

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тылкин М. Е. О геометрии Хэмминга единичных кубов // Доклады АН СССР. 1960. Том. 134 № 5. С. 1037–1040.
2. Тылкин М. Е. О реализуемости расстояний в единичных кубах // Проблемы кибернетики. 1962. Том. 7. С. 31–42.
3. Grishukhin V. P. All facets of the cut cone  $\mathbf{C}_n$  for  $n = 7$  are known // Europ. J. Combinatorics. 1990. Vol. 11. P. 115–117.
4. Deza M., Grishukhin V., Lauren M. The symmetries of the cut polytope and of some relatives // Applied Geometry and Discrete Mathematics – The Victor Klee Festschrift. DIMACS Ser. in Discrete Math. and Theoretical Comput. Science. 1991. Vol. 4. P. 205–220.
5. Deza M., Grishukhin V., Lauren M. Extreme hypermetrics and L-polytopes // Sets, Graphs and Numbers, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai. 1992. Vol. 60. P. 157–209.
6. Deza M., Grishukhin V., Lauren M. The hypermetric cone is polyhedral // Combinatorica. 1993. Vol. 13. P. 397–411.
7. Deza M., Grishukhin V. Hypermetric graphs // Quart.J.Math.(2). 1993. Vol. 44. P. 399–433.
8. Deza A., Deza M., Grishukhin V. P. Fullerenes and coordinations polyhedra versus half-cubes embedding // Discrete Mathematics. 1998. Vol. 192. P. 41–80.
9. Deza M. M., Lauren M. Geometry of Cuts and Metrics, Berlin: Springer-Verlag, 1997. 587 p. Перевод: Деза М. М., Лоран М. Геометрия разрезов и метрик. М.:Изд-во МЦНМО, 2001. 736 с.
10. Deza M., Grishukhin V., Properties of parallelotopes equivalent to Voronoi's conjecture // Europ. J. Combinatorics. 2004 Vol. 25 P. 517–533.
11. Деза М., Гришухин В. П., Штогрин М. И., Изометрические полиэдральные подграфы в гиперкубах и кубических решетках, М.: МЦНМО, 2008, 192 с.

УДК 51(091)

## Г. М. Фихтенгольц и преподавание математического анализа в России в первой половине XX века

**С. С. Демидов (Россия, г. Москва)**

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
e-mail: serd42@mail.ru

**С. С. Петрова (Россия, г. Москва)**

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова  
e-mail: spetr33@mail.ru

**G. M. Fikhtengolts and teaching of mathematical analysis in Russia in the first half of the twentieth century**

**S. S. Demidov (Russia, Moscow)**

M. V. Lomonosov Moscow State University

e-mail: serd42@mail.ru

**S. S. Petrova (Russia, Moscow)**

M. V. Lomonosov Moscow State University

e-mail: spetr33@mail.ru

Для математического анализа вторая половина XIX-го века прошла под знаком реформы его оснований, осуществлённой К. Вейерштрасом.

Период конца XIX-го — начала XX-го столетий отмечен появлением трактатов Э. Пикара (1891—1893), Э. Гурса (1902—1903), Ш.-Ж. де ла Валле-Пуссена (1903—1906) (мы выделяем здесь руководства, оказавшиеся наиболее популярными в тогдашней России), в которых эта реформа нашла своё зримое выражение. Началась перестройка курсов дифференциального и интегрального исчисления в университетах Европы.

В этом вопросе Россия не оказалась в первых рядах. Известно, что лидер петербургских математиков, один из отцов современной теории вероятностей А. А. Марков относился к нововведениям Вейерштрасса более чем прохладно и в своих лекциях по анализу упрямо продолжал излагать теорему Ампера — утверждение о том, что всякая непрерывная функция дифференцируема всюду кроме может быть конечного множества точек области своего определения. В Москве царствовал Н. В. Бугаев, в лекциях которого по исчислению вейерштрассовский дух также не почевал. И хотя наиболее чуткие к новым веяниям профессора (вроде петербуржца К. А. Поссе, казанского математика А. В. Васильева или одессита С. О. Шатуновского) начали вводить вейерштрассовские идеи в свои курсы по анализу, процесс перестройки продвигался медленно.

Реальный поворот в осуществлении перестройки курса анализа был обозначен переводами на русский язык упомянутых трактатов Гурса и Валле-Пуссена. Курс Гурса начали переводить в Москве. Первый том в переводе А. И. Некрасова под редакцией Б. К. Младзеевского увидел свет в 1911 г. Петербуржцы начали переводить Валле-Пуссена. Первый том в переводе Я. Д. Тамаркина и Г. М. Фихтенгольца, осуществлённом под редакцией В. А. Стеклова, появился в 1922 г. Правда, последующих томов пришлось ждать долго — до 1933 г. Вмешались трагические события истории — Первая мировая, революция и гражданская война. Большое распространение получил учебник А. Дженошки с дополнениями и разъяснениями Дж. Пеано, который переводился дважды — в 1903 Н. С. Синеоковым и в 1922 упомянутым Поссе.

Таким образом к началу третьего десятилетия XX века профессора, читавшие курс анализа в отечественных университетах, могли рекомендовать своим студентам пособия, проникнутые духом вейерштрассовских реформ.

В первом десятилетии XX века зародилась Московская школа теории функций Д. Ф. Егорова — Н. Н. Лузина, выдвинувшая Москву в число важнейших математических центров Европы. А в 30-е годы на основании этой школы, а также Петербургской-Ленинградской школы началось формирование Советской математической школы, выросшей во второй половине века в одну из ведущих мировых школ.

Разумеется, такой процесс подразумевал наличие хорошо выстроенной системы подготовки кадров, могущих обеспечить её успешное функционирование. Такую систему нужно было ещё создать — старая система, созданная в Российской империи к началу Первой мировой войны, находилась в состоянии разрухи. Нужно было заново выстраивать эффективноирующую школу — среднюю и высшую. Разработка учебных программ, а также учебных пособий для такой школы в 30-е годы стала одной из насущных задач государственного строительства. Над её решением работали ведущие математики страны, в том числе В. И. Смирнов, А. Я. Хинчин, А. Н. Колмогоров, С. Л. Соболев, И. М. Гельфанд.

Математический анализ стал доминантой программы подготовки студентов-математиков. Над курсом анализа напряжённо работали ведущие математики страны. Ядро этой группы составили математики, так или иначе связанные с теорией функций действительного переменного – именно там в ту пору формировалась высокая культура теоретико-функциональных исследований, необходимая для разработчиков курсов математического анализа, реализующих вейерштрасовские стандарты.

Назовем лишь некоторые из наиболее успешных учебников по анализу, созданных в 20-е–40-е годы. Это и вышедший первым изданием в 1924–1947 годах знаменитый курс высшей математики В. И. Смирнова, центральное место в котором занимал анализ, это и книги Н. Н. Лузина по дифференциальному и интегральному исчислению, это двухтомный курс В. В. Немыцкого, М. И. Слудской и А. Н. Черкасова (первое издание 1940–1941 гг.), это и курс А. Я. Хинчина, первое издание которого увидело свет в 1953 году. Одной из самых ярких в этом ряду стала фигура профессора Ленинградского университета Григория Михайловича Фихтенгольца (1888–1959) – автора ставших классическими руководств по дифференциальному и интегральному исчислению.

Окончив в 1911 г. Императорский Новороссийский университет в Одессе, где его учителем был С. О. Шатуновский, он работал в издательстве «Mathesis», где познакомился с петербургским математиком К. А. Пессе, автором известных руководств по математическому анализу. В 1913–14 гг. в этом издательстве вышли два тома «Элементарного учебника алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых» Э. Чезаро, перевод которого под редакцией Пессе осуществил Фихтенгольц. Судя по всему, именно по совету Пессе он в 1913 г. переехал в Санкт-Петербург, где начал преподавательскую деятельность в Императорском электротехническом институте Александра III. В 1913–1917 гг. увидел свет цикл его работ по теории функций действительного переменного – теории интегралов, зависящих от параметра, ставших содержанием его магистерской диссертации, защищённой в 1918 г. В том же году он начал работать в Петроградском (впоследствии Ленинградском) университете, а с начала 20-х гг. также и во 2-м педагогическом институте, позднее вошедшем в состав Педагогического института им. А. И. Герцена.

Основные его труды относятся к теории функций действительного и функциональному анализу. На протяжении многих лет вместе с Л. В. Канторовичем он вёл в университете семинар по функциональному анализу. Среди его учеников – Л. В. Канторович, И. П. Натансон, а также С. Л. Соболев, Д. К. Фаддеев, С. А. Христианович.

Всю свою жизнь Фихтенгольц преподавал математический анализ. О его переводах руководств Чезаро и Валле-Пуссена мы уже говорили. В 1926 г. он выпустил руководство «Математика для техников», в 1931–33 гг. – двухтомник «Математика для инженеров». Многие годы в его голове зрел замысел фундаментального трактата по исчислению. В 1939 году он приступил к его воплощению: в издательстве Ленинградского университета вышла первая часть «Математического анализа». Однако разразившаяся вскоре война нарушила его планы. И лишь после войны он продолжил их реализацию: в 1947–49 гг. свет увидели три тома его фундаментального курса дифференциального и интегрального исчисления.

Изложение в трёхтомнике отличает систематичность и строгость, а также ясность и простота. Оно сопровождается подробным разбором многочисленных примеров и решением специально подобранных задач, помогающим понять излагаемый теоретический материал. По жанру рассматриваемый трёхтомник продолжает скорее традицию французских *traités* по дифференциальному и интегральному исчислению. Однако, созданный в рамках иной математической культуры и предназначенный прежде всего для нужд тогдашнего советского читателя, он по своему характеру во многом от них отличается.

Одной из целей, которые ставил перед собой автор, было дать по возможности полное изложение основных вопросов исчисления в их взаимосвязях с другими разделами матема-

тики, а также с различными приложениями. Так, в приводимых примерах рассматриваются, например, контактные преобразования, метод наименьших квадратов, задачи интерполяции, неравенства Коши, Гёльдера, Минковского, Иенсена, расходящиеся и асимптотические ряды. Для расширения кругозора читателя автор даёт, например, набросок, посвящённый теории обыкновенных дифференциальных уравнений, а также знакомит с проблемами уравнений математической физики, с основами векторного анализа. Коротко и с блеском излагает теорию расходящихся и асимптотических рядов.

Замечательную особенность изложения составляет погружение излагаемого материала в исторический контекст. Это достигалось делаемыми автором по ходу изложения замечаниями. Например, сформулировав в первом томе теорему Ролля, автор замечает: «В действительности Ролль высказал это утверждение лишь для многочленов». Или, сформулировав теорему Ферма, тут же оговаривается: «Это утверждение, разумеется, воспроизводит лишь сущность того приёма, который применял Ферма для разыскания наибольших и наименьших значений функции (Ферма не располагал понятием производной)». Введя понятие якобиана, автор замечает: «Этот определитель называется обычно функциональным определителем Якоби или якобианом системы (1) – по имени немецкого математика Якоби (С. Г. І. Jacobi), впервые изучившего его свойства и применения». И добавляет: «В науку якобианы были введены одновременно с Якоби М. В. Остроградским».

Подобный историзм изложения становился в советской школе 30-х – 40-х годов непременной чертой подачи учебного материала. Впрочем, особую роль исторический контекст развития математических идей приобрёл у Фихтенгольца в том варианте, который писался как учебник по курсу анализа для студентов – в двухтомнике «Основы математического анализа».

Это руководство было задумано, как нам сообщает автор в предисловии, «как учебник анализа для первого и второго курса математических отделений университетов; в соответствии с этим и книга делится на два тома. При составлении её был широко использован мой трёхтомный «Курс дифференциального и интегрального исчисления», но содержащийся в нём материал подвергся сокращению и переработке в целях приближения книги к официальной программе по математическому анализу ...». Главную свою задачу он видел «в систематическом и – по возможности – строгом изложении основ математического анализа».

Учебник не предлагал упражнений, выполнение которых должно помочь читателю проверить уровень освоения им пройденного материала (предполагается, что для этой цели в русской учебной литературе имеются специальные сборники задач), но сопровождался многочисленными детально разобранными примерами, позволяющими помочь ему в уяснении теоретического материала и подготовить его «к сознательной работе над упражнениями».

Исторические справки и даже целые исторический разделы, сопровождающие у Фихтенгольца изложение математического анализа, чрезвычайно информативны. Они свидетельствуют о превосходном знании автором современной историко-математической литературы. В то же самое время они отражают общую для всей советской учебной литературы тенденцию рассматривать предлагаемый учащемуся материал в широком историческом контексте.

Учебники по анализу Г. М. Фихтенгольца стали выдающимся событием в истории советской математической школы. Переведённые на многие языки они послужили (и продолжают служить и по сей день – на это указывает продолжение их постоянных переизданий) введением в премудрости анализа для многих поколений учащихся во всём мире.

---

УДК 514.15+514.17+514.8+548.1

## О кристалличности $2R$ -изометрических множеств Делоне: новые результаты и открытые проблемы

Н. П. Долбилин (Россия, г. Москва)