Топологическое развитие последней геометрической теоремы Пуанкаре

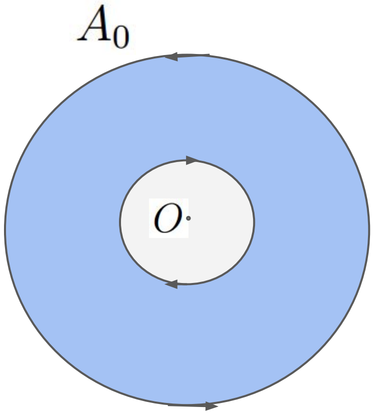
Кириллов А.Н.

Институт прикладных математических исследований
Карельского научного центра РАН

Геометрическая теорема Пуанкаре, 1912

29.04.1854 – 17.07.1912

$$f : A_0 \to A_0$$



f удовлетворяет условиям

- **гомеоморфизм**
- **сохранение площади**
- **инвариантность граничных окружностей**
- **вращение**

Тогда $\sharp Fix f \geq 2$

Poincaré H. Sur un théorème de geométrie.
Rend. Circ. Mat. Palermo. 1912. 33, 375-407

Теорема С. Лефшеца (1926)

Если число Лефшеца $L(f) \neq 0$

$$L(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n Tr(f_n)$$

то $f : X \to X$ имеет хотя бы одну неподвижную точку

Для кольца $L(f) = 0$

$03.09.1884 - 05.10.1972$

S. Lefschetz. *Intersections and transformations of complexes and manifolds* - Trans. Amer. Math. Soc., 28 (1926), no.1, pp.1-49

Обобщение теоремы Пуанкаре:
без сохранения площади
Дж. Биркгоф, 1925

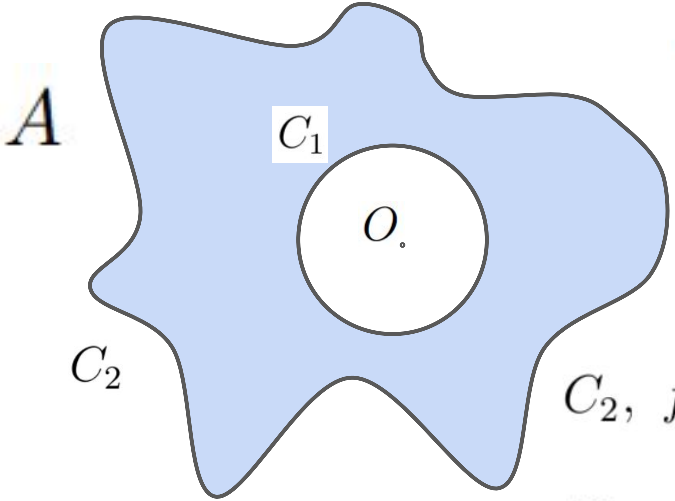
G.D.Birkhoff. ***An extension of Poincare's last geometric theorem.***
Acta Math. 47 (1925), 297 - 311

21.03.1884 – 12.11.1944

Отказ от сохранения площади

Теорема Пуанкаре-Биркгофа. (Дж. Биркгоф, 1925)

$f-$ гомеоморфизм вращения, без сохранения площади

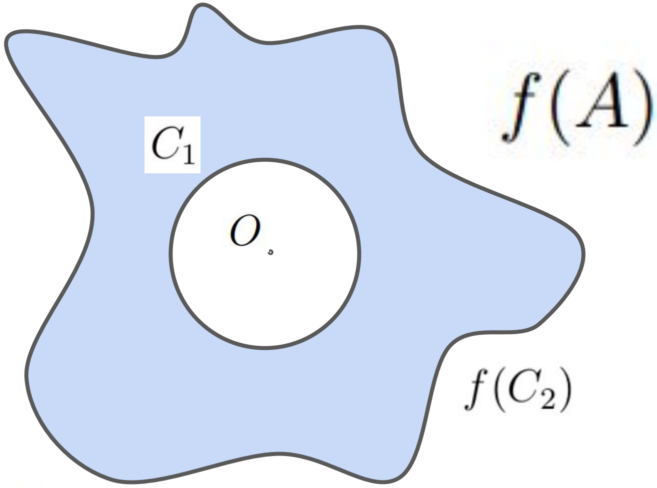


$$f : A \to f(A)$$

$$C_1 = f(C_1)$$

C_1- окружность

$C_2,\ f(C_2)-$ звездные

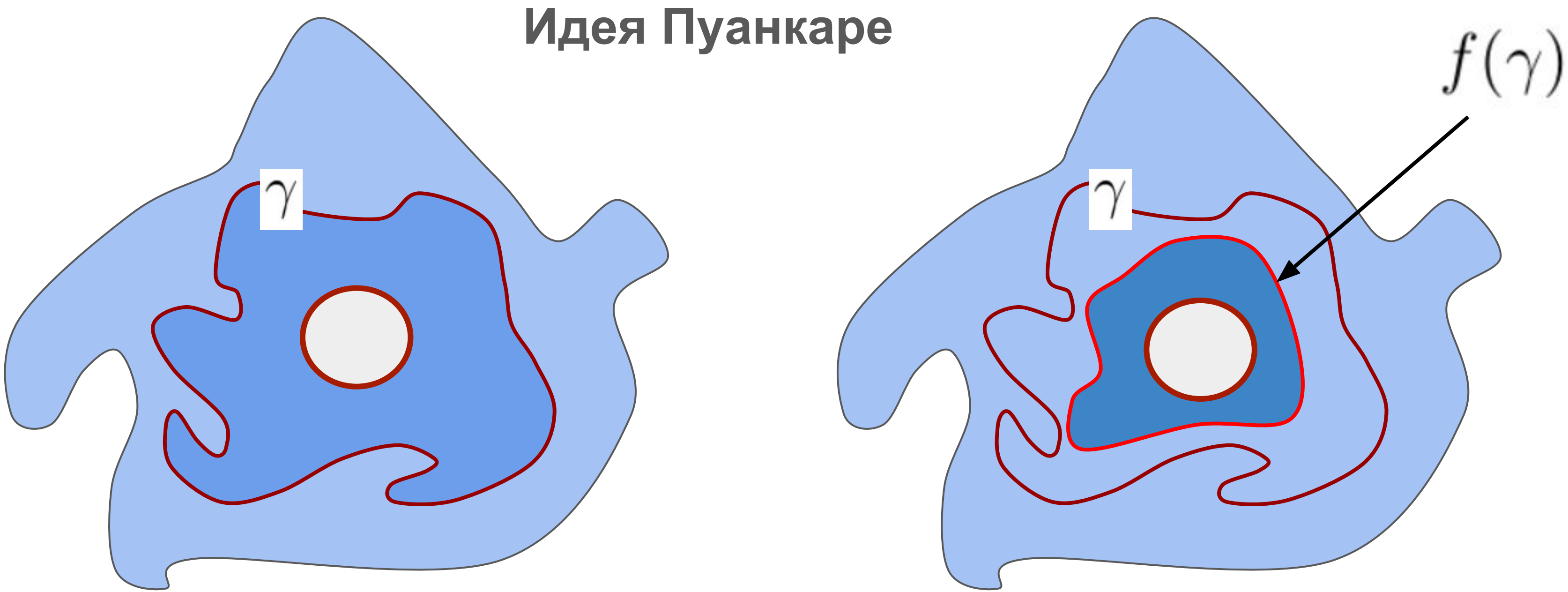


Тогда $\quad \sharp Fix f \geq 2$

или

$\exists$ существенная жорданова кривая $\gamma \subset intA : \gamma \cap f(\gamma) = \emptyset$

Дж. Биркгоф, 1925



$$\gamma \cap f(\gamma) = \emptyset$$

Трансляционная теорема Брауэра, 1912
(Теорема о переносе)

Brouwer, L. E.
Beweis des Ebenen Translationssatzes
Math. Ann. 72 (1912), 36-54

(Доказательство трансляционной теоремы для плоскости)

27.02.1881 - 02.12.1966

Трансляционная теорема Брауэра, 1912

Гомеоморфизм $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
сохраняющий ориентацию, без неподвижных точек -
гомеоморфизм Брауэра

Трансляционная лемма Брауэра.
Гомеоморфизм Брауэра не имеет периодических точек

Следствие: если гомеоморфизм плоскости, сохраняющий ориентацию, имеет периодическую точку, то он имеет неподвижную точку

Следствие: все точки плоскости - блуждающие под действием гомеоморфизма Брауэра (Дж. Фрэнкс)

Трансляционная теорема Брауэра

Множество $A \subset \mathbb{R}^2$ ***свободно*** относительно f

$$A \cap f(A) = \emptyset$$

Линия Брауэра L

- L образ собственного вложения $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}^2$

- L свободно относительно f

- L разделяет $f(L)$ и $f^{-1}(L)$

Трансляционная теорема Брауэра, 1912

Пусть f гомеоморфизм Брауэра. Тогда любая точка в $\mathbb{R}^2$ принадлежит линии Брауэра

в частности

Для любой точки $p \in \mathbb{R}^2$ существует вложение $\varphi_p : (\mathbb{R}^2, O) \to (\mathbb{R}^2, p)$ такое, что

$$f \circ \varphi_p = \varphi_p \circ \tau$$

где τ - трансляция $\tau(x, y) = (x + 1, y)$

Л.Э.Брауэр - А.М. Шенфлис

A.M. Schoenflies. ***Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten*** **II, 1908**

(The development of the theory of point sets)

“Bericht” (Обзор)

Д.Гильберт, Mathematische Annalen
Брауэр: “Zur Analysis Situs”, 1910

17.04.1853 – 27.05.1928

Письмо Кортевегу (1912): ***“It turns out that the solution of the Poincare problem, before it is written in a matured form, it will take many more weeks. Before that time I would rather keep it under me; please don't discuss it with anybody. Only after I have finished the complete version, I will present an outline to the Academy”***

Письмо Гильберту (добавление Lize, 1913): ***“...If my husband becomes insane because of Schoenflies, he has to thank you for it”***

В письме к Aldert and Lily (1913) ***Lise complained in the letter to Aldert and Lily, that the Schoenflies project had cost Bertus the priority for Poincare's last theorem.***

Из книги “L.E.J.Brouwer: Topologist, Intuitionist, Philosopher”,
Dirk van Dalen

Б. Керекьярто

Béla Kerékjártó,
Vorlesungen über Topologie I,
Mathematics: Theory & Applications, Springer,
Berlín, 1923.

S. Lefschetz:
the Topologie will be especially useful to the reader familiar with point sets and wishing to learn more about their geometric applications, and also, say, in connection with Veblen's Colloquium Lectures.

H. Freudenthal
everyone knew that Kerékjártó's 'Vorlesungen über Topologie was not a good book and, therefore, nobody read it.

01.10.1898 - 26.06.1946

Июнь, 1928
г. Сегед

F.Riesz, **B. Kerékjártó**,
A.Haar, D. König, R. Ortvay

J.Kürschák, **G. D. Birkhoff**,
O.B.Kellogg, L.Fejér,

T.Radó, I.Lipka, L.Kalmar, P. Szász

B. Kerekjarto. ***The plane translation theorem of Brouwer and the last geometric theorem of Poincare*** - Acta Sci. Math. (Szeged), 4, 1928, pp. 86 - 102.

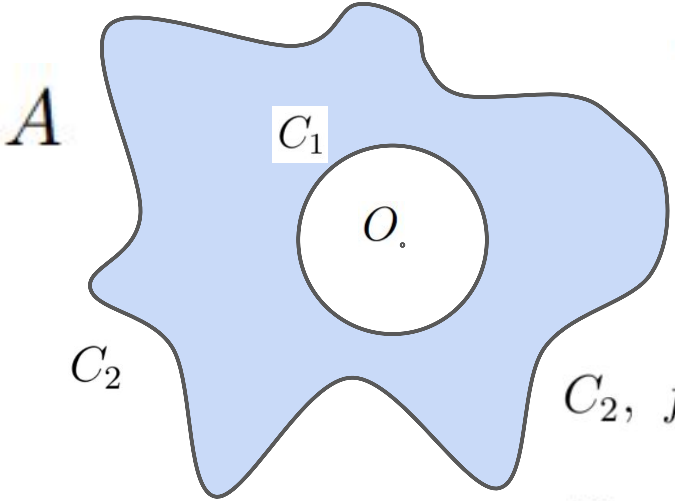
Подход с единых позиций к обеим теоремам.

Основная проблема в теоремах Пуанкаре, Брауэра, Биркгофа - построение поля преобразований (transformation-field), дающего возможность построения наибольшей области, лежащей вне ее образа.
Цель статьи - дать метод построения соответствующего поля.

Доказано существование одной неподвижной точки в теореме Пуанкаре-Биркгофа.

Теорема Пуанкаре-Биркофа. (Дж. Биркгоф, 1925)

$f-$ гомеоморфизм вращения, без сохранения площади

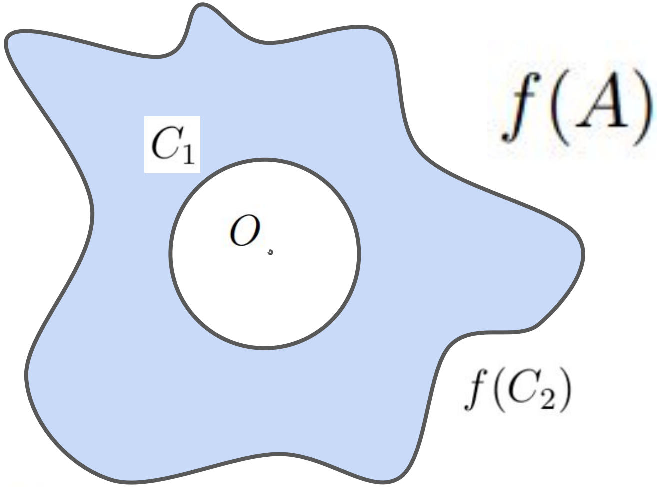


$f : A \to f(A)$

$C_1 = f(C_1)$

C_1- окружность

$C_2,\ f(C_2)-$ звездные



Тогда $\sharp Fixf \geq 2$

или

$\exists$ существенная жорданова кривая $\gamma \subset intA : \gamma \cap f(\gamma) = \emptyset$

Теорема (Дж. Биркгоф, 1925).

Пусть $f : A \to f(A)$ *гомеоморфизм вращения, не имеющий неподвижных точек в* $intA$ *. Тогда существует существенная кривая* $\gamma \in intA$ *, не имеющая общих точек со своим образом*

$$\gamma \cap f(\gamma) = \emptyset$$

Теорема П. Картер (P.Carter, 1982).

Пусть $f: A \to f(A)$ *гомеоморфизм вращения, имеющий не более одной неподвижной точки в* $int A$ *. Тогда существует существенная кривая* $\gamma \in int A$ *, имеющая не более одной общей точки со своим образом (н.т., если существует)*

P. H. Carter. An improvement of the Poincare-Birkhoff fixed point theorem - Trans. Amer. Math. Soc. 269, 1982, pp. 285 -299.

Теорема (P. Le Calvez и J.Wang, 2010). $f : A \to f(A)$

Если каждая существенная кривая имеет общую точку со своим образом, то

$$fix(f) \geq 1$$

Если каждая существенная кривая имеет не менее двух общих точек со своим образом, то

$$fix(f) \geq 2$$

P. Le Calvez and J. Wang *Some remarks on the Poincare-Birkhoff theorem* - Proceedings of the American Mathematical Society, 2010, vol. 138, no. 2, pp. 703 –715.

Положительный путь $\gamma : I \to X$

гомеоморфизма $g : X \to X$

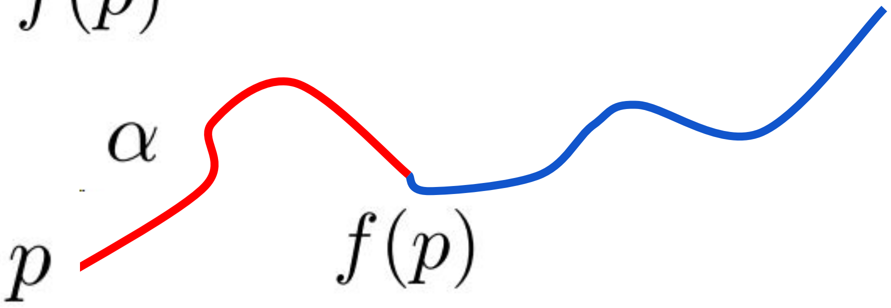
$$\forall t, t' \in I$$

$$t' \geq t \Rightarrow g(\gamma(t')) \neq \gamma(t)$$

Трансляционная дуга Брауэра $\alpha \subset \mathbb{R}^2$

простая дуга с концами $p \in \mathbb{R}^2$ $f(p)$

$\alpha \cap f(\alpha) = f(p)$



Л.Э.Брауэр: $\alpha \cap f^n(\alpha) = \emptyset$ $n \geq 2$

R. B. Barrar. *Proof of the fixed point theorems of Poincaré and Birkhoff* - Canad. J. Math. 19 (1967), pp. 333-343.

Доказательство теоремы Биркгофа (1925) на основе рассуждений, используемых при доказательстве трансляционной теоремы Брауэра. Основные инструменты: трансляционная дуга и критическая область G

$$\bar{G} \cap f(\bar{G}) = \partial G \cap f(\partial G)$$

Проблема: ***следует ли одна из теорем (Биркгофа или Брауэра) из другой***?

H.E. Winkelnkemper, 1988

Круговое кольцо A

$f : A \to A$ **сохраняет ориентацию и граничные компоненты**

Трансляция $\tau(x, y) = (x + 2\pi, y)$ $\quad \tilde{f} : \Pi^{-1}(A) \to \Pi^{-1}(A)$

Лемма. Пусть существует простая дуга γ **свободная относительно** $\tilde{f}$ **,**

$\gamma \cap \tilde{f}(\gamma) = \emptyset$ **, соединяющая граничные компоненты** A **.**

Пусть $\tilde{f}$ **не сопряжено (топологически)** τ

Тогда $\tilde{f}$ **имеет неподвижную точку.**

H. E. Winkelnkemper, 1988 (*Нет условия вращения*!)

Теорема. $f : A \to A$ сохраняет ориентацию и граничные компоненты A.
Пусть $\tilde{f}$ не сопряжено $\mathcal{T}$.

Тогда либо $\tilde{f}$ имеет неподвижную точку,

либо существует существенная кривая $C \cap \tilde{f}(C) = \emptyset$

H. E. Winkelnkemper, A generalizations of the Poincar´e-Birkhoff theorem.
Proc. Amer. Math. Soc. 102 (1988), 1028–1030.

T. Ding, 2007: отображение *изгиба-вращения* (*bend-twist map*)

$\tilde{f}$ поднятие f в $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ $\qquad \Pi(\theta, \varrho) = (\varrho \cos \theta, \varrho \sin \theta)$

$$\tilde{f}(\theta, \varrho) = (\theta + \Phi(\theta, \varrho), r(\theta, \varrho))$$

радиальное смещение $I(\theta, \varrho) = r(\theta, \varrho) - \varrho$

угловое смещение $\Phi(\theta, \varrho)$

неподвижные точки $I(\theta, \varrho) = 0$

$\Phi(\theta, \varrho) = 2\pi \cdot i \qquad i \in \mathbb{Z}$

Отображение вращения (twist map)

f **отображение вращения, если** $\exists j \in \mathbb{Z}$

$$\Phi(\theta, \varrho) < 2\pi \cdot j \qquad \forall (\theta, \varrho) \in \Pi^{-1}(C_1)$$

$$\Phi(\theta, \varrho) > 2\pi \cdot j \qquad \forall (\theta, \varrho) \in \Pi^{-1}(C_2)$$

Рассмотрим множество

$$\Omega_f(j) = \{(\varrho \cos\theta, \varrho \sin\theta) \in A : \ \Phi(\theta, \varrho) = 2\pi \cdot j\}$$

Теорема (T.Ding, 2007): ***если отображение вращения*** f ***аналитично, то существует существенная простая кривая***

$$\Gamma \subset \Omega_f(j)$$

Отображение *изгиба-вращения*

Отображение **вращения** f называется отображением **изгиба-вращения**,

если радиальное смещение $I(\theta, \varrho) = r(\theta, \varrho) - \varrho$ изменяет свой знак на

множестве $\Pi^{-1}(\Gamma)$.

Теорема (T. Ding, 2007). Если $f : A \to f(A)$ **аналитическое отображение изгиба-вращения, а граничные компоненты колец** A **и** $f(A)$ **звездообразны, то**

$$\sharp Fix f \geq 2$$

T. Ding, *Approaches to the qualitative theory of ordinary differential equations.* Peking University Series in Mathematics 3, World Scientific, Hackensack, NJ, 2007.

Отказ от аналитичности и звездообразности

Теорема (A. Pascoletti, F. Zanolin, 2011). ***Если*** $f : A \to f(A)$ ***непрерывное отображение изгиба-вращения, кольцо*** A ***топологическое, то***

$$\sharp Fix f \geq 1$$

A. Pascoletti and F. Zanolin, *A topological approach to bend-twist maps with applications*. Int. J. Differ. Equ. **2011** (2011), Art. ID 612041, 20 p.

A.Kirillov, V.Starkov. ***Some extensions of the Poincare-Birkhoff theorem.***
Journal of Fixed Point Theory and Applications. 2013.
V. 13. № 2. Pp. 611 - 625.

$$f : A \to f(A)$$

Дано описание множества

$$\Omega_f(j) = \{(\varrho\cos\theta, \varrho\sin\theta) \in A : \ \Phi(\theta, \varrho) = 2\pi \cdot j\}$$

для непрерывного и дифференцируемого топологического кольца A . Обобщено условие вращения, доказаны теоремы о неподвижных точках.

Обобщение условия вращения

Обозначения: $\tilde{P} = (\theta, \varrho)$ $\quad P = (\varrho \cos\theta, \varrho \sin\theta)$ $\quad f : A \to f(A)$

Определение: непрерывное отображение f называется отображением $(*)$, если существуют точки $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2 \in \Pi^{-1}(A)$ такие, что существует $k \in \mathbb{Z}$, для которого

$$\frac{\Phi(\tilde{P}_1)}{2\pi} < k < \frac{\Phi(\tilde{P}_2)}{2\pi} \qquad \frac{\Phi(\tilde{P}_j)}{2\pi} \notin \mathbb{Z}, \quad j = 1, 2$$

Введем множество $\Omega_f = \left\{ (\varrho \cos\theta, \varrho \sin\theta) \in A : \frac{\Phi(\theta, \rho)}{2\pi} \in \mathbb{Z} \right\}$

Лемма 2 (о структуре Ω_f). $f : A \to f(A)$ отображение $(*)$.

Пусть, что $\Phi(\theta, \varrho)$ строго монотонна относительно ϱ и $\Omega_f \cap \partial A = \emptyset$

Тогда Ω_f является объединением попарно непересекающихся существенных кривых $\Gamma_k,\ k = 1, \ldots, m$

$$\Omega_f = \bigcup_{k=1}^{m} \Gamma_k, \quad \Gamma_k \cap \Gamma_l = \emptyset, \quad k \neq l$$