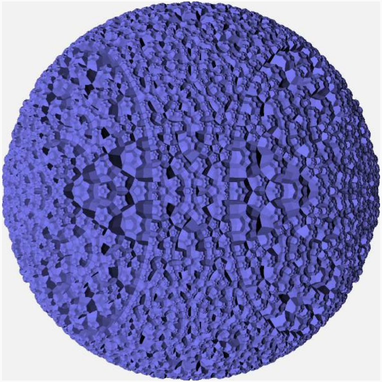
Замощение $\mathbb{H}^3$ прямоугольными многогранниками, II



Замощение $\mathbb{H}^3$ прямоугольными многогранниками, III



Замощение $\mathbb{H}^3$ прямоугольными многогранниками, IV

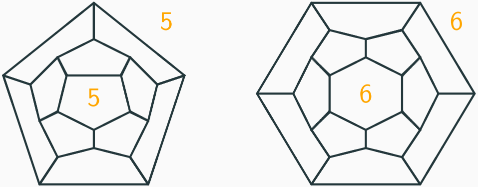


* Рисунки сделаны Владимиром Булатовым, www.bulatov.org

Структура множества многогранников Погорелова

Одно бесконечное семейство

В., 1987:: Для $n \geqslant 5$ определим прямоугольный $(2n+2)$-гранник $L(n)$. Многогранники $L(5)$ и $L(6)$ приведены на рисунке:



Многогранники $L(n)$ были названы многогранниками Лёбелля.

Немецкий математик Frank Richard Löbell [1893–1964].

Два преобразования на множестве ограниченных прямоугольных многогранников, I

Обозначим через $\mathcal{R}$ множество всех ограниченных прямоугольных многогранников в $\mathbb{H}^3$.

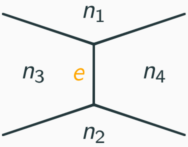
Inoue, 2008: Два преобразования на множестве $\mathcal{R}$.

- Композиция / Декомпозиция: Рассмотрим два комбинаторных многогранника R_1, R_2, имеющих k-угольные грани $F_1 \subset R_1$ и $F_2 \subset R_2$. Их композицией назовем объединение $R = R_1 \cup_{F_1 = F_2} R_2$.

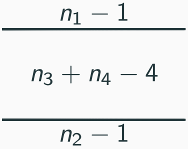
  Если $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$, то $R \in \mathcal{R}$.

Два преобразования на множестве ограниченных прямоугольных многогранников, II

- Удаление / добавление ребра: преобразование от R к $R - e$ и обратное ему:



многогранник R



многогранник $R - e$

Если $R \in \mathcal{R}$ и e такое, что F_1 грани F_2 имеют каждая не менее 6 сторон и e не принадлежит призматическому 5-обходу, то $R - e \in \mathcal{R}$.

Добавление ребра известно как Endo–Kroto move для фуллеренов. В случае фуллеренов $n_1 = n_2 = 6$ и $n_3 = n_4 = 5$.

Редукция к многогранникам Лёбелля

Inoue, 2008: Для каждого $P_0 \in \mathcal{R}$ существует такая последовательность объединений прямоугольных гиперболических многогранников $P_1, \ldots, P_k$, что:

- множество P_i получено из P_{i-1} декомпозицией или удалением ребра,
- объединение P_k состоит из многогранников Лёбелля.

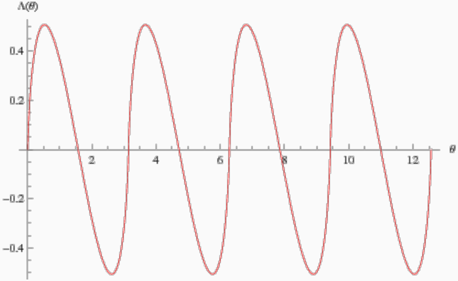
Более того,

$$\mathrm{vol}(P_0) \geqslant \mathrm{vol}(P_1) \geqslant \mathrm{vol}(P_2) \geqslant \ldots \geqslant \mathrm{vol}(P_k).$$

Функция Лобачевского

Для выражения объемов гиперболических 3-многогранников мы будем пользоваться функцией Лобачевского

$$\Lambda(\theta) = -\int_0^\theta \log|2\sin(t)|\,\mathrm{d}t.$$



Формула объема для многогранников Лёбелля

Каждому многограннику Погорелова R сопоставим объем $\mathrm{vol}(R)$ его прямоугольной реализации в $\mathbb{H}^3$.

В., 1998: Пусть $L(n)$ – многогранник Лёбелля, где $n \geq 5$. Тогда

$$\mathrm{vol}(L(n)) = \frac{n}{2}\left[2\Lambda(\theta_n) + \Lambda\left(\theta_n + \frac{\pi}{n}\right) + \Lambda\left(\theta_n - \frac{\pi}{n}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta_n\right)\right],$$

где

$$\theta_n = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{2\cos(\pi/n)}\right).$$

Перечисление многогранников Погорелова

Комбинаторное перечисление

(по числу граней комбинаторного многогранника)

или

Перечисление с точки зрения гиперболической геометрии

(по объему $\pi/2$-угольного гиперболического многогранника)

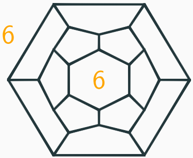
Перечисление многогранников по объемам

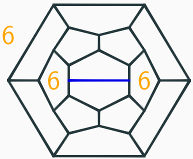
Каждому многограннику Погорелова R сопоставлен объем $\mathrm{vol}(R)$ его прямоугольной реализации в $\mathbb{H}^3$.

Inoue, 2011: Перечислены первые по объему 825 ограниченных прямоугольных гиперболических многогранников.

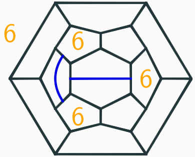
В., Егоров, Шмельков, 2018: объемы всех ($> 30,000$) ограниченных прямоугольных многогранников, имеющих не более 25 граней.

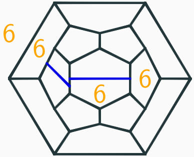
Процедура перечисления Иное, I

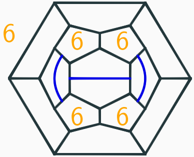


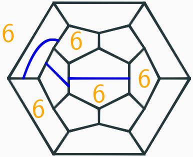


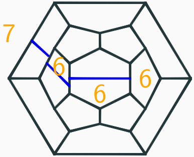
Процедура перечисления Иное, II











Оценки объема многогранника через его комбинаторику

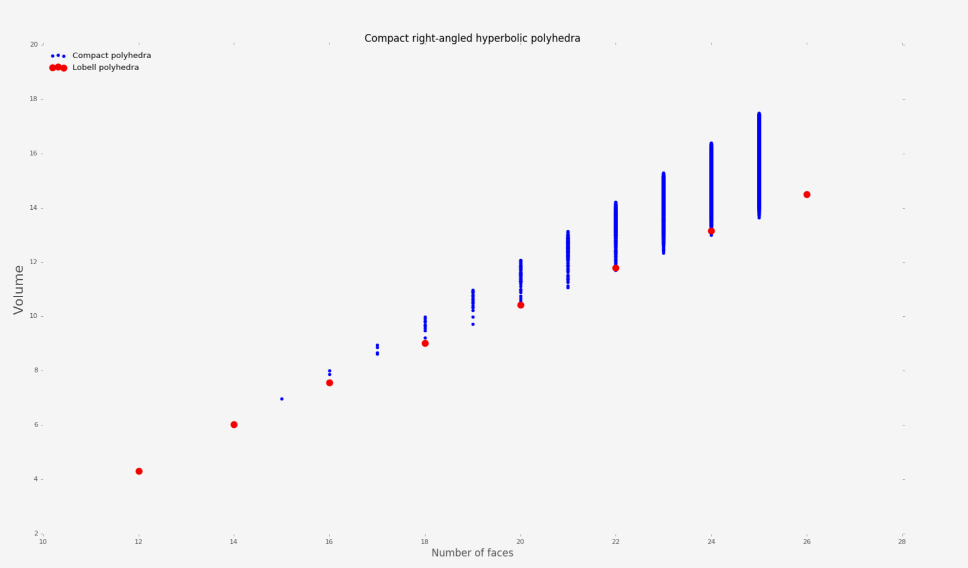
Atkinson, 2009: Пусть P – многогранник Погорелова с F гранями. Тогда

$$\frac{v_8}{16}F - \frac{3v_8}{8} \leqslant \mathrm{vol}(P) < \frac{5v_3}{4}F - \frac{35v_3}{4},$$

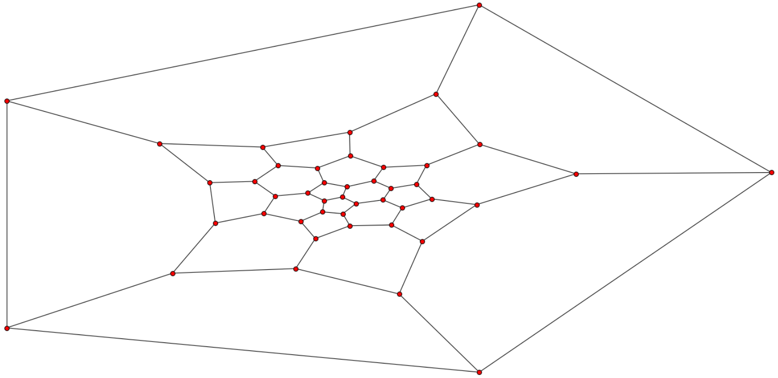
где $v_8 = 3.66386\ldots$ и $v_3 = 1.01494\ldots$.

Matveev – Petronio - V., 2009: Для многогранника Лёбелля L с F гранями, имеем $\mathrm{vol}(L) \to \frac{5v_3}{8}F - \frac{5v_3}{4}$ при $F \to \infty$.

Объемы многогранников, имеющих не более 25 граней

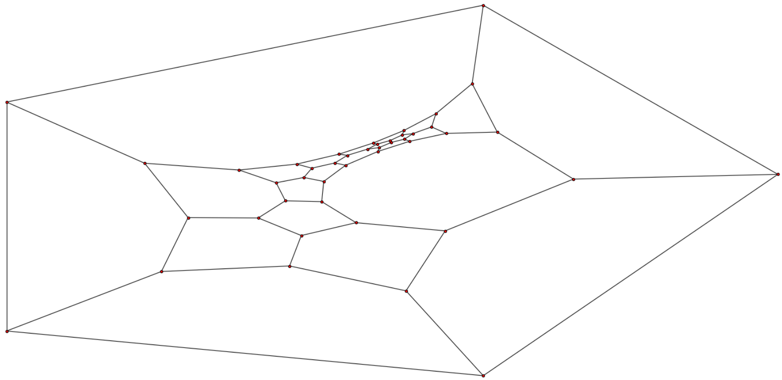


Максимальный многогранник Погорелова с 24 гранями



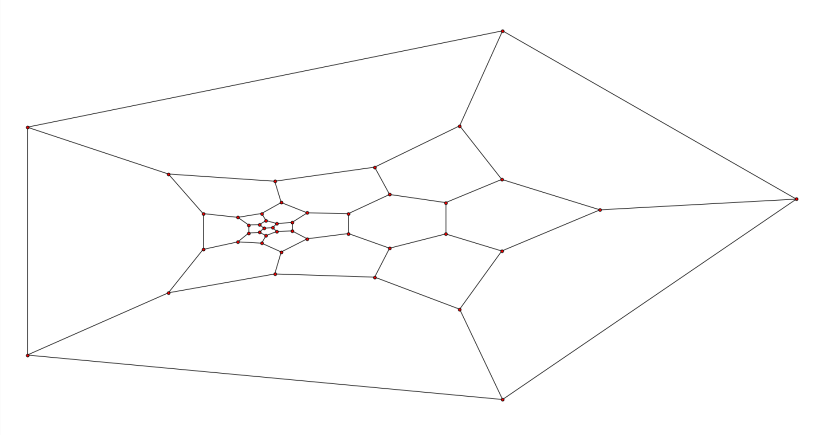
объем $= 16{,}397833\ldots$

Минимальный многогранник Погорелова с 24 гранями



объем $= 12{,}996118\ldots$

Минимальный фуллерен с 24 гранями



объем $= 15{,}084432\ldots$

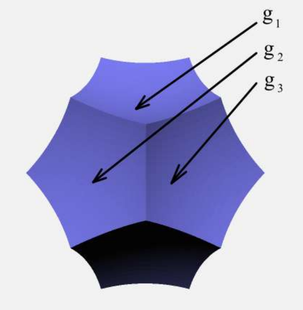
Построение многообразий из многогранников Погорелова

Стабилизатор вершины

Пусть

- P – ограниченный прямоугольный многогранник в $\mathbb{H}^3$;
- G группа, порожденная отражениями в гранях P.

Для каждой вершины $v \in P$ ее стабилизатор в G порожден тремя отражениями g_1, g_2, g_3 и изоморфен восьмиэлементной абелевой группе $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2^3$.



Локальная линейная независимость

Рассмотрим группу $\mathbb{Z}_2^3$ как конечное векторное пространство из 8 векторов над $GF(2)$ с базисом

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

Al-Jubouri, 1980: Ядро $\mathrm{Ker}\,\varphi$ эпиморфизма $\varphi : G \to \mathbb{Z}_2^3$ не имеет кручений если и только если для каждой вершины $v \in P$ образы отражений в гранях, инцидентных v, линейно независимы в $\mathbb{Z}_2^3$.

Доказательство приведено для додекаэдра, но оно легко обобщается.

Таким образом, если φ удовлетворяет условию локальной линейной независимости, то $M = \mathbb{H}^3/\mathrm{Ker}\,\varphi$ – замкнутое гиперболическое 3-многообразие (ориентируемое или неориентируемое), склеенное из восьми экземпляров P.

Раскраски в 4 цвета

Элементы $\alpha = (1, 0, 0)$, $\beta = (0, 1, 0)$, $\gamma = (0, 0, 1)$ и $\delta = \alpha + \beta + \gamma = (1, 1, 1)$ таковы, что любые три из них линейно независимы в $\mathbb{Z}_2^3$.

В., 1987: Пусть $\varphi : G \to \mathbb{Z}_2^3$ такой эпиморфизм, что для каждого порождающего g из G его образ $\varphi(g)$ принадлежит $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$. Тогда $\operatorname{Ker} \varphi$ состоит из сохраняющих ориентацию изометрий.

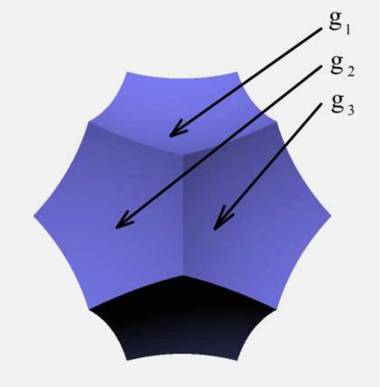
Следствие. Если эпиморфизм $\varphi : G \to \mathbb{Z}_2^3$ такой, что

- для каждого порождающего $g \in G$ его образ $\varphi(g)$ принадлежит $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$;
- для любых двух смежных граней образы отражений различны;

то $M = \mathbb{H}^3 / \operatorname{Ker} \varphi$ – замкнутое ориентируемое гиперболическое 3-многообразие.

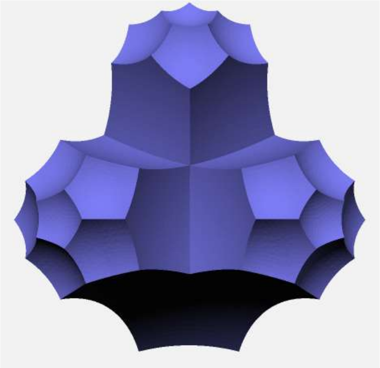
Следствие. Каждая 4-раскраска граней многогранника Погорелова задает замкнутое ориентируемое гиперболическое 3-многообразие.

Замощение вокруг вершины, I



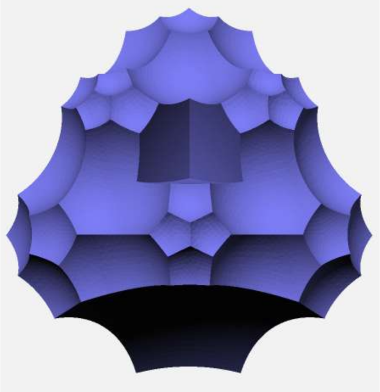
P

Замощение вокруг вершины, II



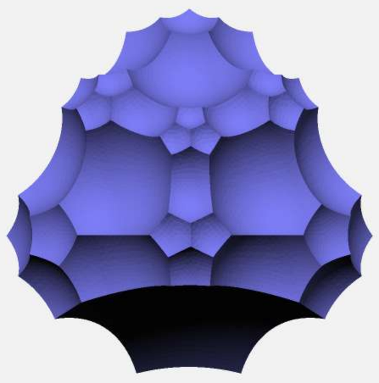
$P \cup g_1(P) \cup g_2(P) \cup g_3(P)$

Замощение вокруг вершины, III



$$P \cup g_1(P) \cup g_2(P) \cup g_3(P) \cup g_1 g_2(P) \cup g_1 g_3(P) \cup g_2 g_3(P)$$

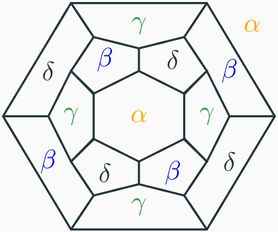
Замощение вокруг вершины, IV



$$P \cup g_1(P) \cup g_2(P) \cup g_3(P) \cup g_1 g_2(P) \cup g_1 g_3(P) \cup g_2 g_3(P) \cup g_1 g_2 g_3(P)$$

Пример: классическое многообразие Лёбелля

Классическое многообразие Лёбелля, построенное в 1931 г., можно задать следующей 4-цветной раскраской граней многогранника $L(6)$:



F. Löbell, Beispiele geschlossene dreidimensionaler Clifford–Kleinischer Räume negative Krümmung, Ber. Verh. Sächs. Akad. Lpz., Math.-Phys. Kl. 83 (1931), 168–174.

Когда две 4-раскраски задают одно многообразие?

Подход с точки зрения торической топологии.

Бухштабер – Панов, 2016:

Пусть $M = (P, \varphi)$ и $M' = (P', \varphi')$ – гиперболические 3-многообразия, соответствующие 4-раскраскам многогранников Погорелова: φ для P и φ' для P'. Многообразия M и M' диффеоморфны если и только если пары (P, φ) и (P', φ') эквивалентны.

Разветвленные накрытия

Гамильтоновы циклы на многогранниках Погорелова

n-мерное многообразие M^n называется гиперэллиптическим, если оно допускает инволюцию τ такую, что $M^n/\langle\tau\rangle$ гомеоморфно S^n. Инволюция τ называется гиперэллиптической.

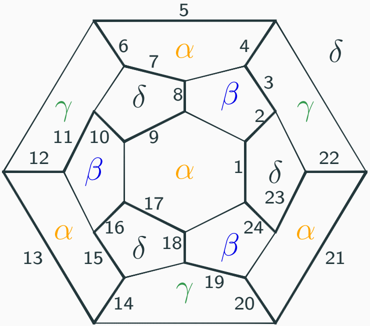
В. – Медных: Пусть P – ограниченный прямоугольный многогранник в $\mathbb{H}^3$, а G – группа, порожденная отражениями в его гранях. Если P имеет гамильтонов цикл, то существует подгруппа $\Gamma \triangleleft G$ индекса $|G:\Gamma| = 8$ без кручений, такая, что $\mathbb{H}^3/\Gamma$ – гиперэллиптическое многообразие.

Kardoš, 2014: Каждый фуллерен имеет гамильтонов цикл.

Следствие. Для каждого фуллерена существует гиперэллиптическое многообразие, построенное из его 8 копий.

Пример: сестра многообразия Лёбелля

Рассмотрим гамильтонов цикл $\mathcal{C}$ на многограннике $L(6)$ и перенумеруем его ребра: $1, 2, \ldots, 24$. Замкнутая кривая $\mathcal{C}$ делит поверхность $L(6)$ на две области. Раскрасим грани первой в цвета α и β, а грани второй - в цвета γ и δ.



цвета граней:

$\alpha = (1, 0, 0)$, $\beta = (0, 1, 0)$,

$\gamma = (0, 0, 1)$, $\delta = (1, 1, 1)$;

цвета рёбер:

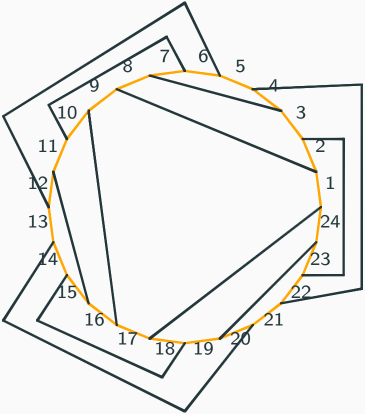
$a = \alpha + \gamma = \beta + \delta = (1, 0, 1)$

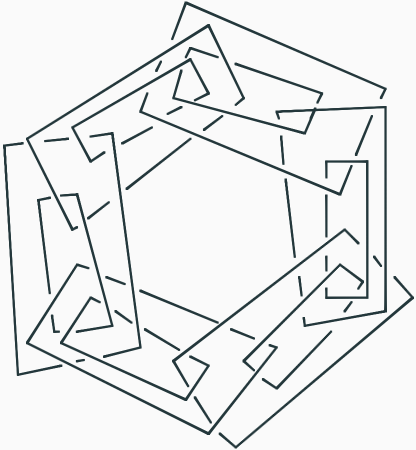
$b = \alpha + \delta = \beta + \gamma = (0, 1, 1)$

$c = \alpha + \beta = \gamma + \delta = (1, 1, 0)$

Множество ветвления

Многообразие M является 2-листным накрытием S^3, разветвленным над 12-компонентным зацеплением, построенным из прообразов ребер цвета “c”.





Обобщения

Приведенный результат о разветвленных 2-накрытиях S^3 был обобщен в следующих направлениях (В. – Медных):

1. Построение разветвленных 2-накрытий S^3 из прямоугольных многогранников, не являющихся гамильтоновыми;

2. Построение многообразий, которые являются разветвленными 2-накрытиями многообразий, отличных от S^3.

Вопрос:

Описать множество ограниченных прямоугольных многогранников в 4-мерном гиперболическом пространстве $\mathbb{H}^4$.

Литература

Недавние обзоры:

- В.М. Бухштабер, Н.Ю. Ероховец, М. Масуда, Т.Е. Панов, С. Пак. Когомологическая жесткость многообразий, задаваемых трехмерными многогранниками, УМН **72:2** (2017), 3–66.
- А.Ю. Веснин. Прямоугольные многогранники и трехмерные гиперболические многообразия, УМН **72:2** (2017), 147–190.

Николай Петрович, с днем рождения!