Пленарные доклады

Unitary t-designs and unitary t-groups

Eiichi Bannai (Japan, Fukuoka)
Kyushu University
e-mail: bannai@math.kyushu-u.ac.jp

Unitary t-designs are finite subsets of the unitary group $U(d)$ that approximate $U(d)$ properly, in a similar sense as spherical t-designs are finite subsets that approximate the real unit sphere S^{d-1} properly. A unitary t-design is called a unitary t-group if it is a subgroup of $U(d)$. First, we give a brief survey on the study of unitary t-designs that was started in physics (quantum information theory). In physics, some unitary 3-groups have been known, but no unitary 4-groups were unknown for $d \geqslant 3$ (and the non-existence of unitary 4-groups has only been conjectured). The main purpose of this talk is to point out that the answer was already essentially known in a disguised form in the deep group theoretical work of Guralnick–Tiep: Decompositions of small tensor powers and Larsen's conjecture, Represent. Theory 9 (2005), 138–208. Namely, Guralnick–Tiep gave the complete classification of unitary t-designs for all $t \geqslant 2$ for $d \geqslant 5$. This was pointed out by Bannai–Navarro–Rizo–Tiep, arXiv:1810.02507, just recently. We also treated the remaining cases of $d = 2$, 3 and 4 completely.

Finally we discuss some unitary $t+1$-designs which are obtained as the orbits of the action of $G \times G$ on $U(d)$ for certain unitary t-groups G in $U(d)$. For example, this makes it possible to construct (numerically) some exact unitary 4-designs in $U(4)$ explicitly from the unitary 3-group $Sp(4,3)$ in $U(4)$. The last part of my talk is based on the ongoing joint work with Mikio Nakahara, Da Zhao and Yan Zhu.

—————————————————————————————

УДК 512.552

Градуированные тела и модули над ними [1]

И. Н. Балаба (Россия, г. Тула)
Тульский государственный педагогический университет им. Л. Н. Толстого
e-mail:ibalaba@mail.ru
А. В. Михалёв (Россия, г. Москва)
Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
,

Graded division rings and modules over them

I. N. Balaba (Russian, Tula)
Tula State Lev Tolstoy Pedagogical University
e-mail:ibalaba@mail.ru
A V. Mikhalev (Russian, Moscow)
Lomonosov Moscow State University

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ №19-41-710004_р_а

В теории градуированных колец значительную роль играют градуированные тела, то есть градуированные кольца, каждый ненулевой однородный элемент которых является обратимым. Все рассматриваемые кольца предполагаются ассоциативными с единицей, градуированные мультипликативной группой G с единицей e.

Легко проверить, что если $D = \bigoplus_{g\in G} D_g$ является G-градуированным телом, то:

- D_e – тело;
- носитель $G^{'} = \mathrm{Supp}D = \{g \in G \mid D_g \neq 0\}$ тела D – подгруппа группы G
- D – сильно $G^{'}$ – градуированное кольцо, более точно $D = D_e * G^{'}$ – скрещенное произведение тела D_e и группы $G^{'}$ [1].

Несмотря на то, что градуированные тела не являются телами в обычном смысле, они сами и градуированные модули над ними обладают свойствами, аналогичными свойствам тел и линейных пространств над телами.

Градуированный D-модуль V называется *gr-свободным*, если он обладает базисом, состоящим из однородным элементов, то есть $V \cong \bigoplus_{j\in J} D(\sigma_j)$, где $\{\sigma_j, j \in J\}$ – семейство элементов группы G. Заметим, что gr-свободный D-модуль является свободным D-модулем, в то же время свободный градуированный модуль может не быть gr-свободным.

Теорема 1. *Градуированное кольцо D является градуированным телом в том и только том случае, если каждый правый (левый) градуированный D-модуль является gr-свободным.*

Градуированный модуль V над градуированным телом D будем называть *градуированным векторным пространством.* Все однородные базисы V имеют одинаковую мощность. Хорошо известно, что если V конечно порожденный градуированный правый модуль с базисом состоящим из однородных $v_1, v_2, ..., v_n$, $v_i \in V_{g_i^{-1}}$ $(i = 1, \dots, n)$, то его градуированное кольцо эндоморфизмов $\mathrm{END}_D(V)$ изоморфно кольцу матриц $M_n(D)(g_1, \dots, g_n)$, все матричные единицы которого являются однородными элементами. Такие градуировки на матричных кольцах называются *хорошими.*

В [2] была изучена решетка градуированных подпространств градуированного векторного пространства и построены [2, теорема 2.3.]:

1. изоморфизм между решеткой градуированных подпространств V и решеткой правых градуированных аннуляторных идеалов градуированного кольца эндоморфизмов

$$A = \mathrm{END}_D(V);$$

2. антиизоморфизм между решеткой градуированных подпространств V и решеткой левых градуированных аннуляторных идеалов кольца A;

3 антиизоморфизм между решеткой правых градуированных аннуляторных идеалов и решеткой левых градуированных аннуляторных идеалов кольца A.

Градуированным центром $Z_{gr}(D)$ тела D назовем максимальное градуированное подкольцо центра $Z(D)$, оно порождено однородными центральными элементами кольца D. Ясно, что $Z_{gr}(D)$ является градуированным полем.

Теорема 2. *Пусть D – градуированныое тело, Z – его градуированный центр и F – максимальное градуированное подполе в D. Тогда $D \bigotimes_Z F$ является gr-плотным кольцом в градуированном кольце $\mathrm{END}_F(D)$ линейных преобразований тела D, рассматриваемого как градуированное векторное пространство над F.*

Если тело D конечномерно над своим градуированным центром Z, то $D \bigotimes_Z F$ изоморфно кольцу матриц $M_n(F)(g_1, \dots, g_n)$ над градуированным полем F, снабженному хорошей градуировкой.

При изучении колец операторов линейных пространств и колец эндоморфизмов модулей одним из центральных вопросов является описание их изоморфизмов. Описание изоморфизмов колец линейных преобразований линейных пространств над телами приведено в монографии Р. Бэра [3]. Важность модульного подхода при характеризации абелевых групп была подчеркнута в монографии И. Капланского [4].

В [2, теорема 3.1] было установлено, что изоморфизмы градуированных колец линейных преобразований векторных пространств индуцируются специального вида полулинейными преобразованиями векторных пространств.

В качестве следствия получим.

Теорема 3. *Пусть A – gr-простое gr-артиново кольцо. Тогда A изоморфно кольцу матриц с хорошей градуировкой над некоторым градуированным телом D. Если при этом $A \cong M_n(D)(g_1, \ldots, g_n) \cong M_m(E)(h_1, \ldots, h_n)$ для градуированных тел D и E, то $n = m$ и существуют $\sigma \in G$ и изоморфизм колец $\beta : D \to E$, такие что $\beta(D_g) = E_{\sigma^{-1}g\sigma}$.*

Отметим, что авторами была рассмотрена и более общая ситуация. Получены критерии, решающие вопрос о том, когда изоморфизм градуированных колец изоморфизмов строгих gr-образующих, индуцируется gr-образующим, градуированной эквивалентностью Мориты или полулинейным преобразованием [5].

Пусть F – градуированное поле и A – градуированная алгебра над F. Алгебру A назовем *центральной*, если все ее центральные однородные элементы лежат в F.

Теорема 4. *Пусть F – градуированное поле и A – градуированная конечномерная центральная gr-простая алгебра над F. Тогда существует градуированное тело D, являющееся конечномерной центральной gr-простой F-алгеброй, такое что алгебра A изоморфна алгебре матриц с хорошей градуировкой над телом D.*

Отметим, что в [6] дана полная классификация с точностью до эквивалентности конечномерных градуированных алгебр с делением над полем действительных чисел, градуированных конечной абелевой группой.

Наряду с описанием изоморфизмов колец эндоморфизмов модулей значительный интерес представляет описание их антиизоморфизмов. Из более общих результатов авторов, описывающих критерии индуцируемости градуированных колец эндоморфизмов строгих gr-образующих градуированной антиэквивалентностью Мориты или градуированным антиполулинейным преобразованием [7], установлено, что каждый антиизоморфизм градуированных колец линейных преобразований индуцируется специального вида анти-полулинейным преобразованием векторных пространств.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Dade E. C. Group-graded rings and modules // Math. Z. 1980 Vol. 174, no 2. P. 241–262.
2. Балаба И. Н. Изоморфизмы градуированных колец линейных преобразований градуированных векторных пространств // Чебышевский сборник. 2005. Том 6, № 4(16). С. 6–23.
3. Бэр Р. Линейная алгебра и проективная геометрия. — М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 400 с.
4. Kaplansky I. Infinite abelian groups. — The University of Michigan, 1954.
5. Балаба И.Н., Михалёв А.В. Изоморфизмы градуированных колец эндо- морфизмов градуированных модулей, близких к свободным // Фундамент. и прикл. матем. 2007. Том 13, № 5. С. 3–18.

6. Bahturin Y., Zaicev M. Simple graded division algebras over the field of real numbers // Linear Algebra and its Applications. 2016. Том 490. P. 102–123.

7. Балаба И.Н., Михалёв А.В. Антиизоморфизмы градуированных колец эндоморфизмов градуированных модулей, близких к свободным // Фундамент. и прикл. матем. 2008. Том 14, № 7. С. 23–36.

УДК 514.9

О проблеме равенства слов в группах Артина[1]

В. Н. Безверхний В.Н. (Россия, г. Москва)
Академия гражданской защиты МЧС России
e-mail: vnbezv@rambler.ru

On problem equality words in the Artin groups

V. N. Bezverkhnii, (Russia, Moscow)
Academy of Civil Defence EMERCOM of Russia
e-mail: vnbezv@rambler.ru

Истоки проблемы равенства слов в группах Артина восходят к работе Э. Артина 1925 г., определившего копредставление группы кос β_{n+1}, и доказавшего разрешимость проблемы равенства слов в группе β_{n+1}.

Группа Артина задается конечной системой образующих: $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ и системой определяющих соотношений:

$< \sigma_i\sigma_j >^{m_{ij}} = < \sigma_j\sigma_i >^{m_{ji}}$, где $< \sigma_i\sigma_j >^{m_{ij}} = \sigma_i\sigma_j\sigma_i \ldots$ – слово из чередующихся образующих σ_i, σ_j длины m_ij, m_ij – элемент симметрической матрицы Коксетера $M = \{m_{ij} | i, j \in \overline{1,n}\}$, $m_{ij} \in \{2, 3, 4, \ldots, \infty\}$, $m_{ij} = 1$ для любого $i = \overline{1,n}$, $m_{ij} = \infty$, означает, что соотношение с образующими σ_i, σ_j отсутсвует.

Группа Артина имеет копредставление:

$$G = < \sigma_1, \ldots, \sigma_n; < \sigma_i\sigma_j >^{m_{ij}} = < \sigma_j\sigma_i >^{m_{ji}}, i, j \in \overline{1,n} > \tag{1}$$

Поставим в соответствии группе G конечный граф Г, каждой вершине v_i которого ставится в соответствие образующий v_i, а ребру, соединяющему вершины v_i, v_j – элемент $m_{ij} \in M$, причем, если вершины v_i, v_j не соединены ребром, то паре $\sigma_i\sigma_j$ соответствует $m_{ij} = \infty$.

Такой граф называется графом Коксетера, а группа Артина, соответствующая ему, имеет копредставление (1) и обозначается G_Γ. С каждой группой Артина G_Γ связана группа Коксетера $\overline{G}_\Gamma$, имеющая копредставление:

$$\overline{G}_\Gamma = < \sigma_1, \ldots, \sigma_n; < \sigma_i\sigma_j >^{m_{ij}} = < \sigma_j\sigma_i >^{m_{ji}}, \sigma_i^2 = 1, i, j \in \overline{1,n} > \tag{2}$$

Если группа $\overline{G}_\Gamma$ конечна, то группа G_Γ называется группой Артина конечного типа. Данному классу групп принадлежат группы кос β_{n+1}, в которых в 1969 г. Гарсайдом Ф.А. была решена проблема сопряженности слов [1]. Брискорном Э. и Сайто К. была доказана разрешимость проблем равенства и сопряженности слов в группах Артина конечного типа [2] .

Шупп П. и Аппель К. определили широкие классы групп Артина большого типа ($m_{ij} \geq 3$) и групп экстрабольшого типа ($m_{ij} > 3$).

[1]Исследование выполнено по гранту РФФИ №19-41-710002_р_а