

инерциальностью. Это – прежде всего, движения-вращения рабочих валов, момент инерции которых увеличивался искусственно применением тяжелых маховых колес. Будучи отдельными элементами машины, создаваемыми исключительно с указанной целью, маховые колеса являлись материальными «носителями» идеи (круговой) инерции. Техника доклассического периода не знала движений, сопровождаемых вращением махового колеса. Впервые они были реализованы только в XV-XVII вв.

8. В состав механизмов маховые колеса включаются целенаправленно для достижения определенного эффекта. В ряде технических процессов необходимо демпфировать неравномерность вращения, вызванную неритмичной работой «машины-двигателя». С этой целью в состав механизмов вводятся специальные элементы, выполняющие функцию регуляторов скорости. В их числе – маховые колеса или грузы, обладающие большим моментом инерции. Особенно часто они применялись в машинах, в которых при помощи кривошипно-шатунного механизма осуществлялось преобразование возвратно-поступательного движения «машины-двигателя» во вращательное движение рабочего вала. Кривошипно-шатунный механизм – это изобретение, которое также стали широко использовать только в XV–XVII вв. Необходимость в маховом колесе вызвана тем, что вращение, создаваемое при помощи кривошипно-шатунного механизма, не может быть само по себе равномерным, но происходит с периодическим ускорением и замедлением. Типичный пример: машина, рабочий вал которой приводится во вращение периодическим нажатием ножной педали. Поскольку педаль при этом движется рывками (в силу возвратно-поступательного характера своего перемещения), вращение вала также является неравномерным. Демпфировать эту неравномерность и призвано маховое колесо [1-3].

9. Таким образом, теоретическое понятие инерциального движения родилось не на пустом месте. В его основе лежат технические движения-вращения, выполняемые при содействии тяжелых маховых колес. Именно они способствовали выработке представления об инерциальных движениях, вначале у практических механиков, воплощавших идею круговой инерции в работу реальных машин, а затем у теоретиков, положивших ее в основу классической механики.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зайцев Е. А. Всеобщее содержание природы в зеркале развития практической механики // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия «Философия. Социология. Право». 2017. Вып. 41, 12–19.
2. Зайцев Е. А. У истоков теоретической механики: история превращения технического искусства в научную дисциплину // Институт истории естествознания и техники им. С. И. Вавилова РАН. Годичная научная конференция 2015. Т.1. М., 2015, 132–141.
3. Зайцев Е. А. Идеальное движение // Научный результат. Социальные и гуманитарные исследования. 2016. Т. 2, № 2(8), 34–42.

УДК 514.8,531.1,531.8

Шарнирные механизмы и их конфигурационные пространства

М. Д. Ковалёв (Россия, г. Москва)

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова, мехмат

e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

Linkages and their configuration spaces

M. D. Kovalev (Russia, Moscow)

Lomonosov Moscow State University

e-mail: mdkovalev@mtu-net.ru

Плоские шарнирные механизмы

Под шарнирным механизмом я понимаю [1, 2] не то, что ныне понимают [3, 4, 5, 6] чистые математики. Поэтому, придётся начать от корней.

Гильберт [7] дал такое определение: "Плоским шарнирным механизмом называется всякая плоская система жестких стержней, частично соединенных между собой или скрепленных с неподвижными точками плоскости шарнирами, вокруг которых они могут вращаться, так что вся система еще сохраняет подвижность в ее плоскости". Инженеры чётко отделяют конструкции, не допускающие непрерывного движения и называемые ими фермами, от механизмов. Я придерживаюсь того же понимания. Итак, мы считаем наши механизмы составленными из стержней, несущих на своих концах шарниры. Структуру такого механизма задаём графом $G(V, E)$ без петель и кратных рёбер, вершины которого отвечают шарнирам, а рёбра — рычагам (стержням). Граф $G(V, E)$ обладает вершинами двух видов: крестиками мы обозначаем вершины, отвечающие шарнирам, неподвижным в механизме (закреплённым), кружочками — подвижным в механизме (свободным) шарнирам.

На граф $G(V, E)$ шарнирного механизма я, в отличие от авторов работ [3, 4, 5, 6], накладываю ряд естественных условий. А именно: а) $G(V, E)$ связан, б) вершины крестика смежны лишь вершинам кружочкам, в) подграф графа $G(V, E)$ на вершинах кружочках связан, г) условие, вытекающее из подвижности в механизме всех свободных шарниров. Из него следует, например, что каждый кружочек смежен не более чем одному крестiku. Граф $G(V, E)$, для которого выполнены все эти условия, я называю *шарнирной структурной схемой* (ШСС) механизма. Условия а), в) выделяют индивидуальный механизм, без них мы получаем несколько механизмов, движущихся независимо один от другого. Условие б) вводится из-за того, что нет нужды задавать расстояния между закреплёнными шарнирами. Условие г) введено, чтобы исключить неподвижные шарниры из числа свободных.

Закреплённой шарнирной схемой (ЗШС) называем ШСС, для которой заданы положения закреплённых шарниров в плоскости. Положения закреплённых шарниров мы считаем попарно несовпадающими. Пусть ЗШС имеет $n \geq 1$ закреплённых и $m \geq 1$ свободных шарниров, и $r \geq 1$ рычагов. Тогда ЗШС отвечают евклидовы пространства параметров: R^{2m} — пространство положений свободных шарниров, и R^r — пространство квадратов длин рычагов. Пусть p_i — радиус вектор i -го шарнира в плоскости, d_{ij} — квадрат длины рычага, соединяющего смежные в графе $G(V, E)$ i -й и j -й шарниры. Ключевым для геометрии шарнирных конструкций является так называемое *рычажное отображение*: $F : R^{2m} \rightarrow R^r$, задающееся формулами $d_{ij} = (p_i - p_j)^2$, $\{ij\} \in E$. Это отображение сопоставляет положениям свободных шарниров квадраты длин рычагов, и называется *рычажным* (в англоязычной литературе — "rigidity mapping" или „edge function“ [8, 5]). Точку $\mathbf{d} = \{d_{ij}\} \in R^r$ я называю, придавая вполне определённый смысл термину и понятию кинематической схемы из теории механизмов, *кинематической шарнирной схемой* (КШС), а точку $\mathbf{p} = \{p_i\} \in R^{2m}$ — *шарнирником*. С инженерной точки зрения шарнирник есть либо определённое положение шарнирного механизма, либо шарнирная ферма. Неодноточечная компонента $K \subset R^{2m}$ связности полного прообраза $F^{-1}(\mathbf{d})$ КШС $\mathbf{d}$ представляет собой множество всех положений или *конфигурационное пространство шарнирного механизма*. Таким образом, я отождествляю *шарнирный механизм* с его связным конфигурационным пространством.

Полный прообраз $F^{-1}(\mathbf{d})$ точки при рычажном отображении я называю *конфигурационным пространством КШС $\mathbf{d}$* . При таком подходе каждой компоненте связности полного

прообраза $F^{-1}(\mathbf{d})$ отвечает определённое шарнирное устройство. Если компонента связности одноточечна, — то это устройство представляет собой *шарнирную ферму*.

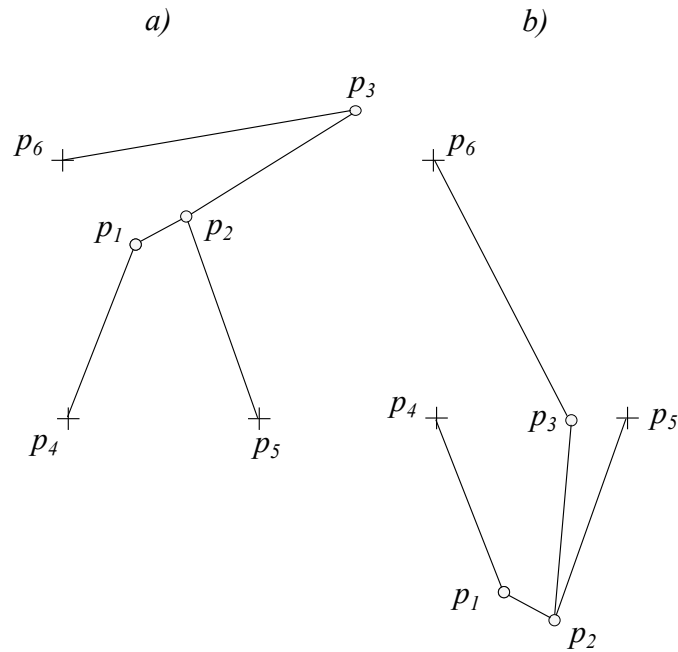


Рис. 4: Два шарнирных устройства, отвечающие одной кинематической схеме.

Авторы же работ [3, 4] и вслед за ними другие математики называют конфигурационным пространством шарнирного механизма то, что я называю конфигурационным пространством его КШС, то есть множество $F^{-1}(\mathbf{d})$. С точки зрения математики это естественнее и удобнее, поскольку это множество в отличие от его связной компоненты всегда является алгебраическим множеством. Но такая терминология и такое пренебрежение смыслом слов на мой взгляд запутывают кинематическое существо дела. Приведём пример. На рисунке 4 изображены два шарнирных механизма а) и б) с одной и той же кинематической схемой. Механизмы состоят из четырёхзвенника $p_4p_1p_2p_5$, к которому присоединена двухповодковая группа $p_6p_3p_2$. Если рычаг p_1p_2 достаточно короток, то четырёхзвенники, отличающиеся отражением относительно прямой p_4p_5 , нельзя непрерывно перевести один в другой. В терминологии машиноведов речь идёт о двух сборках шарнирного механизма. Однако, уменьшая длины рычагов p_2p_3 и p_3p_6 можно добиться, чтобы сборка б) стала фермой. Это наступит, когда рычаги p_2p_3 и p_3p_6 окажутся на одной прямой, и круг с центром p_6 радиуса равного сумме длин этих рычагов будет иметь лишь одну общую точку с траекторией шарнира p_2 четырёхзвенника, чего можно достичь выбором положения закреплённого шарнира p_6 . Сборка же а) при этом останется механизмом.

Разумно ли механизм и ферму называть разными сборками одного шарнирного механизма, как это делают машиноведы? Или называть эту парочку конструкций, непрерывно не переводимых одна в другую, шарнирным механизмом, как это делают абстрактные математики? При нашем подходе здесь речь идёт о двух шарнирных устройствах — механизме и ферме с одной и той же кинематической схемой. Такое понимание шарнирного механизма, кстати, снимает несправедливые обвинения [3] А. Кемпе в существенных пробелах его доказательства теоремы о возможности рисования по частям любой плоской алгебраической кривой с помощью шарнирных механизмов.

Конфигурационные пространства

Мною построен ряд примеров шарнирных механизмов с необычными свойствами.

Рассмотрим класс $\mathcal{K}_1$ плоских шарнирных механизмов, у которых множество положений каждого из свободных шарниров одномерно. Хотя каждый подвижный шарнир таких механизмов движется с одной степенью свободы, размерность конфигурационного пространства может превосходить единицу. Что показывает пример шарнирного механизма с перемен-

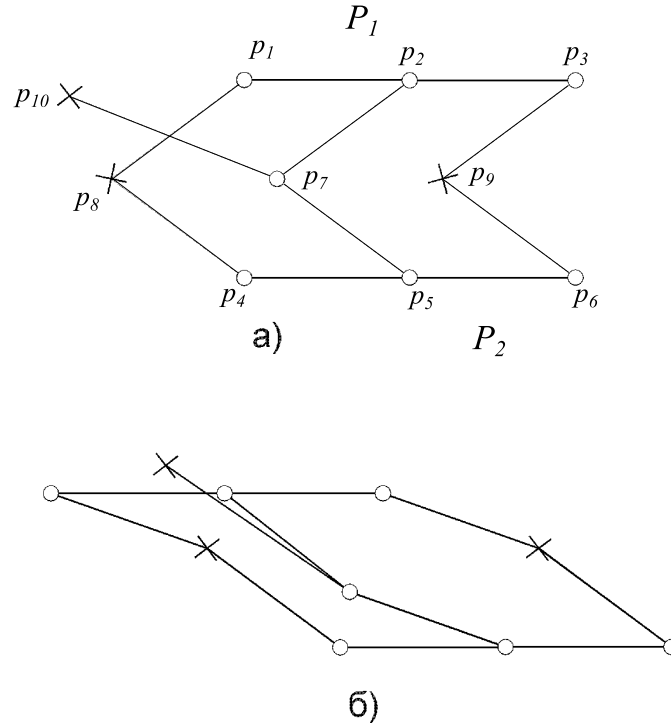


Рис. 5: Механизм с переменным числом степеней свободы. В положении а) — две степени свободы, в положении б) — одна.

ным числом степеней свободы [1]. Этот механизм (Рис.5) содержит 13 рычагов, 7 свободных $p_1, \dots, p_7$ и 3 закрепленных p_8, p_9, p_{10} шарнира. Он построен из двух одинаковых шарнирных параллелограммов $P_1: p_8, p_1, p_3, p_9$ и $P_2: p_8, p_4, p_6, p_9$. Шарниры p_2 и p_5 лежат посередине рычагов p_1p_3 и p_4p_6 соответственно. Этого можно достичь, закрепив их рычагами p_1p_2 , p_2p_3 и p_4p_5 , p_5p_6 . Длины дополнительных рычагов p_2p_7 и p_5p_7 равны длинам боковых рычагов p_1p_8 и p_4p_8 параллелограммов. Длина рычага $p_{10}p_7$ подобрана так, что шарнир p_7 может оказаться посередине отрезка p_8p_9 , как и показано на Рис. 5 а). Когда шарнир p_7 находится в указанном положении, параллелограммы P_1 и P_2 можно двигать независимо один от другого с одной степенью свободы каждый, и поэтому число степеней свободы всего механизма в этих положениях равно 2. Если же механизм привести в положение, когда рычаг p_2p_7 ляжет на рычаг $p_{10}p_7$, а рычаг p_7p_5 — на продолжение рычага $p_{10}p_7$, то шарнир p_7 можно будет сдвинуть со своего места. В положениях, когда шарнир p_7 не лежит посередине отрезка p_8p_9 (Рис.5 б)), число степеней свободы механизма равно 1.

В механизме из класса $\mathcal{K}_1$ назовём шарнир p_i *замеряющим*, если возможно непрерывное движение механизма, когда шарнир p_i покоится. Переменность числа степеней свободы в нашем примере связана с наличием замеряющего шарнира p_7 . При движении механизма в разные моменты замерять могут различные совокупности его шарниров.

ТЕОРЕМА 1. *Конфигурационное пространство механизма класса $\mathcal{K}_1$ одномерно в том и только том случае, когда у механизма либо нет замеряющих шарниров, либо ни одна из совокупностей замерших шарниров не разбивает множества свободных шарниров на несколько компонент связности.*

Конфигурационное пространство K шарнирного механизма, являясь компонентой связности алгебраического множества, само может не быть алгебраическим множеством. Однако, будем называть K *приводимым* либо *неприводимым*, в зависимости от того приводимо или нет наименьшее алгебраическое множество, содержащее K .

ТЕОРЕМА 2. *Если в механизме класса K_1 имеется замеряющий шарнир, то его конфигурационное пространство K приводимо.*

Также будет рассказано о связи неприводимости конфигурационного пространства шарнирного механизма и свойствах его проекций. Будет приведён ряд новых необычных примеров шарнирных механизмов, один из которых — пример механизма класса K_1 , имеющего в любом своём положении более одной степени свободы. Будет поставлен ряд вопросов, один из них следующий:

Есть ли в классе K_1 механизмы с постоянным и большим единицы числом степеней свободы?

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ковалёв М.Д. Геометрическая теория шарнирных устройств // Известия РАН Серия математическая, 1994, Т.58, № 1, С.45–70.
2. Ковалёв М.Д. Вопросы геометрии шарнирных устройств и схем // Вестник МГТУ, Серия Машиностроение, 2001, №4, С. 33–51.
3. Kapovich M., Millson J.J. Universality theorems for configurations of planar linkages // Topology. 2002. V.41, № 6, С. 1051 – 1107.
4. King Henry C. Planar Linkages and Algebraic Sets. arXiv.org:math/9807023 Preprint July 4, 1998, 22 P.
5. Demaine, Erik; O'Rourke, Joseph Geometric Folding Algorithms: Linkages, Origami, Polyhedra. — Cambridge University Press, 2007.
6. Ошемков А.А., Попеленский Ф.Ю., Тужилин А.А., Фоменко А.Т., Шафаревич А.И. Курс наглядной геометрии и топологии. — М.: ЛЕНАНД, 2015, 351 С.
7. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. — М.: Наука, 1981, 344 С.
8. Asimov L., Roth B. The rigidity of Graphs. II// Journal of Math. analysis and appl, 1979, V.68, № 1, С. 171–190.

УДК 511.32

О разрешимости в простых числах некоторых сравнений с обратными величинами¹

М. А. Королев (Россия, Москва)

Математический институт им. В.А. Стеклова Российской Академии наук
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
e-mail: korolevma@mi-ras.ru

¹Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00001)