3. Dunkl C. F. Hankel transforms associated to finite reflections groups // Contemp. Math. 1992. Vol. 138. P. 123–138.

4. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2003. Vol. 1817. P. 93–135.

5. Thangavelu S., Xu Y. Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform // J. Comput. Appl. Math. 2007. Vol. 199. P. 181–195.

6. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive L_p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // Constr. Approx. 2018. P. 1–51.
doi.org/10.1007/s00365-018-9435-5

7. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Riesz potential and maximal function for Dunkl transform. Preprint CRM, Barcelona, 2018. № 1238. P. 1–28.

УДК 511.9

Кое-что о Мишеле Деза

В. П. Гришухин (Россия, Москва)
Центральный экономико-математический институт РАН
e-mail: vgrishukhin@mail.ru

Something about Michel Deza

V. P. Grishukhin (Russia, Moscow)
Central economics and mathematics institute RAS
e-mail: vgrishukhin@mail.ru

М. Деза окончил МГУ, кажется, в 1963 году и поступил работать в ЦЭМИ, где я работаю сейчас. Но я поступил в ЦЭМИ в 1968 году. Еще будучи студентом МГУ Михаил Ефимович Тылкин поменял свою фамилию на Деза. Он очень рано женился, и вскоре у него родилась дочь, которая, по моему, до сих пор живет в Москве.

В 70-х годах Деза развелся, женился на француженке и вскоре эмигрировал во Францию, и стал Мишелем Мари Деза. Там у него родились два сына. Один из них, Антуан Деза, стал математиком. У меня с ним и Мишелем есть совместная статья [8]. В те времена эмигрантам был запрещен въезд в СССР. И только в начале перестройки, в 1989г., Деза впервые смог вернуться в Москву. В этот год он выступил на семинаре А. Кельманса по дискретной математики в институте проблем управления (ИПУ). Деза рассказал о проблеме конуса разрезных метрик (кратко, разрезного конуса).

В своей, еще студенческой работе [1], М. Деза поставил вопрос о нахождении условий, при которых метрика на конечном множестве вложима в единичный куб. Он привел некоторые неравенства, которые необходимы для вложимости. Он назвал их *неравенствами f-угольника*, так как они обобщают неравенства треугольника, которые превращают расстояние в метрику. Неравенства f-угольника являются частным случаем следующих *гиперметрических* неравенств. Пусть $d_{ij} = d_{ji}$ есть расстояние между точками i и j конечного множества $N = \{1, 2, ..., n\}$. Тогда гиперметрческие неравенства имеют вид

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} b_i b_j d_{ij} \leqslant 0,$$

где b_i для всех $i \in N$ суть такие целые числа, что $\sum_{i\in N} b_i = 1$. В случае неравенства f-угольника, целые числа b_i принимают значения 0, 1 и -1 и только f из них отличны от нуля. Согласно их опреледению, гиперметрики на n-элементном множестве, удовлетворяющие все гиперметрические неравенства, заполняют *гиперметрический конус* Hyp_n.

Когда Деза приехал в Москву, было уже известно, что метрики, вложимые в единичный куб, суть разрезные метрики, которые заполняют *разрезный конус* Cut_n. Разрезный конус порождается своими крайними лучами $\delta(S)$ для всех подмножеств $S \subset N$, где $\delta_{ij}(S) = 1$, если $|\{ij\} \cap S| = 1$, и $\delta_{ij}(S) = 0$ в противном случае.

Проблема, о которой рассказал Деза на семинаре, состоит в нахождении фасет разрезного конуса Cut_n, т.е. в нахождении граней коразмерности 1. В те годы в дискретной математике, в частности в целочисленном программировании, модна была тема нахождение фасет многогранника по известным его вершинам (или конуса по его крайним лучам), и двойственная задача, эквивалентная прямой – нахождение вершин по фасетному описанию многогранника (или крайних лучей исходя из фасет конуса).

Деза конкретно интересовался списком фасет 7-ми мерного разрезного конуса Cut_7. Он знал некоторые типы фасет этого конуса. По счастливой случайности, я тоже интересовался этой проблемой. Я написал соответствующую программу и имел некоторый список типов фасет 7-ми мерного разрезного конуса. В дальнейшем я доказал, что этот список полон, см. [3]. В то время это была не простая задача. Счетные машины размещались в больших машинных залах, были низко скоростные и с малой памятью по сравнению с современными компьютерами.

В моем списке оказался тип фасет, не известный Деза. Это очень заинтересовало Деза. С этого момента началась наша совместная работа. Одним из первых результатов было описание группы симметрий разрезного многогранника, см. [4].

Следующей совместной работой было доказательство полиэдральности гиперметрического конуса. К этому времени был уже известен результат П. Ассуада. Он доказал, что всякая гиперметрика представим квадратом евклидовых расстояний между вершинами некоторого *многогранника Делоне*. Многогранник Делоне (в те времена называемый L-многогранником) есть ячейка разбиения Делоне, определяемого некоторой точечной решеткой. Это разбиение двойственно хорошо известному разбиению Вороного той-же решетки. Используя этот факт, доказанный П. Ассуадом, мы вскоре доказали многогранность конуса гиперметрик, см. [5], [6]. Очень странно, что сам Ассуад не доказал полиэдральность. Вероятно, он не заметил, что существует конечное число аффинных типов многогранников Делоне данной размерности. Именно отсюда вытекает конечности числа граней конуса гиперметрик. Все результаты по теории гипрметрик собраны в книге [9].

В дальнейшем совместная работа с Деза была связана с гиперметриками, многогранниками Делоне и Вроного. Например, в [7] изучаются графы, метрика кратчайшего пути которых является гиперметрикой. Для меня особенно важна статья [10] 2004г, посвященная знаменитой гипотезе Г. Ф. Вороного о параллелоэдрах. Всего совместно с М. Деза мной опубликовано 33 работы и среди них одна книга [11].

В последние годы М. Деза опубликовал совместно с Еленой Деза несколько энциклопедий о расстояниях многочисленных родов.

Когда я познакомился с Деза, он вместе с Иво Розенбергом и Лас Вернасом был редактором журнала European Journal of Combinatorics. Это, в частности, говорит о его организаторских способностях. У него была хорошая память и он много просматривал научной литературы. И, если он где-то находил привлекательную идею, то собирал команду и развивал эту идею. Поэтому у него так много совместных работ.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тылкин М. Е. О геометрии Хэмминга единичных кубов // Доклады АН СССР. 1960. Том. 134 № 5. С. 1037–1040.

2. Тылкин М. Е. О реализуемости расстояний в единичных кубах // Проблемы кибернетики. 1962. Том. 7. С. 31–42.

3. Grishukhin V. P. All facets of the cut cone $\mathbf{C}_n$ for $n = 7$ are known // Europ. J. Combinatorics. 1990. Vol. 11. P. 115–117.

4. Deza M., Grishukhin V., Lauren M. The symmetries of the cut polytope and of some relatives // Applied Geometry and Disgrete Mathematics – The Victor Klee Festschrift. DIMACS Ser. in Discrete Math. and Theoretical Comput. Science. 1991. Vol.4. P. 205–220.

5. Deza M., Grishukhin V., Lauren M. Extreme hypermetrics and L-polytopes // Sets, Graphs and Numbers, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai. 1992. Vol. 60. P. 157–209.

6. Deza M., Grishukhin V., Lauren M. The hypermetric cone is polyhedral // Combinatorica. 1993. Vol. 13. P. 397–411.

7. Deza M., Grishukhin V. Hypermetric graphs // Quart.J.Math.(2). 1993. Vol. 44. P. 399–433.

8. Deza A., Deza M., Grishukhin V. P. Fullerenes and coordinations polyhedra versus half-cubes embedding // Discrete Mathematics. 1998. Vol. 192. P. 41–80.

9. Deza M. M., Lauren M. Geometry of Cuts and Metrics, Berlin: Springer-Verlag, 1997. 587 p. Перевод: Деза М. М., Лоран М. Геометрия разрезов и метрик. М.:Изд-во МЦНМО, 2001. 736 с.

10. Deza M., Grishukhin V., Properties of parallelotopes equivalent to Voronoi's conjecture // Europ. J. Combinatorics. 2004 Vol. 25 P. 517–533.

11. Деза М., Гришухин В. П., Штогрин М. И., Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках, М.: МЦНМО, 2008, 192 с.

УДК 51(091)

Г. М. Фихтенгольц и преподавание математического анализа в России в первой половине XX века

С. С. Демидов (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: serd42@mail.ru
С. С. Петрова (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: spetr33@mail.ru

G. M. Fikhtengolts and teaching of mathematical analysis in Russia in the first half of the twentieth century