УДК 512.57

Конечные алгебры мультиопераций

Н. А. Перязев (Россия, г. Санкт-Петербург)
Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)
e-mail: nikolai.baikal@gmail.com

Finite Algebras of Multioperations

N. A. Peryazev (Russia, Saint-Petersburg)
The First Electrotechnical University ETU «LETI»
e-mail: nikolai.baikal@gmail.com

Исследования алгебр n-местных операций и мультиопераций (многозначных частичных операций) на k-элементных множествах велись с одной стороны при фиксированном n и произвольном k, с другой стороны при произвольном n и фиксированном k.

По первому направлению первоначально изучались алгебры унарных операций и мультиопераций (в этом случае алгебра операций является моноидом преобразований, а алгебра мультиопераций есть алгебра бинарных отношений). Алгебры n-местных операций, по-видимому, впервые рассмотрел К. Менгер [1]. В таких алгебрах выполняется тождество суперассоциативности (сверхассоциативности). В дальнейшем часто алгебры обладающие этим свойством называют алгебрами Менгера. Алгебры n-местных отношений со свойством суперассоциативности изучались В.С. Трохименко (смотри, например, [2]).

Второе направление имеет тесные связи с теорией клонов (алгебры операций без фиксации местности) [3]. Отметим работы А.Г. Пинуса, в которых такие алгебры используются для исследования клонов, например [4]. В работе [6] алгебры n-местных мультиопераций использовались при изучении суперклонов. Изучение алгебр n-местных мультиопераций и их решеток начато в работе [5].

Пусть A — произвольное множество, $B(A)$ — множество всех подмножеств A, n — натуральное число. Отображение f декартовой степени A^n в $B(A)$ называется n-местной мультиоперацией на A. Если при этом все образы одноэлементные, то f называем n-местной операцией. Для множества всех n-местных мультиопераций на A используем обозначение $\mathcal{M}_A^{(n)}$, а для множества всех n-местных операций — $\mathcal{O}_A^{(n)}$. Очевидно выполняется $\mathcal{O}_A^{(n)} \subset \mathcal{M}_A^{(n)}$. Ранг k мультиоперации определим как $k = |A|$.

Определим следующие n-местные мультиоперации так:
пустая мультиоперация $o^n(a_1, \ldots, a_n) = \varnothing$;
мультиоперация проектирования по i аргументу $e_i^n(a_1, \ldots, a_n) = \{a_i\}$.

Определим следующие метаоперации на множестве n-местных мультиопераций:
Суперпозиция мультиопераций $f \in \mathcal{M}_A^{(n)}$ и $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{M}_A^{(n)}$

$$(f * f_1, \ldots, f_n)(a_1, \ldots, a_n) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, \ldots, a_n)} f(b_1, \ldots, b_n).$$

Разрешимость $f \in \mathcal{M}_A^{(n)}$ по i аргументу, где $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$(\mu_i f)(a_1, \ldots, a_n) = \{a \mid a_i \in f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_n)\}.$$

Легко видно, что:

$$b \in (\mu_i f)(a_1, \ldots, a_{i-1}, c, a_{i+1}, \ldots, a_n) \iff c \in f(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_n).$$

Определение 1. *Алгеброй n-местных операций над множеством A при $n \geq 2$ называется любое подмножество $K \subseteq \mathcal{O}_A^{(n)}$, содержащее все n-местные операции проектирования и замкнутое относительно метаоперации суперпозиции.*

Введем обозначение $[K]_n$ для алгебры n-местных операций над A порожденной множеством $K \subseteq \mathcal{O}_A^{(n)}$ и V_k^n для упорядоченного по включению множества всех алгебр n-местных операций ранга k (этот порядок является решеточным).

Определение 2. *Алгеброй n-местных мультиопераций над множеством A при $n \geq 2$ называется любое подмножество $R \subseteq \mathcal{M}_A^{(n)}$, содержащее все n-местные мультиоперации проектирования, пустую n-местную мультиоперацию и замкнутое относительно метаопераций суперпозиции и разрешимости по первому аргументу.*

Введем обозначение $\langle R \rangle_n$ для алгебры n-местных мультиопераций над A порожденной множеством $R \subseteq \mathcal{M}_A^{(n)}$ и W_k^n для упорядоченного по включению множества всех алгебр n-местных мультиопераций ранга k (порядок так же решеточный).

Класс алгебр $\mathcal{P}_n$ определяется в сигнатуре $\Sigma_n = \langle s, \pi, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n, \perp \rangle$, $n \geq 2$, где s и μ являются $(n+1)$-местной и унарной функциональными символами, а остальные нульместными. В этой сигнатуре термально определим следующие символы операций и предикатов:

$\top = s(\pi(\varepsilon_2), \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_1)$;

$\pi_1(x) = \pi(x)$;

$\pi_i(x) = s(\pi(s(x, \varepsilon_i, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_{i+1}, \ldots, \varepsilon_n)), \varepsilon_i, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_{i+1}, \ldots, \varepsilon_n)$ для $i \in \{2, \ldots, n\}$;

$x \wedge y = s(s(\varepsilon_1, \pi(\varepsilon_1), \ldots, \pi(\varepsilon_n)), x, y, \ldots, y)$;

$x \leq y \iff x \wedge y = x$.

Класс алгебр $\mathcal{P}_n$ задается следующими аксиомами:

1. $x \wedge x = x$;
2. $x \wedge y = y \wedge x$;
3. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$;
4. $x \wedge \top = x$;
5. $s(s(x, y_1, \ldots, y_n), z_1, \ldots, z_n) \leq s(x, s(y_1, z_1, \ldots, z_n), \ldots, s(y_n, z_1, \ldots, z_n))$;
6. $s(\varepsilon_i, x_1, \ldots, x_n) = s(\top, x_1, \ldots, x_1) \wedge \ldots \wedge s(\top, x_{i-1}, \ldots, x_{i-1}) \wedge x_i \wedge \wedge s(\top, x_{i+1}, \ldots, x_{i+1}) \wedge \ldots \wedge s(\top, x_n, \ldots, x_n)$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$;
7. $s(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \perp$ при $x_i = \perp$ хоть для одного $i \in \{0, \ldots, n\}$;
8. $\pi(\perp) = \perp$;
9. $\pi_i(\top) = \top$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$;
10. $\pi_i(\varepsilon_i) = \varepsilon_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$;
11. $\pi_i(\pi_i(x)) = x$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$;
12. $\pi_i(x \wedge y) = \pi_i(x) \wedge \pi_i(y)$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$;
13. $s(x, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{i-1}, \varepsilon_j, \varepsilon_{i+1}, \ldots, \varepsilon_{j-1}, \varepsilon_i, \varepsilon_{j+1}, \ldots, \varepsilon_n) = \pi_i(\pi_j(\pi_i(x)))$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ и $i \neq j$;
14. $\pi_j(\varepsilon_i) = s(\top, (\varepsilon_j \wedge \varepsilon_i), \ldots, (\varepsilon_j \wedge \varepsilon_i))$ для всех $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ и $i \neq j$;
15. $s(s(x, y_1, \ldots, y_n), \varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_n}) = s(x, s(y_1, \varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_n}), \ldots, s(y_n, \varepsilon_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_n}))$ для всех $i_1, \ldots, i_n \in \{1, \ldots, n\}$;
16. $\pi_j\Big(s(x_0, x_1, \ldots, x_n)\Big) \leq \bigwedge\limits_{i=1}^{n} s\Big(\pi_j(x_i), \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{j-1}, s(\pi_i(x_0), \top, \ldots, \top, \underbrace{\varepsilon_j}_{i}, \top, \ldots, \top), \varepsilon_{j+1}, \ldots, \varepsilon_n\Big)$ для всех $j \in \{1, \ldots, n\}$;

17. $s(x_0,\ldots,x_{i-1},x_i\wedge y_i,x_{i+1},\ldots,x_n)\le s(x_0,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)\wedge$
$\wedge\, s(x_0,\ldots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\ldots,x_n)$ для всех $i\in\{1,\ldots,n\}$.

18. $x\wedge s(y,z_1,\ldots,z_n)\le s\Big((s(x,s(\pi_1(z_1),\varepsilon_1,\top,\ldots,\top),\ldots,s(\pi_n(z_n),\top,\ldots,\top,\varepsilon_n))\wedge y),$
$(s(\pi_1(y),x,\top,\ldots,\top)\wedge z_1),\ldots,(s(\pi_n(y),\top,\ldots,\top,x)\wedge z_n)\Big)$.

Сделаем следующие определения в алгебре n-местных мультиопераций: n-местную полную мультиоперацию u^n, бинарную операцию пересечения $(f\cap g)$, а также отношение включения $f\subseteq g$ на мультиоперациях:

$u^n(a_1,\ldots,a_n)=A$, для любых $a_1,\ldots,a_n\in A$;

$(f\cap g)(a_1,\ldots,a_n)=f(a_1,\ldots,a_n)\cap g(a_1,\ldots,a_n)$ для любых $a_1,\ldots,a_n\in A$;

$f\subseteq g\Longleftrightarrow f(a_1,\ldots,a_n)\subseteq g(a_1,\ldots,a_n)$, для любых $a_1,\ldots,a_n\in A$.

Достаточно очевидно, что пересечение является коммутативной, ассоциативной и идемпотентной операцией, а включение является частичным порядком, соответствующим этому пересечению, причем o^n выступает в качестве наименьшего элемента, а u^n в качестве наибольшего элемента.

Лемма 1. *Верны следующие равенства:*
1. $u^n=((\mu_1e_2^n)*e_1^n,\ldots,e_1^n)$;
2. $(\mu_if)=\Big(\big(\mu_1(f*e_i^n,e_2^n,\ldots,e_{i-1}^n,e_1^n,e_{i+1}^n,\ldots,e_n^n)\big)*e_i^n,e_2^n,\ldots,e_{i-1}^n,e_1^n,e_{i+1}^n,\ldots,e_n^n\Big)$ *для* $i\in\{2,\ldots,n\}$;
3. $(f\cap g)=\big((e_1^n*(\mu_1e_1^n),\ldots,(\mu_1e_n^n))*f,g,\ldots,g\big)$.

Определим интерпретацию сигнатуры Σ_n в алгебрах n-местных мультиопераций: s — соответствует операция суперпозиции, π — соответствует операция разрешимости по 1-му аргументу, ε_i — соответствует константная операция, определяющая проекцию по i аргументу, $\perp$ — соответствует константная операция определяющая пустую мультиоперацию.

Теорема 1. *Если $\mathcal{R}$ алгебра n-местных мультиопераций, то $\mathcal{R}\in\mathcal{P}_n$.*

Приведем ряд утверждений, которые следуют из аксиом класса $\mathcal{P}_n$ и при выше определенной интерпретации сигнатуры верны во всех алгебрах n-местных мультиопераций.

Теорема 2. *В любой алгебре класса $\mathcal{P}_n$ выполняются утверждения:*
1. $\perp\le x$;
2. $\pi_i(\perp)=\perp$ *для* $i\in\{1,\ldots,n\}$;
3. $\pi_j(\varepsilon_i)=\pi_i(\varepsilon_j)$ *для* $j,i\in\{1,\ldots,n\}$;
4. $s(x,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)=x$;
5. $\pi_i(\pi_j(\pi_i(x)))=\pi_j(\pi_i(\pi_j(x)))$ *для* $j,i\in\{1,\ldots,n\}$;
6. $x\le y\Rightarrow\pi_i(x)\le\pi_i(y)$ *для* $i\in\{1,\ldots,n\}$;
7. $s(x_0\wedge y_0,x_1,\ldots,x_n)\le s(x_0,x_1,\ldots,x_n)\wedge s(y_0,x_1,\ldots,x_n)$;
8. $x_i\le y_i$ *для всех* $i\in\{0,\ldots,n\}\Rightarrow s(x_0,\ldots,x_n)\le s(y_0,\ldots,y_n)$.

Основным инструментом при исследовании алгебр мультиопераций при фиксированном ранге и произвольной размерности является теория Галуа. Далее следуем [6].

Определим тождество полуперестановочности для $f\in\mathcal{M}_A^{(n)}$ и $g\in\mathcal{M}_A^{(m)}$:

$$(f*(g*e_1^{nm},\ldots,e_m^{nm}),\ldots,(g*e_{(n-1)m+1}^{nm},\ldots,e_{nm}^{nm}))\subseteq$$
$$\subseteq(g*(f*e_1^{nm},e_{m+1}^{nm},\ldots,e_{(n-1)m+1}^{nm}),\ldots,(f*e_m^{nm},e_{2m}^{nm},\ldots,e_{nm}^{nm})).$$

Будем говорить, что f *стабильна относительно* g и g *нормальна относительно* f.

Пусть $g \in \mathcal{M}_A^{(m)}$ и $f \in \mathcal{O}_A^{(n)}$. Тогда

$$S^n(g) = \{f \mid f \in \mathcal{O}_A^{(n)} \text{ и } f \text{ стабильна относительно } g\} \text{ — } n\text{-}\textit{стабилизатор } g;$$

$$N^m(f) = \{g \mid g \in \mathcal{M}_A^{(m)} \text{ и } g \text{ нормальна относительно } f\} \text{ — } m\text{-}\textit{нормализатор } f.$$

Пусть $R \subseteq \mathcal{M}_A^{(m)}$ и $K \subseteq \mathcal{O}_A^{(n)}$. Тогда

$$S^n(R) = \bigcap_{g \in R} S^n(g) \text{ — } n\text{-}\textit{стабилизатор} \text{ множества мультиопераций } R;$$

$$N^m(K) = \bigcap_{f \in K} N^m(f) \text{ — } m\text{-}\textit{нормализатор} \text{ множества операций } K.$$

Теорема 3.
Пара соответствий S^n и N^m определяет связь Галуа между множествами V_k^n и W_k^m.

Рассмотрим подробнее вариант ранга $k = 2$.

Теорема 4.
1) Пара соответствий S^n и N^m при $4 \leq n \leq m+1$ является совершенной в V_2^n связью Галуа.
2) Пара соответствий S^n и N^m при $n \geq m+1$ является совершенной в W_2^m связью Галуа.

Для ранга 2 и $n \geq 4$ верно:

Следствие 1.
1) Для любого множества $K \subseteq \mathcal{O}_A^{(n)}$ выполняется $[K]_n = S^n(N^m(K))$ для $n \leq m+1$.
2) Для любого множества $R \subseteq \mathcal{M}_A^{(m)}$ выполняется $\langle R \rangle_m = N^m(S^n(R))$ для $n \geq m+1$.
3) Упорядоченные множества V_2^n и W_2^{n-1} антиизоморфны.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Menger K. The algebra of functions: past. prresent, future // Rend. Matem. 1961. 20 № 3–4. P. 409–430.

2. Трохименко В. С. О некоторых алгебрах Менгера отношений // Известия высших учебных заведений. Математика. 1978. № 2. С. 87—95.

3. Poschel R, Kaluzhnin L. A. Function and Relaction Algebras. — Berlin, 1979. 259 p.

4. Пинус А. Г. О фрагментах функциональных клонов // Алгебра и логика. 2017. Том 56 № 4. С. 477—485.

5. Перязев Н. А., Шаранхаев И. К. Алгебры мультиопераций // Algebra and Model Theory 11. Collection of hahers. — Novosibirsk: NSTU Publisher, 2007. P. 102–111.

6. Перязев Н. А. Алгебры n-местных операций и мультиопераций // XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения доктора физико-математических наук, профессора Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова Коробова Николая Михайловича.: тезисы докладов. Международная конференция (Тула, 28–31 мая 2018 г.) — Тула, 2018. С. 113–116.