Упомянутая выше оценка позволяет получить для числа $I_k(q,N) = I_k(q,N;a,b,m)$ решений (4) выражение вида

$$I_k(q,N) \;=\; \frac{(\pi(N))^k}{q}\,\bigl(\varkappa_k \;+\; O(\Delta_k)\bigr), \tag{5}$$

где $\pi(N)$ — количество простых чисел, не превосходящих N, $\Delta_k = \Delta_k(q,N) \to 0$ при $q \to +\infty$, а $\varkappa_k = \varkappa_k(q;a,b,m)$ - некоторая мультипликативная функция параметра q.

Величина $\varkappa_k(q)$ является своеобразным аналогом "особого ряда", возникающего при решении аддитивных задач с помощью кругового метода. Отыскание всех троек $(a,b,m) \pmod q$, при которых формула (5) является асимптотической, является нетривиальной задачей, представляющей и самостоятельный интерес. В частности, можно доказать существование абсолютной постоянной $c_1 > 0$ такой, что для любого модуля q с условием $(q,6) = 1$ неравенство

$$\varkappa_k(q;a,b,m) \;\geqslant\; c_1$$

выполняется равномерно по всем a,b,m и $k \geqslant 7$ (в случае, если верна расширенная гипотеза Римана и при $k \geqslant 5$). В случаях $q = 2^n$, $q = 3^n$, $n \geqslant 1$, можно указать значения k и отвечающие им тройки (a,b,m), для которых $\varkappa_k(q;a,b,m) = 0$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. Fouvry, P. Michel. Sur certaines sommes d'exponentielles sur les nombres premiers // Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 1998. Vol. 31, № 1. P. 93–130.
2. М. З. Гараев. Оценка сумм Клоостермана с простыми числами и применение // Матем. заметки. 2010. Т. 88, № 3. С. 41–64.
3. J. Bourgain. More on the sum-product phenomenon in prime fields and its applications // Int. J. Number Theory. 2005. Vol. 1, № 1. P. 1–32.
4. E. Fouvry, I. E. Shparlinski. On a ternary quadratic form over primes // Acta Arithmetica. 2011. Vol. 150, № 3. P. 285–314.
5. R. C. Baker. Kloosterman sum with prime variable // Acta Arith. 2012. Vol. 156, № 4. P. 351–372.
6. Ж. Бургейн, М. З. Гараев. Сумма множеств, образованных обратными элементами в полях простого порядка, и полилинейные суммы Клоостермана // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. Т. 78, № 4. С. 19–72.

УДК 511.3

Об одном подходе получения плотностных теорем для L-функций Дирихле числовых полей

В. Н. Кузнецов (Россия, г. Саратов)
Саратовский государственный технический университет им. Ю. А. Гагарина
e-mail: kuznetsovvalnik@gmail.com

О. А. Матвеева (Россия, г. Саратов)
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

On an approach to obtain density theorems for Dirichlet L-functions of numbers fields

V. N. Kuznetsov (Russia, Saratov)
Saratov state technical University. Yu. A. Gagarin
e-mail: kuznetsovvalnik@gmail.com
O. A. Matveeva (Russia, Saratov)
Saratov state University N. G. Chernyshevsky
e-mail: olga.matveeva.0@gmail.com

Известная теорема Бэклунда (см.[1]) утверждает, что для любого числового характера χ по модулю m для числа нулей L-функции $L(s,\chi)$, лежащих в прямоугольнике $D_T : 0 < \sigma < 1, |t| \leq T$ имеет место соотношение

$$N(T) = \frac{T\ln T}{\pi} + C(m)T + O(\ln(kT)), \tag{1}$$

где $C(m) \leq \ln 2m$.

Схема доказательства теоремы Бэклунда позволяет получить подобные утверждения для L–функций числовых полей. Существенную роль в этой схеме играет тот факт, что L–функции Дирихле в случае примитивных характеров удовлетворяют функциональному уравнению римановского типа(например [2]).

В данной работе предлагается иной подход получения плотностных теорем для L-функций числовых полей. Этот подход в отличии от схемы Бэклунда позволяет получать плотностные теоремы для рядов Дирихле, которые определяются линейными комбинациями L-функции числовых полей.

Во-первых, учитывая соотношение (1) для числа нулей дзета-функции Дедекинда числовых полей K; лежащих в прямоугольнике D_T, получаем следующее соотношение

$$N(T) = \frac{kT\ln T}{\pi} + O(T), \tag{2}$$

где константа в символе „O“ не превосходят величины $k\ln 2k$, где $k = [K : Q]$

В случае когда K абелево расширение поля Q соотношение (2) следует из разложения $Z_K(s)$ в произведении L-функций с числовыми характерами. (см. [2])

В случае произвольного числового поля K используем тот факт, что в этом случае для любого идеала β поля $K : N(\beta) = N(p)$, где p — идеал максимального абелева подрасширения: $Q \subset K_{ab} \subset K$, над которым лежит идеал β (см.[2]).

Рассмотрим разложение разложение $L(s,x,k)$:

$$L(s,x,k) = \sum_{C_i} x(C_i) \sum_{\pi\in C_i} \frac{1}{N(\pi)^s}, \tag{3}$$

где C_i пробегает группу классов идеалов поля K.

Оценка (2) и разложение (3) позволяют доказать следующее утверждение

Теорема 1. *Для L-функции Дирихле $L(s,\chi,K)$ имеет место представление*

$$L(s,\chi,K) = Q_{l,\chi}(s)\cdot f_0(s),$$

где $Q_{l,x}(s)$ полином степени l, $l \leq m$, где m не зависит от χ; $Q_{l,x}(s) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i n_{i,x}^s$, лежат в критической области и их число при $|t| \leq T$ удовлетворяет оценке

$$N_{f_0}(T) = \frac{kT\ln T}{\pi} + O(T)$$

где $k = [K : a]$, а константа в символе „O“ не превосходит $k\ln 2k$

Как показано в [3] нули полинома $Q_t(s)$ степени l при $|t| \leq T$ лежат в полосе $|\sigma| < H$, и их число удовлетворят оценке

$$H(T) = \frac{2T\ln l}{\pi} + C, \tag{4}$$

где константа C не зависит от T.

В силу (4) и теоремы 1 получим следующий результат.

Теорема 2. *Число нулей L–функции Дирихле $L(s,x,k)$ лежащих в прямоугольнике D_T удовлетворяют оценке*

$$N(T) = \frac{kT\ln T}{\pi} + O(T) \tag{5}$$

где $k = [K:Q]$, а константа в „O“ не превосходит $k\ln 2k + \ln m$, где m определяется числом классов поля K.

Приведенная выше схема получения оценки (5) работает и для рядов Дирихле вида

$$f(s) = \sum_{i=1}^{\nu} \alpha_i L(s,\chi,K) \tag{6}$$

где ν не превосходит порядка группы классов идеалов поля K.

Такие же рассуждения как и при доказательстве теоремы 2 позволяют доказать следующие утверждения.

Теорема 3. *Для числа нулей функции (6),лежащих в прямоугольнике D_T имеет место оценка*

$$N(T) = \frac{kT\ln T}{\pi} + O(T),$$

где $k = [K;Q]$, а константа в символе „O“ не превосходит величины $\nu(k\ln 2k + \ln m)$.

Теорема 4. *Для числа нулей функции $f(s)$, лежащих вне критической плоскасти имеет место оценка*

$$N(T) = O(T),$$

где константа в символе „O“ не превосходит величины $\nu(k\ln 2k + \ln m)$.

Теорема 5. *Для любого $\epsilon > 0$ основная масса нулей функции (6) при $t > 0$ лежит в ϵ–окрестности критической прямой. А именно при любом $T > 0$ и $\left|\sigma - \frac{1}{2}\right| > \epsilon$:*

$$N_\epsilon(T) = O(T),$$

где константа в символе „O“ зависит от ϵ.

Теорема 6. *При условии выполнения расширенной гипотезы Римана все нули L-функций Дирихле числового поля K лежат на критической прямой.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прахар К. Распределение простых чисел. — М.: Мир, 1967.
2. Алгебраическая теория чисел./ Под редакцией Касселса Дж. и Фрелиха А./ — М.: Мир, 1969.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1956.

On the Hurwitz zeta-function with algebraic irrational parameter

A. Laurinčikas (Lithuania, Vilnius)
Institute of Mathematics, Faculty of Nathematics and Informatics, Vilnius University
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

УДК 511.32

О дзета-функции Гурвица с алгебраическим иррациональным параметром[1]

А. Лауринчикас (Литва, г. Вильнюс)
Математический институт, Факультет математики и информатики, Вильнюский университет
e-mail: antanas.laurincikas@mif.vu.lt

After the Voronin discovery of the universality for the Riemann zeta-function, it turned out that some other zeta- and L-functions are also universal in the Voronin sense. Among them, the Hurwitz zeta-function $\zeta(s,\alpha)$, $s=\sigma+it$, with parameter α, $0<\alpha\leqslant 1$. The function $\zeta(s,\alpha)$ is defined, for $\sigma>1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s,\alpha)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(m+\alpha)^s},$$

and has a meromorphic continuation to the whole complex plane. The function $\zeta(s,\alpha)$ depends on the parameter α, and its analytic properties, including the universality, are closely related to arithmetic of α.

Let $D=\{s\in\mathbb{C}:1/2<\sigma<1\}$. Denote by $\mathcal{K}$ the class of compact subsets of the strip D with connected complements, and by $H(K)$ with $K\in\mathcal{K}$ the class of continuous functions on K that are analytic in the interior of K. Then the universality of $\zeta(s,\alpha)$ is contained in the following theorem [4].

Theorem 1. *Suppose that the parameter α is transcendental or rational $\neq 1, 1/2$. Let $K\in\mathcal{K}$ and $f(s)\in H(K)$. Then, for every $\varepsilon>0$,*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau,\alpha)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

[1] This research is funded by the European Social Fund according to the activity “Improvement of researchers’ qualification by implementing world-class R&D projects” of Measure No. 09.3.3-LMT-K-712-01-0037.