РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ И ТЕНЗОРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ МАТРИЦ

Е. Е. Тыртышников

Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука Российской академии наук

Всем известно, что любая матрица является суммой *чистых матриц* (так будем называть матрицы ранга 1), и это равносильно тому, что функция $a(i,j)$ представляется суммой функций вида $u_\alpha(i)v_\alpha(j)$, в которых переменные i и j разделены. Минимальное число чистых матриц в такого рода суммах равно рангу матрицы.

Аналогично, d-мерная матрица (тензор) с элементами $a(i_1,\ldots,i_d)$ является суммой *чистых тензоров* вида $u_{\alpha,1}(i_1)\ldots u_{\alpha,d}(i_d)$. Минимальное число чистых тензоров называется *тензорным рангом* исходного тензора, а соответствующее разложение – *минимальным тензорным разложением.* В случае $d=3$ поиск минимальных разложений тесно связан с проблемой быстрого вычисления произведения $N\times N$-матриц (меньше чем за N^3 операций правила "строка на столбец").

Мы обсудим удивительные свойства тензорных разложений и некоторые связанные с ними открытые вопросы. По ходу дела мы увидим, что матричный случай ($d=2$) существенно отличается от тензорных случаев ($d\geq 3$) по многим пунктам, в частности таким:

- В случае $d\geq 3$ "комплексный" тензорный ранг вещественного тензора может быть меньше "вещественного" ранга. Для матриц, то есть если $d=2$, эти ранги совпадают.
- Даже при $d\geq 3$ тензорный ранг в комплексном случае можно найти за конечное число арифметических операций, но число их, в отличие от случая $d=2$, огромно!
- Для всех комплексных тензоров размера $m\times n\times q$ почти любой тензор имеет один и тот же ранг. Пока еще недоказанная гипотеза утверждает, что он почти всегда определяется функцией
$$f(m,n,q)=\left\lceil\frac{mnq}{m+n+q-2}\right\rceil.$$
- В случае $d\geq 3$ при некоторых довольно общих условиях чистые тензоры минимального разложения определены однозначно. В матричном случае это категорически не так!

Кроме разложений в сумму чистых тензоров, имеются и другие реализации идеи разделения переменных. Наиболее полезным для практики и алгоритмически эффективным представляется разложение в *тензорный поезд.*