

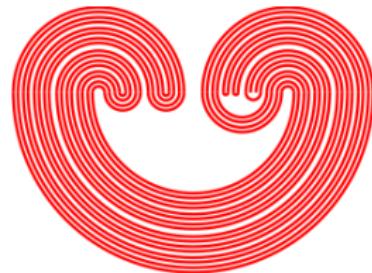
Меандры, узлы и пространственные графы

А. В. Малютин, Ю. С. Белоусов

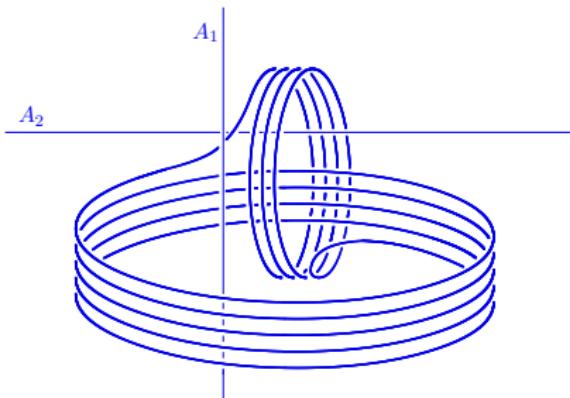
ПОМИ РАН, СПбГУ, НИУ ВШЭ

Декабрьские чтения в Томске
11–16 декабря 2018

- Меандры



- Узлы



Определение. Меандры

Меандром называется простая замкнутая кривая на плоскости \mathbb{R}^2 , трансверсально пересекающая прямую $\mathbb{R}^1 = \{(x, y) : y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.

Определение. Эквивалентные меандры

Меандры M и N эквивалентны, если существует изотопия пары $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^1)$, переводящая M в N .

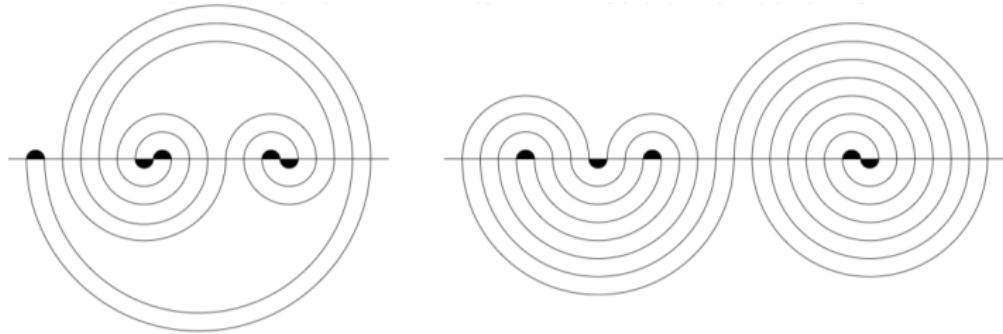


Рисунок из [V. Delecroix, É. Goujarg, P. Zograf, A. Zorich, *Enumeration of meanders and Masur–Veech volumes*. arXiv:1705.05190 (2017).]

- Шоссе, идущее с запада на восток, пересекает несколько раз реку, текущую с юго-запада также на восток.
- Занумеруем мосты в порядке их следования вдоль шоссе (с запада на восток).
- Запишем номера мостов, проплывая под ними вниз по реке.
- Будем называть перестановку *меандром*, если ее можно получить описанным образом с помощью подходящей реки.

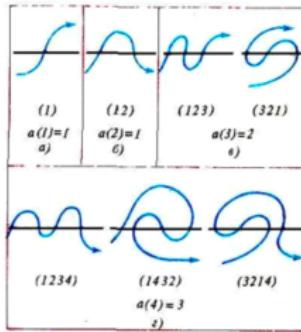
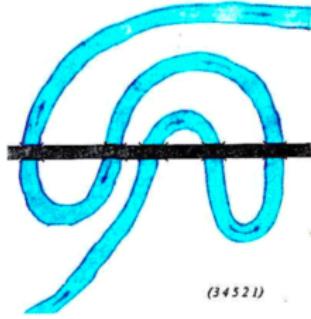


Рисунок из [В. И. Арнольд, *Меандры*. Квант 3 (1991) 11–14.]

- H. Poincaré, *Sur un théorème de géométrie*. Rend. del Circ. Mat. Palermo **33** (1912) 375–407 (Oeuvres, T.VI, 499–538).
- В. И. Арнольд, *Разветвленное накрытие $CP^2 \rightarrow S^4$, гиперболичность и проективная топология*. Сиб. мат. ж., **29**:5 (1988), 36–47.
- В. И. Арнольд, *Меандры*. Квант **3** (1991) 11–14.
- S. K. Lando, A. K. Zvonkin, *Meanders*. Selecta Math. Soviet. **11**:2 (1992) 117–144.
- S. K. Lando, A. K. Zvonkin, *Plane and projective meanders*. Theoretical Computer Science **117**:1-2 (1993) 227–241.

M_k — число (классов) меандров, пересекающих \mathbb{R}^1 ровно в $2k$ точках.

$$M_0 = 1,$$

$$M_1 = 1,$$

$$M_2 = 2,$$

$$M_3 = 8,$$

$$M_4 = 42,$$

$$M_5 = 262,$$

$$M_6 = 1828,$$

$$M_7 = 13820,$$

$$M_8 = 110954,$$

$$M_9 = 933458,$$

$$M_{10} = 8152860,$$

$$M_{11} = 73424650,$$

$$M_{12} = 678390116,$$

$$M_{13} = 6405031050,$$

$$M_{14} = 61606881612,$$

$$M_{15} = 602188541928,$$

$$M_{16} = 5969806669034,$$

$$M_{17} = 59923200729046,$$

$$M_{18} = 608188709574124,$$

$$M_{19} = 6234277838531806,$$

$$M_{20} = 64477712119584604,$$

$$M_{21} = 672265814872772972,$$

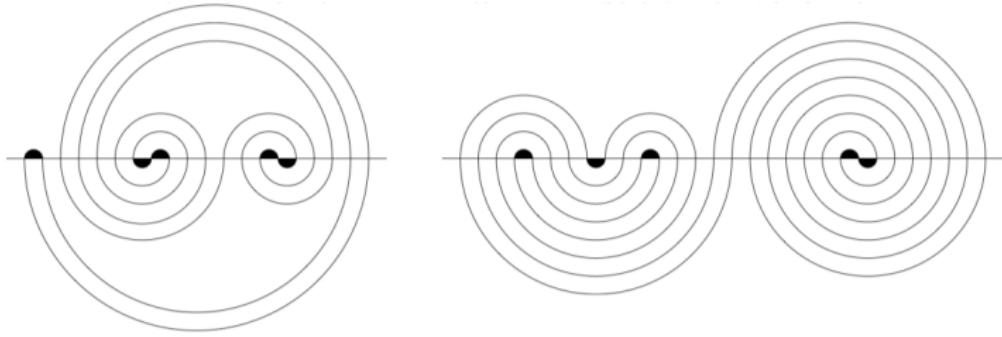
$$M_{22} = 7060941974458061392$$

M_k — число (классов) меандров, пересекающих \mathbb{R}^1 ровно в $2k$ точках.

m_p — число открытых меандров сложности p .

$$M_k = m_{2k-1}$$

V. Delecroix, É. Goujarg, P. Zograf, A. Zorich, *Enumeration of meanders and Masur–Veech volumes*. arXiv:1705.05190 (2017).



Школьная задача о меандрах

- Пусть k – натуральное число, а C_1, C_2, \dots, C_k – набор из k простых замкнутых попарно не пересекающихся кривых на плоскости \mathbb{R}^2 .
- Предположим, что каждая из кривых C_1, C_2, \dots, C_k пересекает прямую $\mathbb{R}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$ трансверсально в двух точках и что множество точек пересечения есть $\{(1, 0), (2, 0), \dots, (2k, 0)\}$:

$$(C_1 \cup \dots \cup C_k) \cap \mathbb{R}^1 = \{(1, 0), (2, 0), \dots, (2k, 0)\}.$$

- Разрежем \mathbb{R}^2 вдоль \mathbb{R}^1 , сдвинем нижнюю полуплоскость на единицу вправо и склеим.
- Доказать, что в результате набор C_1, C_2, \dots, C_k перейдет в связную кривую.

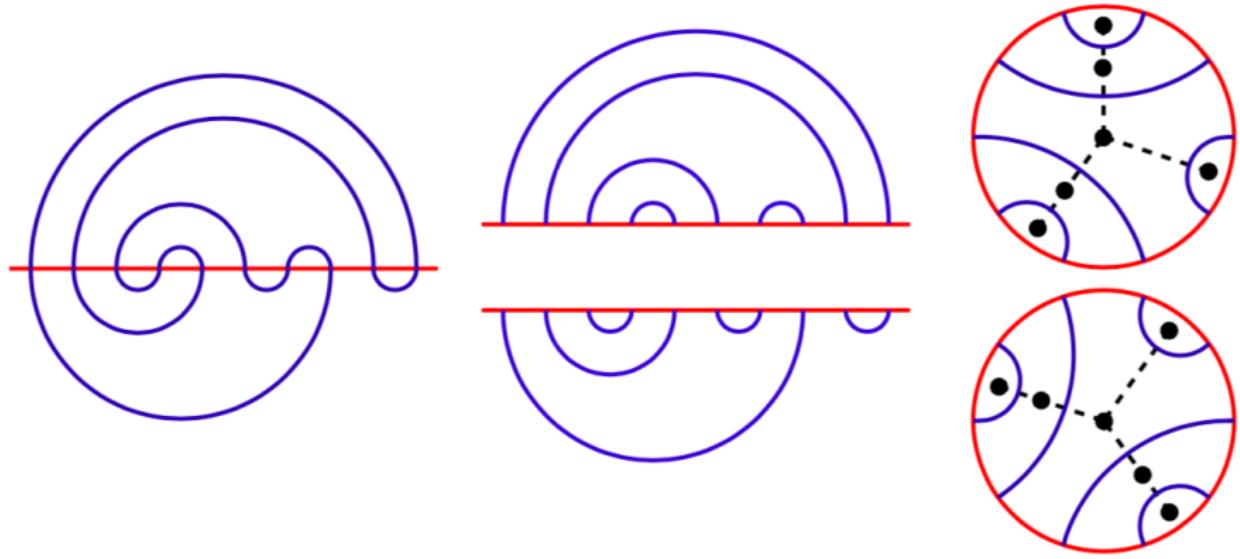


Рисунок из [V. Delecroix, É. Goujarg, P. Zograf, A. Zorich, *Enumeration of meanders and Masur–Veech volumes*. arXiv:1705.05190 (2017).]

Определения. Меандры и узлы

- Меандром называется простая замкнутая кривая на плоскости \mathbb{R}^2 , трансверсально пересекающая прямую $\mathbb{R}^1 = \{(x, y) : y = 0\} \subset \mathbb{R}^2$.
- (Ручным) узлом называется (гладкая) простая замкнутая кривая в пространстве \mathbb{R}^3 .

Определения. Эквивалентность

- Меандры M и N эквивалентны, если существует изотопия пары $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^1)$, переводящая M в N .
- Узлы K и L эквивалентны, если существует изотопия пространства \mathbb{R}^3 , переводящая K в L .

- Задача об искажении,
- Задача о перечислении,
- Связное суммирование,
- Сложность.

Определение. Искажение

Пусть γ — спрямляемая замкнутая кривая в \mathbb{R}^3 . Искажение кривой γ определяется как

$$\delta(\gamma) := \sup_{p,q \in \Gamma} \frac{d_\gamma(p,q)}{d_{\mathbb{R}^3}(p,q)},$$

где $d_{\mathbb{R}^3}$ — внутренняя метрика кривой, а $d_{\mathbb{R}^3}$ — евклидова метрика.

Вопрос Громова

Верно ли, что в каждом изотопическом классе эквивалентных узлов в \mathbb{R}^3 найдется представитель с искажением < 100 ?

M. L. Gromov, *Homotopical effects of dilatation*. J. Differential Geom. **13** (1978), 303–310.

M. L. Gromov, *Filling Riemannian manifolds*. J. Differential Geom. **18** (1983), 1–147.

J. Pardon, *On the distortion of knots on embedded surfaces*. Ann. of Math. (2) **174**:1 (2011), 637–646.

Меандры

Число мультикомпонентных меандров сложности n есть квадрат C_n^2 числа Каталана

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{2n+1} \binom{2n+1}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

Вопросы о формуле и асимптотике для числа меандров открыты.

Узлы и зацепления

Асимптотика числа A_n простых альтернированных зацеплений с заданным числом перекрестков известна (Sundberg, Thistlethwaite):

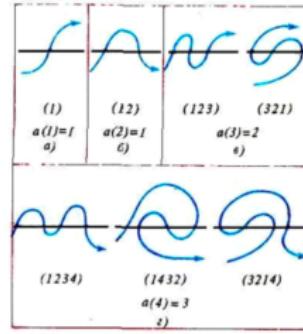
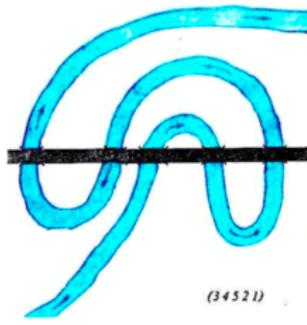
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n} = \frac{\sqrt{21001} + 101}{40} \approx 6.1479\dots$$

Вопрос об асимптотике для количества простых (альтернированных) узлов с заданным числом перекрестков открыт.

- Задача об искажении,
- Задача о перечислении,
- Связное суммирование,
- Сложность.

Определение

Назовем плоскую диаграмму узла *меандрической*, если она составлена из двух простых дуг, общие концы которых лежат на границе выпуклой оболочки диаграммы.



Теорема

У каждого узла найдется меандрическая диаграмма.

Определение

Назовем плоскую диаграмму узла *полумеандрической*, если она составлена из двух простых дуг.

Следствие

У каждого узла найдется полумеандрическая диаграмма.

Определение

Инвариант узла называется *диаграмматическим*, если он может быть определен как минимум, по всем диаграммам узла, некоторого изотопического инварианта диаграмм.

Примеры:

- Число перекрестков,
- Число мостов,
- Число Виртингера.

L. Radović, S. Jablan, *Meander knots and links*. Filomat **29**:10 (2015)
2381–2392.

Гипотеза 1

У каждого узла найдется полумеандрическая диаграмма.

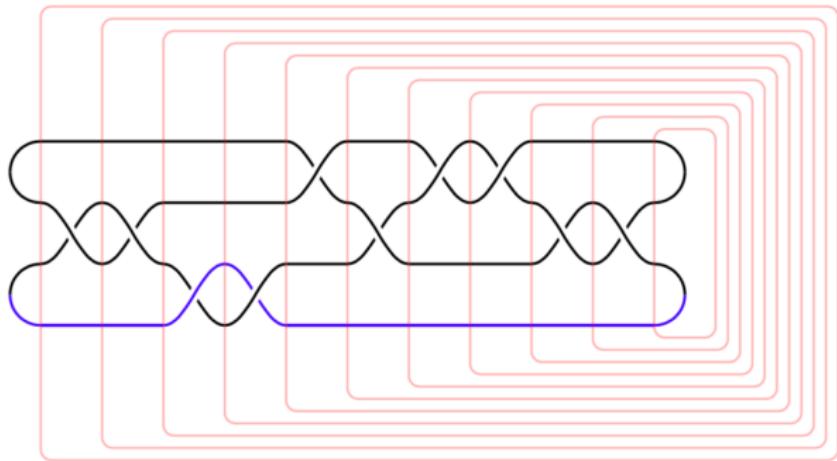
Гипотеза 2

У каждого узла найдется меандрическая диаграмма.

Гипотеза 3

У каждого рационального узла найдется среди минимальных
диаграмм найдется полумеандрическая.

Доказательство гипотезы 3



- K. F. Gauss, *Zur mathematischen Theorie der electrodynamischen Wirkungen*. Werke: Königliche Gesellschaften der Wissenschaften zu Göttingen 5:605, 1877.
- G. Hotz, *Arkadenfadendarstellung von Knoten und eine neue Darstellung der Knotengruppe*. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 24 (1960) 132–148.
- Г. С. Маканин, *Об одном аналоге теоремы Александера–Маркова*. Изв. АН СССР. Сер. матем. 53:1 (1989) 200–210.
- J. A. Kneissler, *Woven braids and their closures*. J. Knot Theory Ramifications 8:2 (1999) 201–214.
- R. Shinjo, *An extension of Lee–Jin’s result to regular diagrams of spatial graphs*. [In Japanese.] Gakujutsu kenkyu. Mathematics 53 (2005), 67–71.
https://ci.nii.ac.jp/els/contentscini_20180718233451.pdf?id=ART000732964
- M. Ozawa, *Edge number of knots and links*. arXiv:0705.4348 (2007).

- C. Adams, R. Shinjo, K. Tanaka, *Complementary regions of knot and link diagrams*. Ann. Comb. **15**:4 (2011) 549–563.
- S. Kinoshita, *On θ_n -curves in \mathbb{R}^3 and their constituent knots*. In *Topology and Computer Science*, 211–216. Tokyo: Kinokuniya, 1987.
- J. H. Lee, G. T. Jin, *Link diagrams realizing prescribed subdiagram partitions*. Kobe J. Math. **18**:2 (2001) 199–202.
- N. Owad, *Straight knots*. arXiv:1801.10428 (2018).
- C. Even-Zohar, J. Hass, N. Linial, T. Nowik, *Universal knot diagrams*. arXiv:1804.09860 (2018).

Под *графом* мы понимаем одномерный клеточный комплекс: его 0-клетки называются *вершинами*, а 1-клетки — *ребрами*.

Пространственным графом называется подмножество в \mathbb{R}^3 , которое

- (i) объемлемо изотопно объединению конечного числа отрезков и
- (ii) снабжено структурой конечного графа.

Два пространственных графа *эквивалентны*, если они связаны объемлемой изотопией, сохраняющей структуру графа.

Петлей (пространственного) в графе называется его ребро, замыкание которого является окружностью.

Заузленной петлей пространственного графа называется его ребро, замыкание которого является нетривиальным узлом.

Определение

Диаграмма D пространственного графа G называется *полумеандрической*, если ребра графа, не являющиеся заузленными петлями, представлены на ней простыми дугами, а каждая заузленная петля представлена объединением двух простых дуг.

Определение

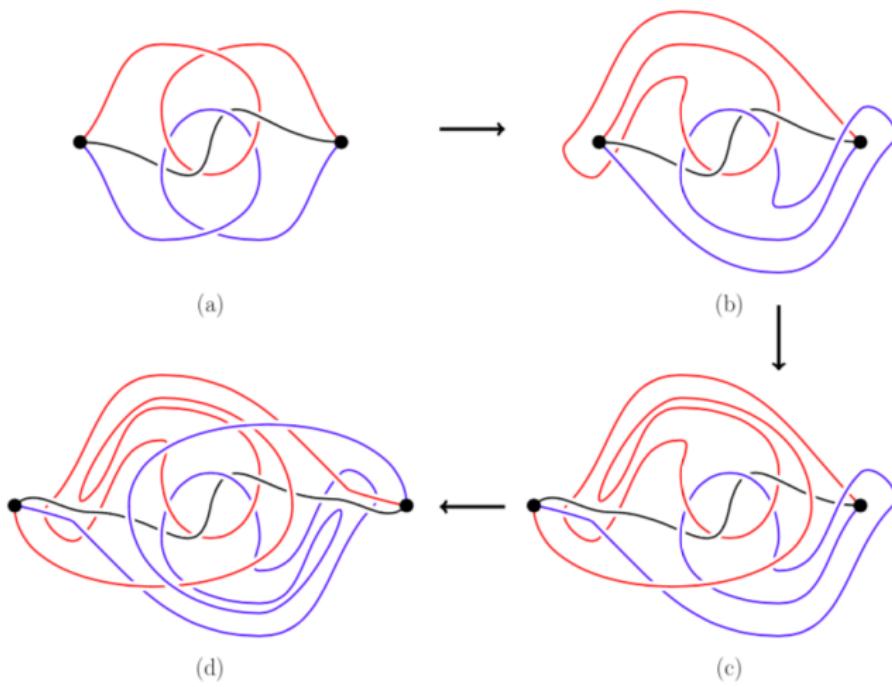
Полумеандрическая диаграмма D называется *меандрической*, если

- (i) все вершины графа представлены точками на границе выпуклой оболочки диаграммы,
- (ii) проекция каждой заузленной петли разбита на две простых дуги некоторой точкой, лежащей на границе выпуклой оболочки $\text{conv}(D)$.

Теорема

У каждого пространственного графа найдется меандрическая диаграмма.

Обобщение на случай пространственных графов



Следствие

Если ни одно ребро пространственного графа G не является заузленной петлей, то G объемлемо изотопен пространственному графу, все ребра которого являются плоскими, а все вершины лежат на границе его выпуклой оболочки.

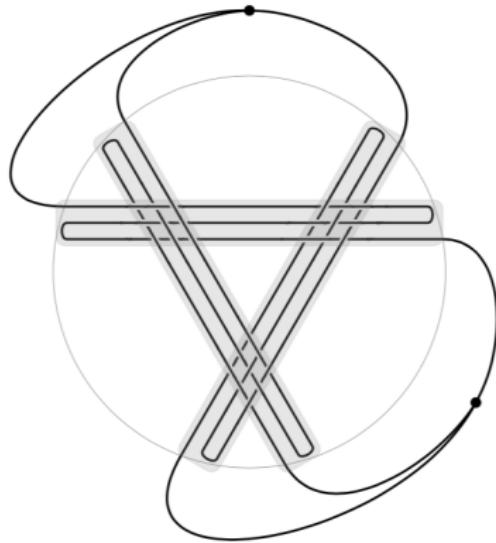
Следствие

Каждый узел в \mathbb{R}^3 объемлемо изотопен узлу, составленному из двух плоских дуг, чьи общие концевые точки лежат на границе его выпуклой оболочки узла.

Обобщение идеи из

S. Matsuzaki, *Plane number of links*. J. Knot Theory Ramifications **24**:7 (2015) 1550039.

J. H. Lee, G. T. Jin, *Link diagrams realizing prescribed subdiagram partitions*. Kobe J. Math. **18**:2 (2001) 199–202.



Обобщение идеи из C. Even-Zohar, J. Hass, N. Linial, T. Nowik,
Universal knot diagrams. arXiv:1804.09860 (2018).

СПАСИБО