# Структура и представления треугольной матричной группы

## Доклад посвящается встрече с моими друзьями во время моего визита в Москву весной 2019 года

А.А.Кириллов (старший)

UPenn, ИППИ РАН, ВШЭ,НМУ

Семинар "Глобус" и ММО,
НМУ, 18 апреля 2019 г

# План доклада

I. Метод орбит.

II. О треугольной группе $U_n(K)$.

III. Метод орбит для треугольных матричных групп.

IV. Модельное представление $U_n(K)$.

Метод орбит в теории представлений связывает два множества:

1. $\widehat{G}$ - классы эквивалентности унитарных неприводимых представлений группы Ли $G$ с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$

и

2. $\mathcal{O}^*(G)$ - орбиты группы $G$ в пространстве, двойственном к $\mathfrak{g}$.

Природа этой связи такова же, как у связи между квантовой и классической механикой. Поэтому метод орбит работает тем лучше, чем ближе группа Ли к $G$ своей алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Идеальным в этом смысле является класс нильпотентных групп Ли, где экспоненциальное отображение $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ - биекция.

Цель моих исследований последних лет - использовать метод орбит для изучения представлений группы треугольных матриц над любым, в том числе конечным, полем.

# Основные понятия и обозначения

- $\mathfrak{g}_n(K)$ - алгебра Ли верхне-треугольных матриц $A$ порядка $n$ с нулями по главной диагонали над полем $K$
- $U_n = 1 + \mathfrak{g}_n$ - алгебраическая группа верхне-треугольных матриц $g$ порядка $n$; $U_n(K)$ - группа её точек над полем $K$
- $\mathfrak{g}_n^*$ - двойственное к $\mathfrak{g}_n$ линейное пространство, реализованное нижне-треугольными матрицами $X$ порядка $n$; двойственность даётся формулой $\langle X, A\rangle = \mathrm{tr}(XA)$
- $\mathrm{Ad}(g)\colon A \mapsto gAg^{-1}$ - присоединенное представление $U_n$ в $\mathfrak{g}_n$
- $K(g)\colon X \mapsto \left(gX\mathfrak{g}^{-1}\right)_{\text{ниж}}$ - коприсоединённое представление $U_n(K)$ в $\mathfrak{g}_n^*(K)$
- $\mathcal{M}_n$ - аффинное алгебраическое подмногообразие в $\mathfrak{g}_n$, заданное уравнением $A^2 = 0$
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{F}_q$ - вещественное, комплексное и конечное поле (из $q = p^k$ элементов)
- $\mathfrak{g}_\lambda$ - множество матриц из $\mathfrak{g}_n(\mathbb{F}_q)$ Жорданова типа $\lambda \in \mathcal{P}$

# Структура $U_n(K)$

Для полей $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ группа $U_n(K)$ является группой Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_n(K)$ и двойственным к ней пространством $\mathfrak{g}_n^*(K)$. Метод орбит устанавливает биекцию между множеством $\widehat{U_n(K)}$ классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений группы и множеством $\mathcal{O}_n^*(K)$ её орбит в $\mathfrak{g}_n^*$.

В случае $K = \mathbb{F}_q$, группа конечна, но, как алгебраическая группа над $K$, она всё равно имеет алгебру Ли $\mathfrak{g}_n(K)$ и двойственное к ней пространство $\mathfrak{g}_n^*(K)$. Поэтому все ингредиенты метода орбит определены и в этом случае.

Более того, можно показать, что число $|\widehat{U_n(K)}|$ равно числу $|\mathcal{O}_n^*(K)|$ коприсоединённых орбит. Однако, явная конструкция представлений и их характеров пока неизвестны.

# Структура $U_n(K)$ (продолжение)

Классы сопряжённых элементов для $U_n(\mathbb{F}_q)$ соответствуют присоединённым орбитам в $\mathfrak{g}_n(\mathbb{F}_q)$: $[1+A] \leftrightarrow O(A)$. Описание этих классов, и даже асимптотика их количества пока неизвестны. Однако, есть более грубая классификация элементов группы по их Жордановым типам. Справедлива

*Теорема Спрингера*

*1. Множество $\mathfrak{g}_\lambda$ матриц данного типа $\lambda = (\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k) \in \mathcal{P}_n$ является квази-аффинным алгебраическим многообразием в аффинном пространстве $\mathfrak{g}_n \simeq \mathbb{A}^{\binom{n}{2}}$ над $\mathbb{F}_q$.*
*2. Число точек в $\mathfrak{g}_\lambda$ даётся многочленом $P_\lambda(q)$ со старшим членом $d(\lambda)q^{n(\lambda)}$, где - $d(\lambda)$ – число компонент многообразия $\mathfrak{g}_\lambda$, а $n(\lambda)$ - их размерность (одна и та же для всех компонент).*
*3. Число $d(\lambda)$ совпадает с размерностью неприводимого представления $\pi_\lambda$ группы $S_n$, отвечающего $\lambda$, а число $n(\lambda)$ даётся формулой $n(\lambda) = \sum_{i<j} \lambda_i^* \lambda_j^*$, где $\lambda^*$ - двойственное к $\lambda$ разбиение числа $n = |\lambda|$ в сумму длин столбцов $D_\lambda$.*

# Схема вывода теоремы Спрингера

Для матрицы $A \in \mathfrak{g}_n$ и вектора-столбца $a \in K^n$ положим $\mathcal{A}(A, a) := \begin{pmatrix} A & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{g}_{n+1}$. Пусть $X(\lambda, \Lambda)$ - множество таких пар $(A, a)$, для которых $A$ имеет Жорданов тип $\lambda$, а $\mathcal{A}(A, a)$ имеет тип $\Lambda$. Оказывается, что $X(\lambda, \Lambda)$ непусто, только если диаграмма $D_\Lambda$ получается из $D_\lambda$ добавлением одной клетки.

Чтобы найти формулу для числа точек в $X(\lambda, \Lambda)$, разложим $D_\lambda$ на $m$ "кирпичей" длиной $\mu_i$ и высотой $h_i$, $1 \leq i \leq m$, объединив все строки одной длины в один кирпич.

Другими словами, перепишем $\lambda$ в форме $\mu_1^{h_1} \cdots \mu_m^{h_m}$, где $\mu_1 > \cdots > \mu_m > 0$ и все $h_i \geq 1$. Положим также

$$\mu_{m+1} = h_0 = 0, \quad h_{m+1} = \infty, \quad H_k = \sum_{i \leq k} h_i.$$

Пусть $\Lambda^{(i)}$, $1 \leq i \leq m+1$ - диаграмма, получаемая из $D_\lambda$ добавлением одной клетки к верхней строке $i$-го кирпича.

# Продолжение вывода теоремы и её следствия

Справедливо равенство

$$|X(\lambda, \Lambda)| = \begin{cases} q^{n-H_{i-1}} - q^{n-H_i}, & \text{если } \Lambda = \Lambda^{(i)} \\ 0 & \text{если } \Lambda \text{ не совпадает ни с одним } \Lambda^{(i)} \end{cases} \tag{1}$$

Из (1) вытекает рекуррентная формула для многочленов $P_\lambda$. Пусть $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(k)}$ - те разбиения $\lambda$, для которых диаграмма $D_\lambda$ получается из $D_\Lambda$ отбрасыванием одной клетки. Тогда

$$P_\Lambda(q) = \sum_{i=1}^{k} |X(\lambda^{(i)}, \Lambda)| P_{\lambda^{(i)}}(q) \tag{2}$$

Из рекурсии (2) мы заключаем индукцией по $n = |\lambda|$, что все выражения $P_\lambda(q)$ действительно являются многочленами от $q$. Более того, они имеют вид

$$P_\lambda(q) = q^a (q-1)^b R_\lambda(q),$$

где степени $a$ и $b$ зависят от разбиения $\lambda$, а $R_\lambda$ - многочлен от $q$ с целыми неотрицательными коэффициентами.

# Классы сопряженности в $U_n$ и многочлены $P_\lambda$

Ясно, что все матрицы из данного класса $C \in Cl(U_n)$ имеют один и тот же тип $\lambda$. Кроме того, число элементов в классе $C \ni g$ равно $q^d$, где $d$ - коразмерность в $\mathfrak{g}_n$ пространства $Z_{\mathfrak{g}_n}(g)$ матриц, перестановочных с $g$ в $\mathfrak{g}_n$. Однако число классов, лежащих в $\mathfrak{g}_\lambda$, найти не просто. Несколько лучше обстоит дело в случае, когда элемент $g$ - инволюция, т.е. $g^2 = e$. Именно этот случай возникает при рассмотрении модельного представления.

# Модельное представление $G$

Это - такое представление группы, которое содержит каждое неприводимое представление $G$ с кратностью 1. Часто такое представление возникает в пространстве сечений комплексного линейного расслоения $L$ над некоторым $G$-множеством $M$.
В случае треугольной группы $U_n(K)$ я предлагаю в качестве рассмотреть множество $\mathcal{M}_n(K)$ всех $K$–точек аффинного подмногообразия в $\mathfrak{g}_n$, заданного уравнением $A^2 = 0$.

Мотивировка: для чётного $q$ элементы $1 + A$, $A \in \mathcal{M}_n(K)$, являются инволюциями в нашей группе. В то же время для групп, у которых каждое неприводимое представление вещественно, сумма размерностей неприводимых представлений равна числу инволюций в группе. Поэтому напрашивается реализация модели в пространстве функций $\mathrm{Fun}\left(\mathcal{M}_n(K)\right)$ или в его деформации - пространстве сечений.

# Трюк с характеристикой

Предложенная выше мотивировка оправдана только в случае полей характеристики 2. Но если конечный результат выражается в виде формулы, включающей только полиномиальные функции от $q$, то мы можем использовать простой, но очень важный факт: множество $2^{\mathbb{N}}$ степеней двойки плотно в топологии Зариского. Это значит, что если два полинома принимают одинаковые значения на всех степенях двойки, то они равны.

# Многочлены $A_n$, $B_n$, $C_n$, ...

Вычисления показывают, что суммы многочленов $P_\lambda$ по всем диаграммам $\lambda$, имеющим $\leq k$ столбцов, по-видимому, на самом деле являются "малочленами".

В случае $k = 1$ для них имеется явная и довольно практичная формула в терминах так называемого **треугольника Каталана**. Этот треугольник составлен из чисел $c(n, s)$, где $n \geq 1$, а $s$ пробегает значения $-n$, $-n + 2$, ..., $n - 2$, $n$. Числа $c(n, s)$ удовлетворяют рекурсии

$$c(n, s) = c(n-1, s-1) + c(n-1, s+1) \quad \text{(как в треугольнике Паскаля)}$$

и начальным условиям $c(1, -1) = -1,\ c(1, 1) = 1,\ c(1, k) = 0$ для $k \neq \pm 1$.

# $A_n$, $B_n$, $C_n$, ..., продолжение

Начало треугольника выглядит так:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & -1 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & -1 & & 0 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & -1 & & -1 & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & -1 & & -2 & & 0 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & -1 & & -3 & & -2 & & 2 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & -1 & & 4 & & -5 & & 0 & & 5 & & 4 & & 1 & & \\
 & -1 & & -5 & & -9 & & -5 & & 5 & & 9 & & 5 & & 1 & \\
-1 & & -6 & & 14 & & -14 & & 0 & & 14 & & 14 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

Здесь обведены кружком числа, служащие коэффициентами многочленов $A_n$. Формула, о которой говорилось выше, имеет следующий вид.

## Theorem

$$A_n(q) := \Sigma_{k+2m=n} P_{1^k 2^m}(q) = \Sigma_s c(n+1, s) q^{\frac{n^2}{4} + \frac{1-s^2}{12}}, \qquad (3)$$

*where the sum is taken over all integers* $s \in [-n-1,\ n+1]$, *which satisfy* $s \equiv n+1 \mod 2$; $s \equiv (-1)^n \mod 3$.

Таблица многочленов $A_n(q)$.

$$A_0 = 1, \qquad A_3 = 2q^2 - q,$$
$$A_1 = 1, \qquad A_4 = 2q^4 - q^2,$$
$$A_2 = q, \qquad A_5 = 5q^6 - 4q^5,$$
$$A_6 = 5q^9 - 5q^7 + q^5,$$
$$A_7 = 14q^{12} - 14q^{11} + q^7,$$
$$A_8 = 14q^{16} - 20q^{14} + 7q^{12},$$
$$A_9 = 42q^{20} - 48q^{19} + 8q^{15} - q^{12},$$
$$A_{10} = 42q^{25} - 75q^{23} + 35q^{21} - q^{15},$$
$$A_{11} = 132q^{30} - 165q^{29} + 44q^{25} - 10q^{22}$$
$$A_{12} = 132q^{36} - 275q^{34} + 154q^{32} - 11q^{26} + q^{22}$$
$$A_{13} = 429q^{42} - 572q^{41} + 208q^{37} - 65q^{34} + q^{26}$$
$$A_{14} = 429q^{49} - 1001q^{47} + 637q^{45} - 77q^{39} + 13q^{35}$$
$$A_{15} = 1430q^{56} - 2002q^{55} + 910q^{51} - 350q^{48} + 14q^{40} - q^{35}$$
$$A_{16} = 1430q^{64} - 3640q^{62} + 2548q^{60} - 440q^{54} + 104q^{50} - q^{40}$$
$$A_{17} = 4862q^{72} - 7072q^{29} + 3808q^{67} - 1700q^{64} + 119q^{56} - 16q^{51}$$
$$A_{18} = 4862q^{81} - \qquad \dots \qquad + q^{51}.$$

Мне удалось сосчитать аналогичные суммы
$B_n := \Sigma_{k+2l+3m=n} P_{1^k 2^l 3^m}$ и $C_n := \Sigma_{k+2l+3m+4p=n} P_{1^k 2^l 3^m 4^p}$, но только для $n \leq 7$. Вот результат:

$$\begin{array}{cc}
B_0 = 1 & C_0 = 1 \\
B_1 = 1, & C_1 = 1 \\
B_2 = q, & C_2 = q \\
B_3 = q^3, & C_3 = q^3 \\
B_4 = 3q^5 - 3q^4 + q^3, & C_4 = q^6 \\
B_5 = 5q^8 - 5q^7 + q^5, & C_5 = 4q^9 - 6q^8 + 4q^7 - q^6 \\
B_6 = 5q^{12} - 9q^{10} + 5q^9, & C_6 = 9q^{13} - 16q^{12} + 9q^{11} - q^9 \\
B_7 = 21q^{16} - 35q^{15} + 15q^{14}, & C_7 = 14q^{18} - 21q^{17} + 14q^{16} - 6q^{14}
\end{array}$$

Очевидно, эти многочлены во многом похожи на многочлены $A_n$ и для них, весьма вероятно, тоже есть общая формула.

# Большие $B_n$-орбиты в $\mathcal{M}_n$

Рассмотрим действие на $\mathcal{M}_n(K)$ борелевской группы $B_n(K)$ всех обратимых верхне-треугольных матриц порядка $n$. Оказывается, объединение орбит максимальной размерности (равной $\dim \mathcal{M}_n = [\frac{n^2}{4}]$) образует плотное подмножество в многообразии $\mathcal{M}_n(K)$. Для классификации этих орбит удобно использовать комбинаторное понятие ладейного размещения $P = \{(i_1, j_1), \ldots, (i_k, j_k)\}$ на треугольной диаграмме Юнга $D_{n-1,n-2,\ldots,1}$, которое, в свою очередь, связано с инволюциями в симметрической группе $S_n$.

$B_n$-орбиты максимальной размерности соответствуют инволюциям с минимальным числом (0 или 1) неподвижных точек. Графически, такое размещение изображается набором "домиков" над точками множества $X_n = [1, 2, \ldots, n]$, которые не пересекаются и покрывают все точки, кроме, может быть, одной. Для $n = 2k$ или $2k - 1$ число таких наборов равно $k$-ому числу Каталана $C_k = \frac{1}{2k+1}\binom{2k}{k}$.

# Линейные расслоения над $B_n$-орбитами

Такие расслоения задаются одномерным представлением стабилизатора точки $A_P = \sum_{s=1}^{k} E_{i_s, j_s}$. Поскольку матрицы, входящие в размещение $P$, перестановочны, структуру стабилизатора и его характеров можно явно описать.
Для малых $n$, имея список всех неприводимых представлений $U_n(K)$ и список возможных линейных расслоений над над $B_n$-орбитами (которые распадаются на $U_n$-орбиты), можно действительно построить "руками" искомую модель.
Эта работа напоминает упаковку множества вещей разных размеров в несколько данных для этого чемоданов. Я надеюсь, что после достаточного числа экспериментов, оптимальный порядок укладки будет найден.

# Препятствия и надежды

К сожалению, простейшая гипотеза о структуре неприводимых представлений $U_n(K)$ и их характеров, основанная на результатах в характеристике 0, неверна. Уже в случае $q = 2$ начиная с $n = 13$ появляются неприводимые представления $U_n(\mathbb{F}_2)$ комплексного типа, а с $n = 25$ - неприводимые представления кватернионного типа. Где их место в нашей модели и как связаны характеры экзотических представлений с коприсоединёнными орбитами - главный открытый вопрос.

Я надеюсь, что мои контакты с московскими студентами и коллегами в ИППИ, ВШЭ, НМУ и Сколтехе приведут к полному решению проблемы представлений треугольной группы.