

Симуляции пропозициональных доказательств в конечнозначных логиках Лукасевича

Даниил Кожемяченко

Московский государственный университет

25.02.2019

- 1 Введение
 - Предварительные замечания
 - Мотивация
 - План
- 2 Симуляция гильбертовских исчислений
 - Классическая логика
 - $\mathbf{L}_3$
 - Обобщение на $\mathbf{L}_k$
- 3 Гиперсеквенциальное исчисление для $\mathbf{L}_3$
- 4 Открытые вопросы

Мы говорим, что исчисление $\mathcal{S}_2$ симулирует исчисление $\mathcal{S}_1$ если существует алгоритм, который переводит $\mathcal{S}_1$ -доказательство формулы A в $\mathcal{S}_2$ -доказательство формулы A .

Мы говорим, что исчисление $\mathcal{S}_2$ симулирует исчисление $\mathcal{S}_1$ если существует алгоритм, который переводит $\mathcal{S}_1$ -доказательство формулы A в $\mathcal{S}_2$ -доказательство формулы A .

Симуляция называется полиномиальной (линейной, квадратичной. . .) если $\mathcal{S}_1$ -доказательство A , содержащее n шагов преобразуется в $\mathcal{S}_2$ -доказательство A в $O(g(n))$ шагов, где g — полиномиальная (линейная, квадратичная. . .) функция.

Программа Кука

Теорема [Cook and Reckhow, 1979]

$\mathcal{NP} = co\mathcal{NP}$ в.т.е. существует исчисление, которое доказывает любую классическую пропозициональную тавтологию за полиномиальное время от ее длины («супер-система»).

Программа Кука

Теорема [Cook and Reckhow, 1979]

$\mathcal{NP} = co\mathcal{NP}$ в.т.е. существует исчисление, которое доказывает любую классическую пропозициональную тавтологию за полиномиальное время от ее длины («супер-система»).

Программа Кука

Найти «супер-систему» или показать, что их нет.

Расширение программы Кука

Допустим, что множество $\mathbb{L}$ -тавтологий $co\mathcal{NP}$ -полно, тогда $\mathcal{NP} = co\mathcal{NP}$ е.т.е. существует исчисление, которое доказывает любую $\mathbb{L}$ -тавтологию за полиномиальное время.

Расширение программы Кука

Допустим, что множество $\mathbb{L}$ -тавтологий $co\mathcal{NP}$ -полно, тогда $\mathcal{NP} = co\mathcal{NP}$ е.т.е. существует исчисление, которое доказывает любую $\mathbb{L}$ -тавтологию за полиномиальное время.

Расширенная программа Кука

Искать «супер-систему» для неклассических $co\mathcal{NP}$ -полных логик, обобщая классические симуляции доказательств.

Useful side-effects

- 1 В неклассических логиках «меньше» тавтологий и выводимых (и допустимых) правил, поэтому найти «трудные» формул может быть проще.
- 2 Возможно, что мы найдем экспоненциальную разницу между какими-то неклассическими логиками и классической, как уже было сделано для интуиционизма в [Hrubeš, 2007].

Симуляция доказательств в классической логике

Известно [Bonet and Buss, 1993], что гильбертовские исчисления симулируют общее правило дедукции квадратично, а правило дедукции с подвыводами — «почти линейно».

Симуляция доказательств в классической логике

Известно [Bonnet and Buss, 1993], что гильбертовские исчисления симулируют общее правило дедукции квадратично, а правило дедукции с подвыводами — «почти линейно».

$$\frac{\Gamma \models B}{\Gamma \setminus \{A\} \models A \supset B} \text{ — общее правило дедукции } (dr_g)$$

$$\left[\begin{array}{l} A \text{ — допущение} \\ \vdots \\ B \text{ — из } A \end{array} \right] A \supset B \text{ — правило дедукции с подвыводом } (dr_n)$$

Введение

Симуляция гильбертовских исчислений

Гиперсеквенциальное исчисление для L_3

Открытые вопросы

Предварительные замечания

Мотивация

План

Что будет, если в логике нет теоремы дедукции?

Что будет, если в логике нет теоремы дедукции?

Какие логики нам подойдут?

Почему L_k ?

Как известно [Hähnle, 2003], [Metcalf et al., 2008] логики G , A , CHL , CRL , L , P и L_k *сoNP*-полны. Какую выбрать?

Почему L_k ?

Как известно [Hähnle, 2003], [Metcalf et al., 2008] логики G , A , CHL , CRL , L , P и L_k *coNP*-полны. Какую выбрать?

Критерии

- 1 Отсутствие «сильной» теоремы дедукции —
 $A \vdash B \Leftrightarrow \vdash A \supset B$.
- 2 Наличие формулы, состоящей из A и B , которая общезначима, е.т.е. $A \vdash B$.

Почему L_k ?

Как известно [Hähnle, 2003], [Metcalf et al., 2008] логики G , A , CHL , CRL , L , P и L_k *coNP*-полны. Какую выбрать?

Критерии

- 1 Отсутствие «сильной» теоремы дедукции —
 $A \vDash B \Leftrightarrow \vDash A \supset B$.
- 2 Наличие формулы, состоящей из A и B , которая общезначима, е.т.е. $A \vDash B$.

Нам подходит только L_k .

План

- 1 Построить исчисления для логики L_3 , подобные построенным в [Bonnet and Buss, 1993], но с правилом исключения дизъюнкции вместо правила дедукции.

План

- 1 Построить исчисления для логики L_3 , подобные построенным в [Bonnet and Buss, 1993], но с правилом исключения дизъюнкции вместо правила дедукции.
- 2 Определить для этих исчислений верхние грани на изменение количества шагов и символов в доказательствах относительно гильбертовского исчисления для L_3 .

План

- 1 Построить исчисления для логики L_3 , подобные построенным в [Bonnet and Buss, 1993], но с правилом исключения дизъюнкции вместо правила дедукции.
- 2 Определить для этих исчислений верхние грани на изменение количества шагов и символов в доказательствах относительно гильбертовского исчисления для L_3 .
- 3 Рассмотреть симуляцию гиперсеквенциального исчисления для L_3 .

План

- 1 Построить исчисления для логики L_3 , подобные построенным в [Bonnet and Buss, 1993], но с правилом исключения дизъюнкции вместо правила дедукции.
- 2 Определить для этих исчислений верхние грани на изменение количества шагов и символов в доказательствах относительно гильбертовского исчисления для L_3 .
- 3 Рассмотреть симуляцию гиперсеквенциального исчисления для L_3 .
- 4 Обобщить результаты по гильбертовским исчислениям на L_k .

Исчисления

- ❶ $\mathcal{F}$ — гильбертовское исчисление.
- ❷ $d\mathcal{F} = \mathcal{F} + dr_g$.
- ❸ $nd\mathcal{F} = \mathcal{F} + dr_n$.

[Bonnet and Buss, 1993]

Теорема 1

Если B доказывается в $d\mathcal{F}$ за n шагов, то у B есть $\mathcal{F}$ -доказательство в $O(n^2)$ шагов.

[Bonnet and Buss, 1993]

Теорема 1

Если B доказывается в $d\mathcal{F}$ за n шагов, то у B есть $\mathcal{F}$ -доказательство в $O(n^2)$ шагов.

Теорема 2

Если B доказывается в $nd\mathcal{F}$ за n шагов, то у B есть $\mathcal{F}$ -доказательство в $O(n\alpha(n))$ шагов.

Правила исключения дизъюнкции

$$\textcircled{1} \frac{\Gamma_i \Rightarrow A \vee B \quad \Gamma_j \cup \{A\} \Rightarrow C \quad \Gamma_k \cup \{B\} \Rightarrow C}{(\Gamma_i \cup \Gamma_j \cup \Gamma_k) \setminus \{A, B\} \Rightarrow C} - \vee_e.$$

Правила исключения дизъюнкции

$$\textcircled{1} \frac{\Gamma_i \Rightarrow A \vee B \quad \Gamma_j \cup \{A\} \Rightarrow C \quad \Gamma_k \cup \{B\} \Rightarrow C}{(\Gamma_i \cup \Gamma_j \cup \Gamma_k) \setminus \{A, B\} \Rightarrow C} - \vee_e.$$

$$\textcircled{2} \frac{\begin{array}{l} A \vee B \\ \left[\begin{array}{l} A - \text{допущение} \\ \vdots \\ C \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{l} B - \text{допущение} \\ \vdots \\ C \end{array} \right] \end{array}}{C - \vee_{ne}}$$

Правила исключения дизъюнкции

$$\textcircled{1} \quad o\mathcal{F} = \mathcal{F} + \vee_e.$$

Правила исключения дизъюнкции

- ① $o\mathcal{F} = \mathcal{F} + \vee_e.$
- ② $no\mathcal{F} = \mathcal{F} + \vee_{ne}.$

Симуляции

Теорема 3 [Kozhemiachenko, 2018]

$nd\mathcal{F}$ и $no\mathcal{F}$ линейно симулируют друг друга.

Следствие 1

Пусть существует $o\mathcal{F}$ -доказательство A , содержащее m символов and k шагов. Тогда существует $\mathcal{F}$ -доказательство A , содержащее $O(m \cdot k \log k)$ символов.

Симуляции

Теорема 3 [Kozhemiachenko, 2018]

$nd\mathcal{F}$ и $no\mathcal{F}$ линейно симулируют друг друга.

Следствие 1

Пусть существует $o\mathcal{F}$ -доказательство A , содержащее m символов and k шагов. Тогда существует $\mathcal{F}$ -доказательство A , содержащее $O(m \cdot k \log k)$ символов.

Симуляции

Теорема 4 [Kozhemiachenko, 2018]

$d\mathcal{F}$ и $o\mathcal{F}$ линейно симулируют друг друга.

Следствие 2

Пусть существует $no\mathcal{F}$ -доказательство A , содержащее m символов and k шагов. Тогда существует $\mathcal{F}$ -доказательство A , содержащее $O(m \cdot k \cdot \alpha(k))$ символов.

Исчисления

HLuk [Avron, 1991]

$A \supset (B \supset A), (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)),$
 $((A \supset B) \supset B) \supset ((B \supset A) \supset A),$
 $((((A \supset B) \supset A) \supset A) \supset (B \supset C)) \supset (B \supset C), (A \wedge B) \supset A,$
 $(A \wedge B) \supset B, (A \supset B) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset (B \wedge C))),$
 $A \supset (A \vee B), B \supset (A \vee B),$
 $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)), (\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)$

$$\frac{A \quad A \supset B}{B}$$

Исчисления

$\mathbf{HLuk}$ [Avron, 1991]

$A \supset (B \supset A), (A \supset B) \supset ((B \supset C) \supset (A \supset C)),$
 $((A \supset B) \supset B) \supset ((B \supset A) \supset A),$
 $((((A \supset B) \supset A) \supset A) \supset (B \supset C)) \supset (B \supset C), (A \wedge B) \supset A,$
 $(A \wedge B) \supset B, (A \supset B) \supset ((A \supset C) \supset (A \supset (B \wedge C))),$
 $A \supset (A \vee B), B \supset (A \vee B),$
 $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset ((A \vee B) \supset C)), (\neg B \supset \neg A) \supset (A \supset B)$

$$\frac{A \quad A \supset B}{B}$$

$\mathbf{L}_{3\vee}$ и $\mathbf{L}_{3n\vee}$

$\mathbf{L}_{3\vee} = \mathbf{HLuk} + \vee_e.$

$\mathbf{L}_{3n\vee} = \mathbf{HLuk} + \vee_{ne}.$

Симуляции

Теорема 5 [Kozhemiachenko, 2018]

Если в L_{3_V} -доказательстве D n шагов, то существует $\mathsf{H}\mathsf{L}_{uk}$ -доказательство D за $O(n^2 \log n)$ шагов.

Симуляции

Теорема 5 [Kozhemiachenko, 2018]

Если в $\mathsf{L}_{3\vee}$ -доказательстве D n шагов, то существует HLuk -доказательство D за $O(n^2 \log n)$ шагов.

Следствие 3

Если существует $\mathsf{L}_{3\vee}$ -доказательство A , содержащее m символов и k шагов, то существует HLuk -доказательство A , содержащее $O(m \cdot k^2 \log k)$ символов.

Симуляции

Теорема 6 [Kozhemiachenko, 2018]

Если в $\mathsf{L}_{3_{n\vee}}$ -доказательстве A n шагов, то существует HLuk -доказательство A за $O(n \cdot \alpha(n))$ шагов, где α — обратная функция Аккерманна (как в [Bonet and Buss, 1993] и [Bonet and Buss, 1995]).

Симуляции

Теорема 6 [Kozhemiachenko, 2018]

Если в $\mathsf{L}_{3_{n\vee}}$ -доказательстве A n шагов, то существует HLuk -доказательство A за $O(n \cdot \alpha(n))$ шагов, где α — обратная функция Аккерманна (как в [Bonet and Buss, 1993] и [Bonet and Buss, 1995]).

Следствие 4

Если существует $\mathsf{L}_{3_{n\vee}}$ -доказательство A , содержащее m символов и k шагов, то существует HLuk -доказательство A , содержащее $O(m \cdot k \cdot \alpha(k))$ символов.

Симуляции

Теорема 8 [Kozhemiachenko, 2018]

Для любого конечного k если существует $\mathsf{L}_{k\vee}$ -доказательство D за n шагов, то существует $\mathsf{H}_k\mathsf{L}_{uk}$ -доказательство D за $O(n^2 \log n)$ шагов.

Симуляции

Теорема 8 [Kozhemiachenko, 2018]

Для любого конечного k если существует $\mathsf{L}_{k\vee}$ -доказательство D за n шагов, то существует $\mathsf{H}_k\mathsf{L}_{\text{uk}}$ -доказательство D за $O(n^2 \log n)$ шагов.

Следствие 5

Для любого конечного k если существует $\mathsf{L}_{k\vee}$ -доказательство A , содержащее t символов и n шагов, то существует $\mathsf{H}\mathsf{L}_{\text{uk}}$ -доказательство A , содержащее $O(t \cdot n^2 \log n)$ символов.

Симуляции

Теорема 9 [Kozhemiachenko, 2018]

Если существует $\mathsf{L}_{k_{n\vee}}$ -доказательство A за n шагов, то существует $\mathsf{H}_k\mathsf{L}_{uk}$ -доказательство A за $O(n \cdot \alpha(n))$ шагов.

Следствие 6

Для любого конечного k если существует $\mathsf{L}_{k_{n\vee}}$ -доказательство A , содержащее m символов и n шагов, то существует $\mathsf{H}\mathsf{L}_{uk}$ -доказательство A , содержащее $O(m \cdot n \cdot \alpha(n))$ символов.

Назовем гиперсеквенцией

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \mid \dots \mid \Gamma_n \Rightarrow \Delta_n$$

где Γ_i и Δ_i — конечные (или пустые) последовательности формул.

$$\mathbf{Ax} : A \Rightarrow A \quad \mathbf{EW} : \frac{\mathcal{G}}{\mathcal{G} \mid \mathcal{H}}$$

$$\mathbf{EC} : \frac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta \mid \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta}; \quad \mathbf{EP} : \frac{\mathcal{G} \mid \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \mid \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 \mid \mathcal{H}}{\mathcal{G} \mid \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2 \mid \Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1 \mid \mathcal{H}}$$

$$\mathbf{IW} : \frac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, A}, \quad \frac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathcal{G} \mid A, \Gamma \Rightarrow \Delta};$$

$$\mathbf{IP} : \frac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta_1, A, B, \Delta_2}{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta_1, B, A, \Delta_2}, \quad \frac{\mathcal{G} \mid \Gamma_1, A, B, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}{\mathcal{G} \mid \Gamma_1, B, A, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta}$$

$$\mathbf{M} : \frac{\mathcal{G} \mid \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 \quad \mathcal{G} \mid \Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_3 \Rightarrow \Delta'_1, \Delta'_2, \Delta'_3}{\mathcal{G} \mid \Gamma_1, \Gamma'_1 \Rightarrow \Delta_1, \Delta'_1 \mid \Gamma_2, \Gamma'_2 \Rightarrow \Delta_2, \Delta'_2 \mid \Gamma_3, \Gamma'_3 \Rightarrow \Delta_3, \Delta'_3}$$

$$\begin{array}{c}
 L\wedge \frac{\mathcal{G} \mid A_i, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathcal{G} \mid A_0 \wedge A_1, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad R\wedge \frac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, A \wedge B} \\
 \\
 L\vee \frac{\mathcal{G} \mid A, \Gamma \Rightarrow \Delta \quad \mathcal{G} \mid B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathcal{G} \mid A \vee B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad R\vee \frac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, A_i}{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, A_0 \vee A_1} \\
 \\
 L\supset \frac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \mathcal{G} \mid B, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathcal{G} \mid A \supset B, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad R\supset \frac{\mathcal{G} \mid A, \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, A \supset B} \\
 \\
 L\neg \frac{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\mathcal{G} \mid \neg A, \Gamma \Rightarrow \Delta} \quad R\neg \frac{\mathcal{G} \mid A, \Gamma \Rightarrow \Delta}{\mathcal{G} \mid \Gamma \Rightarrow \Delta, \neg A}
 \end{array}$$

Симуляция

Теорема 7 [Kozhemiachenko, 2018]

Пусть существует $\mathbf{GLuk}$ -доказательство

$$A_1^1, \dots, A_{k_1}^1 \Rightarrow B_1^1, \dots, B_{l_1}^1 \mid \dots \mid A_1^m, \dots, A_{k_m}^m \Rightarrow B_1^m, \dots, B_{l_m}^m$$

длины n за N шагов. Тогда существует $\mathbf{HLuk}$ -доказательство

$$\bigvee_{i=1}^m A_1^i \supset (\dots \supset (A_{k_i}^i \supset (\neg B_1^i \supset (\dots (\neg B_{l_i-1}^i \supset B_{l_i}^i))))))$$

длины $O(n^3)$.

Открытые вопросы

- 1 Что случится, если импликация будет нетранзитивной?

Открытые вопросы

- 1 Что случится, если импликация будет нетранзитивной?
- 2 Что случится в логиках, где нет формулы от A и B , которая истинна, е.т.е. из A следует B ?

Спасибо за внимание!

-  Avron, A. (1991).
Natural 3-valued logics — characterization and proof theory.
The Journal of Symbolic Logic, 56(1):276–294.
-  Bonet, M. and Buss, S. (1993).
The deduction rule and linear and near-linear proof
simulations.
The Journal of Symbolic Logic, 58(2):688–709.
-  Bonet, M. and Buss, S. (1995).
The serial transitive closure problem for trees.
SIAM Journal on Computing, 24(1):109–122.
-  Cook, S. and Reckhow, R. (1979).
The relative efficiency of propositional proof systems.
The Journal of Symbolic Logic, 44(1):36–50.
-  Hähnle, R. (2003).

Complexity of many-valued logics.

In Fitting, M. and Orłowska, E., editors, *Beyond Two: Theory and Applications of Multiple-Valued Logic*, pages 211–233, Heidelberg. Springer.



Hrubeš, P. (2007).

A lower bound for intuitionistic logic.

Annals of Pure and Applied Logic, 146(1):72–90.



Kozhemiachenko, D. (2018).

Generalisation of proof simulation procedures for Frege systems by M.L. Bonet and S.R. Buss.

Journal of Applied Non-Classical Logics.



Metcalf, G., Olivetti, N., and Gabbay, D. (2008).

Proof Theory for Fuzzy Logics.

Applied Logic Series 36. Springer.