6. Bahturin Y., Zaicev M. Simple graded division algebras over the field of real numbers // Linear Algebra and its Applications. 2016. Том 490. P. 102–123.

7. Балаба И.Н., Михалёв А.В. Антиизоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов градуированных модулей, близких к свободным // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Том 14, № 7. С. 23–36.

———————————————————————————

УДК 514.9

О проблеме равенства слов в группах Артина[1]

В. Н. Безверхний В.Н. (Россия, г. Москва)
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: vnbezv@rambler.ru

On problem equality words in the Artin groups

V. N. Bezverkhnii, (Russia, Moscow)
Academy of Civil Defence EMERCOM of Russia
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Истоки проблемы равенства слов в группах Артина восходят к работе Э. Артина 1925 г., определившего копредставление группы кос β_{n+1}, и доказавшего разрешимость проблемы равенства слов в группе β_{n+1}.

Группа Артина задается конечной системой образующих: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ и системой определяющих соотношений:

$< \sigma_i\sigma_j >^{m_{ij}} = < \sigma_j\sigma_i >^{m_{ji}}$, где $< \sigma_i\sigma_j >^{m_{ij}} = \sigma_i\sigma_j\sigma_i \ldots$ – слово из чередующихся образующих σ_i, σ_j длины m_ij, m_ij – элемент симметрической матрицы Коксетера $M = \{m_{ij} | i, j \in \overline{1, n}\}$, $m_{ij} \in \{2, 3, 4, \ldots, \infty\}$, $m_{ij} = 1$ для любого $i = \overline{1, n}$, $m_{ij} = \infty$, означает, что соотношение с образующими σ_i, σ_j отсутсвует.

Группа Артина имеет копредставление:

$$G = < \sigma_1, \ldots, \sigma_n; < \sigma_i\sigma_j >^{m_{ij}} = < \sigma_j\sigma_i >^{m_{ji}}, i, j \in \overline{1, n} > \quad (1)$$

Поставим в соответствии группе G конечный граф Г, каждой вершине v_i которого ставится в соответствие образующий v_i, а ребру, соединяющему вершины v_i, v_j – элемент $m_{ij} \in M$, причем, если вершины v_i, v_j не соединены ребром, то паре $\sigma_i\sigma_j$ соответствует $m_{ij} = \infty$.

Такой граф называется графом Коксетера, а группа Артина, соответствующая ему, имеет копредставление (1) и обозначается G_Γ. С каждой группой Артина G_Γ связана группа Коксетера $\overline{G}_\Gamma$, имеющая копредставление:

$$\overline{G}_\Gamma = < \sigma_1, \ldots, \sigma_n; < \sigma_i\sigma_j >^{m_{ij}} = < \sigma_j\sigma_i >^{m_{ji}}, \sigma_i^2 = 1, i, j \in \overline{1, n} > \quad (2)$$

Если группа $\overline{G}_\Gamma$ конечна, то группа G_Γ называется группой Артина конечного типа. Данному классу групп принадлежат группы кос β_{n+1}, в которых в 1969 г. Гарсайдом Ф.А. была решена проблема сопряженности слов [1]. Брискорном Э. и Сайто К. была доказана разрешимость проблем равенства и сопряженности слов в группах Артина конечного типа [2] .

Шупп П. и Аппель К. определили широкие классы групп Артина большого типа ($m_{ij} \geq 3$) и групп экстрабольшого типа ($m_{ij} > 3$).

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710002_р_а

Для групп Артина экстрабольшого типа, используя диаграмный метод, ими была решена проблема равенства и сопряженности слов [5]. В работах [6], [7] авторами независимо были решены проблемы равенства и сопряженности слов в группах Артина большого типа. В [4] введено понятие групп Артина с древесной структурой.

Группа Артина называется группой с древесной структурой, если граф Коксетера Г, соответствующий данной группе, является дерево-графом. Элементы матрицы Коксетера $M = (m_{ij} | i, j \in \overline{1,n})$, $m_{ij} \in \{2, 3, \ldots, \infty\}$.

Теорема 1. *Теорема 1. [8] . В группах Артина с древесной структурой разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.*

Группа Артина называется группой Артина с m-угольной структурой, если ее граф Г состоит из m-угольников с элементами матрицы Коксетера m_{ij}, принадлежащими множеству $\{2, 3, \ldots, \infty\}$.

Теорема 2. *Теорема 2. Пусть G_Γ группа Артина с m-угольной структурой, $m > 3$, тогда в группе G_Γ разрешимы проблемы равенства и сопряженности слов.*

Целью данной работы является решение проблемы равенства слов в конечнопорожденной группе Артина.

Пусть G_Γ – группа Артина, заданная копредставлением (1), Γ – граф Коксетера, соответствующий группе $G_\Gamma, \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ – образующие группы G_Γ. Пусть $\Gamma_0, \Gamma_0 \subset \Gamma$, максимальный дерево-граф, $\partial\Gamma_0$ – дополнение Γ_0 в Γ, $\partial\Gamma_0$ – замкнутое множество, через X_0 обозначим множество образующих $G_{\Gamma_0} : X_0 = \{\sigma_{01}, \sigma_{02}, \ldots, \sigma_{0n}\}$, где $\sigma_{0i} = \sigma_i,\ i \in \overline{1,n}$, $relG_{\Gamma_0}$ – система определяющих соотношений группы G_{Γ_0} и:

$$G_{\Gamma_0} =< X_0; relG_{\Gamma_0} > \tag{3}$$

копредставления группы G_{Γ_0}. Обозначим $\overline{X}_0$, $\overline{X}_0 = \{\overline{\sigma}_{oi}, 1 \le k_0 \le i \le n_0 \le n\}$ – множество образующих группы $G_{\partial\Gamma_0}$, $\overline{\overline{X}} = \{\sigma_{oi}, 1 \le k_0 \le i \le n_0 \le n\}$, $\overline{\overline{X}}_0 \subseteq X_0$, $relG_{\partial\Gamma_0} = G_\Gamma \setminus G_{\Gamma_0}$, и копредставление группы $G_{\partial\Gamma_0}$ будет иметь вид:

$$G_{\partial\Gamma_0} =< \overline{X}_0; relG_{\partial\Gamma_0} > \tag{4}$$

Используя преобразования Тице, можно преобразовать копредставление группы G_Γ к следующему виду:

$$G_\Gamma =< \sigma_{01},\ \ldots,\ \sigma_{0n},\ \overline{\sigma}_{0k_0},\ \ldots,\ \sigma_{0n_0};\ relG_{\Gamma_0},\ relG_{\partial\Gamma_0},\ \sigma_{0i} = \overline{\sigma}_{0i},\ 1 \le k_0 \le i \le n_0 \le n > \tag{5}$$

В дальнейшем будем использовать следующее копредставление группы G_Γ:

$$G_\Gamma =< G_{\Gamma_0} * G_{\partial\Gamma_0}; relG_{\Gamma_0}, relG_{\partial\Gamma_0}, \sigma_{0k_0} = \overline{\sigma}_{0k_0}, \ldots, \sigma_{0n_0} = \overline{\sigma}_{0n_0} > \tag{6}$$

Теорема 3. *Теорема 3. В группе Артина с древесной структурой разрешима проблема вхождения.*

Теорема 4. *Теорема 4. (основная теорема). Если в группе $G_{\partial\Gamma_0}$ разрешима проблема равенства слов и существует алгоритм, позволяющий для любого слова $\overline{w} \in G_{\partial\Gamma_0}$ и любого образующего $\overline{\sigma}_{oj}$, $1 \le k_0 \le j \le n_0 \le n$, группы $G_{\partial\Gamma_0}$ установить, принадлежит ли $\overline{w}$ циклической подгруппе $< \overline{\sigma}_{oj} >$, то в группе G_Γ разрешима проблема равенства слов.*

Теорема 5. *Теорема 5. В группе $G_{\partial\Gamma_0}$ разрешима проблема равенства слов и для любого $\overline{w} \in G_{\partial\Gamma_0}$ можно эффективно установить, принадлежит ли $\overline{w}$ циклической подгруппе, порожденной образующим $\overline{\sigma}_{oj} \in \overline{X}_0$, $k_0 \le j \le n_0$.*

При доказательстве непосредственно используются теорема 4 и разложение группы $G_{\partial\Gamma_0}$ в конечную последовательность групп Артина с древесной структурой

Теорема 6. *Теорема 6. В конечнопорожденной группе Артина разрешима проблема равенства слов.*

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Garsid F.A. The braid group and other groups // Quart, Math Oxford. ser(2), 1969 v.20, p 235-254.

2. Брискорн Э., Сайто К. Группы Артина и группы Коксетера // Математика. 1974 г. т 18, №6, с. 56-79.

3. Безверхний В.Н. Неразрешимость проблемы вхождения в группах Артина конечного типа // Сиб. Мат. жур. TXXVI. №5, 1985, с. 27-42.

4. Безверхний В.Н. О группах Артина, Коксетера с древесной структурой // V Международная конференция "Алгебра и теория чисел. Современные проблемы и их приложения."Тезисы докладов. Тула, 2003, с. 33-34.

5. Appel K.J., Schupp P.E. Artin group and Infinite Coxeter groups // Invent Math. 1984, p. 50-78.

6. Appel K.J. On Artin groups and Coxeter groups of large type. // Contempor. Math. 1984, p. 50-78.

7. Безверхний В.Н. Решение проблемы сопряженности слов в группах Артина и Коксетера большого типа. // Алгоритмические проблемы. Теории групп и полугрупп. Межвуз. сб. науч. тр. Тула. 1986, с. 26-61

8. Безверхний В.Н., Карпова О.Ю. Проблема равенства и сопряженности в группах Артина с древесной структурой // Извес. Тульс. гос. универ., серия Математика, Механика, Информатика. 2006 г. Т. 12 вып. 1, с. 67-82.

УДК 514.172.45+514.132+519.17

Выпуклые многогранники, фуллерены и геометрия Лобачевского[1]

В. М. Бухштабер (Россия, г. Москва)
МИАН имени В. А. Стеклова и МГУ имени М. В. Ломоносова
e-mail: buchstab@mi-ras.ru

Convex polytopes, fullerenes and Lobachevsky geometry

V. M. Buchstaber (Russia, Moscow)
Steklov Mathematical Institute and Lomonosov Moscow State University
e-mail: buchstab@mi-ras.ru

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 17-01-00671-a и 18-51-50005-Яф-а