При доказательстве непосредственно используются теорема 4 и разложение группы $G_{\partial\Gamma_0}$ в конечную последовательность групп Артина с древесной структурой

Теорема 6. *Теорема 6. В конечнопорожденной группе Артина разрешима проблема равенства слов.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Garsid F.A. The braid group and other groups // Quart, Math Oxford. ser(2), 1969 v.20, p 235-254.
2. Брискорн Э., Сайто К. Группы Артина и группы Коксетера // Математика. 1974 г. т 18, №6, с. 56-79.
3. Безверхний В.Н. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа // Сиб. Мат. жур. TXXVI. №5, 1985, с. 27-42.
4. Безверхний В.Н. О группах Артина, Коксетера с древесной структурой // V Международная конференция "Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и их приложения."Тезисы докладов. Тула, 2003, с. 33-34.
5. Appel K.J., Schupp P.E. Artin group and Infinite Coxeter groups // Invent Math. 1984, p. 50-78.
6. Appel K.J. On Artin groups and Coxeter groups of large type. // Contempor. Math. 1984, p. 50-78.
7. Безверхний В.Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Коксетера большого типа. // Алгоритмические проблемы. Теории групп и полугрупп. Межвуз. сб. науч. тр. Тула. 1986, с. 26-61
8. Безверхний В.Н., Карпова О.Ю. Проблема равенства и сопряженности в группах Артина с древесной структурой // Извес. Тульс. гос. универ., серия Математика, Механика, Информатика. 2006 г. Т. 12 вып. 1, с. 67-82.

УДК 514.172.45+514.132+519.17

Выпуклые многогранники, фуллерены и геометрия Лобачевского[1]

В. М. Бухштабер (Россия, г. Москва)
МИАН имени В. А. Стеклова и МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: buchstab@mi-ras.ru

Convex polytopes, fullerenes and Lobachevsky geometry

V. M. Buchstaber (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute and Lomonosov Moscow State University
e-mail: buchstab@mi-ras.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 17-01-00671-a и 18-51-50005-Яф-а

Первая часть доклада посвящена классическим и современным результатам математики, которые оказались в центре внимания физиков и химиков в связи с Нобелевской премией по химии 1996 г. (Р. Кёрл (R. F. Kurl), Х. Крото (H. Kroto), Р. Смолли (R. E. Smalley)) «за открытие фуллеренов». Лауреты синтезировали молекулу C_{60}, состоящую из 60 атомов углерода, которая комбинаторно представляет собой усечённый икосаэдр (см. рис. 1). Они назвали её *бакминстерфуллереном* в честь архитектора и философа Р. Бакминстера Фуллера.

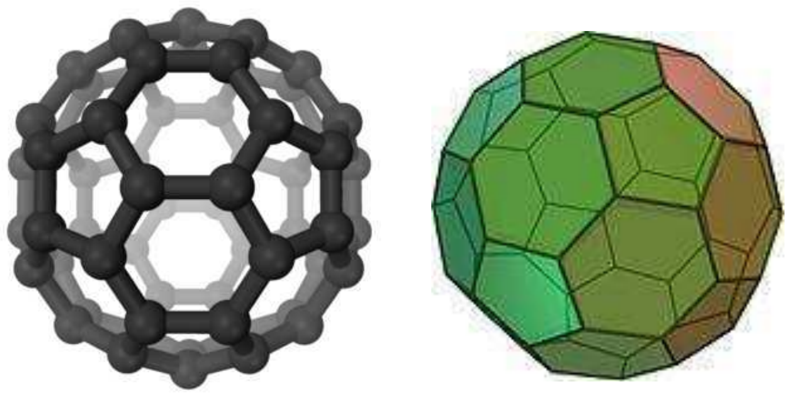

Рис. 1: Слева – бакминстерфуллерен C_{60}, справа – усечённый икосаэдр (архимедово тело).

Благодаря фуллеренам ряд областей математики и математической физики обогатились фундаментальными проблемами и результатами. Были открыты глубокие связи между областями математики, которые ещё совсем недавно казались далёкими друг от друга.

Вторая часть доклада посвящена разделам математической теории фуллеренов, которые относятся к комбинаторике многогранников и геометрии Лобачевского.

Математическим фуллереном мы называем комбинаторный простой выпуклый трёхмерный многогранник, у которого все грани являются пятиугольниками или шестиугольниками. Каждый фуллерен содержит ровно 12 пятиугольников, а число шестиугольников может быть любым, кроме единицы. Единственный фуллерен без шестиугольников – додекаэдр (платоново тело). Единственный фуллерен с двумя шестиугольниками мы называем 6-*бочкой* (рис. 2). Естественным обобщением фуллеренов являются *n-диск-фуллерены*, то есть простые многогранники, у которых все грани, кроме n-угольника, являются пятиугольниками или шестиугольниками. Таким многогранникам посвящена статья М. Деза, М. Дютура Сикирича, М. И. Штогрина [1].

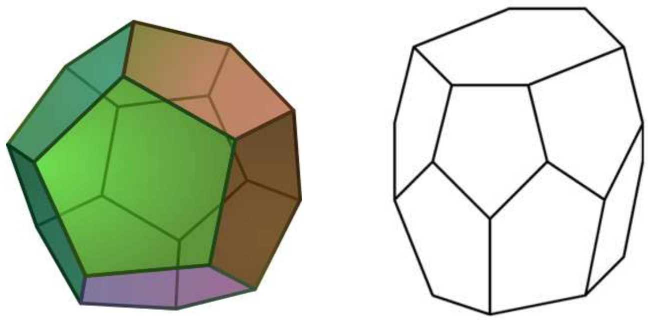

Рис. 2: Слева – додекаэдр, справа – фуллерен 6-бочка.

В центре внимания первой части доклада будет следующий результат.

Имеется однопараметрическое семейство фуллеренов, поверхность которых получается из двух половинок додекаэдра вставкой k поясов, каждый их которых состоит из 5 шестиугольников. Такие фуллерены называются $(5, 0)$-*нанотрубками.*

Теорема 1 ([2] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, 2017). *Любой фуллерен, отличный от додекаэдра и $(5, 0)$-нанотрубок, получается из 6-бочки при помощи срезок пар смежных рёбер граней, у которых не меньше 6 сторон, так что промежуточные многогранники являются фуллеренами или 7-диск-фуллеренами, у которых семиугольник граничит с некоторым пятиугольником.*

Обратим внимание, что известный алгоритм перечисления комбинаторных типов фуллеренов [3] использует счётный набор операций, каждая из которых переводит фуллерен в фуллерен с большим числом шестиугольников. Достоинство нашего результата заключается в том, что за счёт минимального расширения класса многогранников, допустимых на промежуточных шагах, для построения фуллеренов достаточно использовать только 4 операции. Конечные наборы операций, допускающие также 4-диск-фуллерены и достаточные для построения любого фуллерена из додекаэдра, приведены в нашей работе [4].

В центре внимания второй части доклада будут выпуклые многогранники, которые реализуются в трёхмерном пространстве Лобачевского в виде ограниченных выпуклых многогранников с прямыми двугранными углами. Такие многогранники мы называем *многогранниками А. В. Погорелова.* Из результатов А. В. Погорелова [5] (1967) и Е. М. Андреева [6] (1970) следует, что этот класс многогранников характеризуется тем, что они отличны от тетраэдра и не имеют 3- и 4-поясов, где *k-поясом* называется циклическая последовательность граней, в которой смежными являются последовательные грани и только они и никакие три грани не имеют общей вершины. Реализация многогранника Погорелова в пространстве Лобачевского определена однозначно с точностью до изометрии и задаёт замощение этого пространства копиями многогранника. Простейшим примером многогранника Погорелова является k-бочка, $k \geqslant 5$, то есть многогранник, поверхность которого склеена из двух частей, каждая из которых состоит из k-угольника, окружённого поясом пятиугольников. Из результатов Т. Дошлича [7, 8] (1998, 2003) по теории графов следует, что любой фуллерен является многогранником Погорелова.

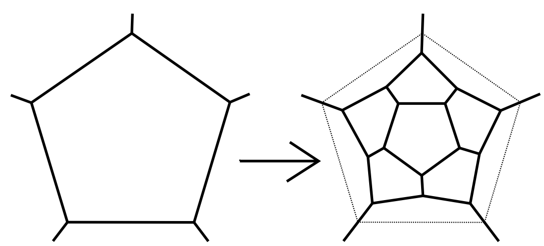

Рис. 3: Связная сумма с додекаэром.

Теорема 2 ([2] В. М. Бухштабер, Н. Ю. Ероховец, 2017). *Трёхмерный многогранник является многогранником Погорелова тогда и только тогда, когда он либо является k-бочкой, $k \geqslant 5$, либо получается из додекаэдра или 6-бочки при помощи последовательности операций связной суммы с додекаэдром (рис. 3) и срезки пары смежных рёбер, лежащих в грани по крайней мере с 6 сторонами.*

Наш результат является усилением результатов Д. Барнетта [9, 10] (1974,1977), Дж. Батлер [11] (1974) и Т. Иное [12] (2008). Новым является тот факт, что достаточно использовать срезки только двух смежных рёбер, а не некоторого числа последовательных рёбер грани, а также то, что в качестве начального множества многогранников можно выбрать только додекаэдр и 6-бочку, а не все k-бочки.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Деза М., Дютур Сикирич М., Штогрин М. И. Фуллерены и диск-фуллерены// УМН. 2013. Том 68, № 4(412). С. 69-128.
2. Бухштабер В. М., Ероховец Н. Ю. Конструкции семейств трехмерных многогранников, характеристические фрагменты фуллеренов и многогранники Погорелова// Изв. РАН. Сер. матем. 2017. Том 81, № 5. С. 15-91.
3. Brinkmann G., Goedgebeur J., McKay B. D. The Generation of Fullerenes// J. Chem. Inf. Model. 2012. V. 52, P. 2910-2918.
4. Buchstaber V. M., Erokhovets N. Yu., Finite sets of operations sufficient to construct any fullerene from C_{20}// Structural Chemistry, 28:1 (2017), 225–234.
5. Погорелов А. В. О правильном разбиении пространства Лобачевского// Матем. заметки. 1967. Т. 1, № 1. С. 3–8.
6. Андреев Е. М. О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского// Матем. сб. 1970. Том 81 (123), № 3. С. 445–478.
7. Dǒslić T. On lower bounds of number of perfect matchings in fullerene graphs// J. Math. Chem. 1998. V. 24, N 4. P. 359–364.
8. Dǒslić T. Cyclical edge-connectivity of fullerene graphs and $(k, 6)$-cages// J. Math. Chem. 2003. V. 33, N 2. P. 103–112.
9. Barnette D. On generation of planar graphs// Discrete Mathematics. 1974. V. 7, № 3-4. P. 199–208.
10. Barnette D. Generating the c^*-5-connected graphs// Israel Journal of Mathematics. 1977. V. 28, N 1-2. P. 151–160.
11. Butler, J.W. A generation procedure for the simple 3-polytopes with cyclically 5-connected graphs// Canad. J. Math. 1974, V. XXVI, N 3. P. 686-708.
12. Inoue T. Organizing volumes of right-angled hyperbolic polyhedra// Algebr. Geom. Topol. 2008. V. 8, № 3. P. 1523-1565.

——————————————————————

The Local Theory for Delone and t-bonded Sets

Mikhail Bouniaev (USA, Rio Grande Valley)
University of Texas Rio Grande Valley
e-mail: mikhail.bouniaev@utrgv.edu

Introduction. The overarching goal of this paper is to review main results of the local theory and discuss a potential extension of local theory, that focuses mostly on regular Delone sets and tiling to t-bonded sets, graphs, orthogonal nets, etc., and determine an agenda for research in this area. The main goal of the local theory for crystals is to find the correct statements rigorously explaining why and how the crystalline structure follows from the pair-wise identity of local arrangements around each atom. Before the 70s, there were no rigorously proved mathematical statements until B. Delone, R.Galiulin, and Delone's students N. Dolbilin and M. Stogrin developed a mathematically sound local theory of crystals (see for instance,[1]).