8. Honda T. Formal groups and zeta-functions // Osaka Journal of Mathematics. 1968. Vol. 5, № 2. P.199-213.

9. Глазунов Н. М. Экстремальные формы и жесткость в арифметической геометрии и динамике // Чебышевский сборник. 2015. Том 16, № 3. С. 124-146.

10. Глазунов Н. М., Научная статья в сети Интернет [Электронный ресурс], Режим доступа: http://arxiv.org/abs/1901.01957.

УДК 517.5

Весовые неравенства для потенциала Данкля–Рисса[1]

Д. В. Горбачев (Россия, Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: dvgmail@mail.ru
В. И. Иванов (Россия, Тула)
Тульский государственный университет
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Weight inequalities for the potential of Dunkl–Rissa

D. V. Gorbachev (Russia, Tula)
Tula state University
e-mail: dvgmail@mail.ru
V. I. Ivanov (Russia, Tula)
Tula state University
e-mail: ivaleryi@mail.ru

Пусть $\mathbb{R}^d$ — действительное d-мерное евклидово пространство со скалярным произведением (x, y) и нормой $|x| = \sqrt{(x,x)}$, $d\mu(x) = (2\pi)^{-d/2}\,dx$ — нормированная мера Лебега на $\mathbb{R}^d$, $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < \infty$, — пространства Лебега с нормой $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p\,d\mu\right)^{1/p} < \infty$, $C_b(\mathbb{R}^d)$ — пространство непрерывных ограниченных функций, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ — пространство Шварца, $\mathcal{F}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i(x,y)}\,d\mu(x)$ — преобразование Фурье и Δ — оператор Лапласа.

Потенциал Рисса или дробный интеграл I_α определяется как интегральный оператор

$$I_\alpha f(x) = (\gamma_\alpha)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)|x-y|^{\alpha-d}\,d\mu(y) = (\gamma_\alpha)^{-1}\int_{\mathbb{R}^d} \tau^{-y}f(x)|y|^{\alpha-d}\,d\mu(y),$$

где $0 < \alpha < d$, $\gamma_\alpha = 2^{\alpha-d/2}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma((d-\alpha)/2)$, и $\tau^y f(x) = f(x+y)$ — оператор сдвига.

Этот оператор впервые исследовал О. Фростман [1]. Многие важные его свойства были доказаны М. Риссом [2]. Формулы для преобразований Фурье $\mathcal{F}(I_\alpha f) = |\cdot|^{-\alpha}\mathcal{F}(f)$, $\mathcal{F}((-\Delta)^{\alpha/2}f) = |\cdot|^{\alpha}\mathcal{F}(f)$, указывают, что потенциал Рисса является обратным оператором для дробной степени оператора Лапласа.

Весовая (L^p, L^q)-ограниченность потенциала Рисса записывается в виде неравенства Стейна–Вейса

$$\big\||x|^{-\gamma}I_\alpha f(x)\big\|_q \le \mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)\big\||x|^{\beta}f(x)\big\|_p \qquad (1)$$

с константой $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ и $1 < p \leqslant q < \infty$.

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00199).

Условия конечности константы $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ хорошо известны.

Теорема 1. *Пусть* $d\in\mathbb{N}$, $1<p\leqslant q<\infty$, $\gamma<\frac{d}{q}$, $\beta<\frac{d}{p'}$, $0<\alpha<d$, *и* $\alpha-\gamma-\beta=d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$. *Константа* $\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ *в неравенстве* (1) *конечна, если* $p=q$ *или* $p<q$ *и* $\alpha\geqslant d(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})$.

Теорема 1 была доказана Г.Х. Харди и Дж.И. Литлвудом для $d=1$, С. Соболевым для $d>1$ и $\gamma=\beta=0$, Е.М. Стейном и Г. Вейсом в общем случае.

Неравенство Стейна–Вейса (1) в эквивалентной форме может быть записано в виде неравенства Харди–Реллиха–Соболева

$$\big\||x|^{-\gamma}f(x)\big\|_q\leqslant\mathbf{c}(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)\big\||x|^{\beta}(-\Delta)^{\alpha/2}f(x)\big\|_p.$$

Одним из важных обобщений преобразования Фурье $\mathcal{F}$ является преобразование Данкля $\mathcal{F}_k$ (см. [3, 4]). Аналог потенциала Рисса для преобразования Данкля, исследуемый в статье, и называемый нами D-потенциалом Рисса, определили С. Тангавелу и Ю. Шу [5].

Пусть $R\subset\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ — система корней, R_+ — положительная подсистема R, $G(R)\subset O(d)$ — группа отражений, образованная отражениями $\{\sigma_a\colon a\in R\}$, где σ_a — отражение относительно гиперплоскости $(a,x)=0$, $k\colon R\to\mathbb{R}_+$ — функция кратности, инвариантная относительно группы G, $v_k(x)=\prod_{a\in R_+}|(a,x)|^{2k(a)}$, $\quad d\mu_k(x)=c_kv_k(x)dx$ — вес и мера Данкля, где $c_k^{-1}=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|x|^2/2}v_k(x)\,dx$ — интеграл Макдональда–Мета–Сельберга, $L^p(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$, $1\le p<\infty$, — пространства Лебега с нормой $\|f\|_{p,d\mu_k}=\Big(\int_{\mathbb{R}^d}|f|^p\,d\mu_k\Big)^{1/p}<\infty$,

$$T_jf(x)=D_jf(x)+\sum_{a\in R_+}k(a)(a,e_j)\,\frac{f(x)-f(\sigma_ax)}{(a,x)},\quad j=1,\ldots,d,$$

—дифференциально-разностные операторы Данкля и $\Delta_k=\sum_{j=1}^dT_j^2$ — лапласиан Данкля.

Ядро Данкля $E_k(x,y)$ является единственным решением системы

$$T_jf(x)=y_jf(x),\quad j=1,\ldots,d,\qquad f(0)=1.$$

Функция $e_k(x,y)=E_k(x,iy)$ играет роль обобщенной экспоненты. Ее свойства подобны свойствам классической экспоненты $e^{i(x,y)}$. Многие из них вытекают из представления Реслер $e_k(x,y)=\int_{\mathbb{R}^d}e^{i(\xi,y)}\,d\mu_x^k(\xi)$, где μ_x^k — вероятностная мера Бореля с носителем в выпуклой оболочке G-орбиты x в $\mathbb{R}^d$. В частности, $|e_k(x,y)|\le1$ и $\operatorname{supp}\mu_x^k\subset B_{|x|}$, где B_r — евклидов шар радиуса r с центром в нуле.

Для $f\in L^1(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$ преобразование Данкля определяется равенством

$$\mathcal{F}_k(f)(y)=\int_{\mathbb{R}^d}f(x)\overline{e_k(x,y)}\,d\mu_k(x).$$

Если $k\equiv0$, то $\mathcal{F}_0$ совпадает с преобразованием Фурье $\mathcal{F}$. Преобразование Данкля является изометрией в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$. Равенство Планшереля имеет вид $\|f\|_{2,d\mu_k}=\|\mathcal{F}_k(f)\|_{2,d\mu_k}$.

М. Реслер определила оператор обобщенного сдвига τ^y, $y\in\mathbb{R}^d$, на пространстве $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$ равенством $\mathcal{F}_k(\tau^yf)(z)=e_k(y,z)\mathcal{F}_k(f)(z)$ или

$$\tau^yf(x)=\int_{\mathbb{R}^d}e_k(y,z)e_k(x,z)\mathcal{F}_k(f)(z)\,d\mu_k(z).\tag{2}$$

Он действует из $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$ в $L^2(\mathbb{R}^d,d\mu_k)$ и $\|\tau^y\|_{2\to2}=1$.

Если $k\equiv0$, то $\tau^yf(x)=f(x+y)$. Если $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, то $\tau^yf(x)\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и равенство (2) справедливо поточечно. К. Тримеш распространил τ^y на $C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Например, $\tau^y1=1$. В общем случае, τ^y не является положительным оператором и вопрос о его L_p-ограниченности остается открытым.

С. Тангавелу и Ю. Шу [5] определили D-потенциал Рисса на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ как интегральный оператор

$$I_\alpha^k f(x) = (\gamma_\alpha^k)^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} \tau^{-y} f(x) |y|^{\alpha-d_k}\, d\mu_k(y), \tag{3}$$

где $0 < \alpha < d_k$, $\gamma_\alpha^k = 2^{\alpha-d_k/2}\Gamma(\alpha/2)/\Gamma((d_k-\alpha)/2)$, $d_k = 2\lambda_k + 2$ и $\lambda_k = d/2 - 1 + \sum_{a\in R_+} k(a)$. Как и для потенциала Рисса для него справедливо равенство $\mathcal{F}_k(I_\alpha^k f) = |\cdot|^{-\alpha}\mathcal{F}_k(f)$.

Потенциал Рисса — положительный оператор. Из определения (3) положительность D-потенциала Рисса не вытекает. Нам удалось показать, что D-потенциал Рисса также является положительным оператором, записав его с помощью положительного оператора обобщенного сдвига.

Пусть $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d \colon |x| = 1\}$ — евклидова сфера, $x = rx'$, $r = |x| \in \mathbb{R}_+$, $x' \in \mathbb{S}^{d-1}$, $\lambda \geq -1/2$, $b_\lambda^{-1} = 2^\lambda\Gamma(\lambda+1)$, $d\nu_\lambda(r) = b_\lambda r^{2\lambda+1}\, dr$ — мера на $\mathbb{R}_+$, $d\sigma_k(x') = a_k v_k(x')\, dx'$ — вероятностная мера на $\mathbb{S}^{d-1}$. Отметим, что $d\mu_k(x) = d\nu_{\lambda_k}(r)\, d\sigma_k(x')$.

В [6] на пространстве Шварца нами определен положительный оператор обобщенного сдвига равенством

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \tau^{ty'} f(x)\, d\sigma_k(y') = \int_{\mathbb{R}^d} j_{\lambda_k}(t|z|) e_k(x,z) \mathcal{F}_k(f)(z)\, d\mu_k(z).$$

Его положительность вытекает из представления Реслер

$$T^t f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)\, d\sigma_{x,t}^k(z),$$

где $\sigma_{x,t}^k$ — вероятностная мера Бореля с носителем

$$\operatorname{supp} \sigma_{x,t}^k \subset \bigcup_{g\in G} \{z \in \mathbb{R}^d \colon |z - gx| \leq t\}.$$

В частности, $T^t 1 = 1$. Если $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p \leq \infty$, то $\|T^t f\|_{p,d\mu_k} \leq \|f\|_{p,d\mu_k}$ и оператор T^t может быть продолжен на пространства $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu_k)$ при $1 \leqslant p < \infty$ и пространство $C_b(\mathbb{R}^d)$ при $p = \infty$ с сохранением нормы.

D-потенциал Рисса может быть записан следующим образом

$$I_\alpha^k f(x) = (\gamma_\alpha^k)^{-1} \int_0^\infty T^t f(x) t^{\alpha-d_k}\, d\nu_{\lambda_k}(t). \tag{4}$$

Из представления (4) и L_p-ограниченности оператора T^t вытекает положительность (4) на всех функциях из L_p, на которых он определен. Поэтому при исследовании весовой (L_p, L_q)-ограниченности D-потенциала Рисса можно ограничиться неотрицательными функциями.

Неравенство Стейна–Вейса для D-потенциала Рисса примет вид

$$\big\||x|^{-\gamma} I_\alpha^k f(x)\big\|_{q,d\mu_k} \leq \mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)\big\||x|^\beta f(x)\big\|_{p,d\mu_k}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{5}$$

с константой $\mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ и $1 < p \leqslant q < \infty$.

В [7] нами доказан полный аналог теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть $d \in \mathbb{N}$, k — произвольная функция кратности, $1 < p \leqslant q < \infty$, $\gamma < \frac{d_k}{q}$, $\beta < \frac{d_k}{p'}$, $0 < \alpha < d_k$, и $\alpha - \gamma - \beta = d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$. Константа $\mathbf{c}_k(\alpha,\beta,\gamma,p,q,d)$ в неравенстве (5) конечна, если $p = q$ или $p < q$ и $\alpha \geqslant d_k(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})$.*

На конференции "Follow-up Approximation Theory and Function Spaces" в Centre de Recerca Matemàtica (CRM, Barcelona, 2017) М.Л. Гольдман поставил вопрос об условиях (L_p, L_q)-ограниченности D-потенциала Рисса с кусочно-степенными весами. Настоящий доклад посвящена ответу на этот вопрос.

Пусть $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |x| \leqslant 1\}$, $B_1^c = \mathbb{R}^d \setminus B_1$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$,

$$u_{-\gamma}(x) = |x|^{-\gamma_1}\chi_{B_1}(x) + |x|^{-\gamma_2}\chi_{B_1^c}(x), \quad u_\beta(x) = |x|^{\beta_1}\chi_{B_1}(x) + |x|^{\beta_2}\chi_{B_1^c}(x)$$

— кусочно-степенные весовые функции, где $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества $E \subset \mathbb{R}^d$. Рассмотрим неравенство

$$\left\|u_{-\gamma}(x) I_\alpha^k f(x)\right\|_{q,d\mu_k} \leq \mathbf{c}_k(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d)\left\|u_\beta(x) f(x)\right\|_{p,d\mu_k} \tag{6}$$

с константой $\mathbf{c}_k(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d)$ и $1 < p \leq q < \infty$.

Мы доказываем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, k *— произвольная функция кратности,* $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 < \alpha < d_k$. *Константа* $\mathbf{c}_k(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d)$ *в неравенстве* (6) *конечна при* $p = q$ *или при* $p < q$ *и* $\alpha \geqslant d_k\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered} \gamma_1 < \frac{d_k}{q}, \quad \beta_1 < \frac{d_k}{p'}, \quad \alpha - \gamma_2 < \frac{d_k}{q'}, \quad \alpha - \beta_2 < \frac{d_k}{p}, \\ \gamma_1 + \beta_1 \leqslant \alpha - d_k\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big) \leqslant \gamma_2 + \beta_2. \end{gathered} \tag{7}$$

Для доказательства теоремы 3 мы устанавливаем неравенства типа Харди для операторов Харди и Беллмана в лебеговых пространствах с весом Данкля и кусочно-степенными весами, имеющие самостоятельный интерес.

Если в теореме 3 положим $\gamma_1 = \gamma_2$, $\beta_1 = \beta_2$, то получим условия (L_p, L_q)-ограниченности в теореме 2.

В общем случае в теореме 3 при $p < q$ нам не известна необходимость условия $\alpha \geqslant d_k\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$. Необходимость этого условия нам удалось доказать только при $k \equiv 0$.

Теорема 4. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, $k \equiv 0$, $1 < p \leqslant q < \infty$, $0 < \alpha < d$. *Константа* $\mathbf{c}_0(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d)$ *конечна в неравенстве* (6) *тогда и только тогда, когда* $\alpha \geqslant d\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$ *и выполнены условия* (7), *в которых* $d_k = d$.

Таким образом, теорема 4 обобщает теорему 1 и показывает, что все условия на параметры в ней являются необходимыми. Для радиальных функций условие $\alpha \geqslant d_k\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\Big)$ при $p < q$ можно ослабить.

Теорема 5. *Пусть* $d \in \mathbb{N}$, k *— произвольная функция кратности,* $1 < p < q < \infty$, $0 < \alpha < d_k$. *Константа* $\mathbf{c}_k(\alpha, \beta, \gamma, p, q, d)$ *в неравенстве* (6) *конечна на подпространстве радиальных функций тогда и только тогда, когда выполнены условия* (7) и $\alpha \geqslant \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Frostman O. Potentiel d'equilibre et capacite des ensembles avec quelques applications a la theorie des fonctions. These. Communic. Semin. Math. de l'Univ. de Lund., 1935. Vol. 3.

2. Riesz M. L'integrale de Riemann-Liouville et le probleme de Cauchy // Acta Math. 1949. Vol. 81, № 1. P. 1–222.

3. Dunkl C. F. Hankel transforms associated to finite reflections groups // Contemp. Math. 1992. Vol. 138. P. 123–138.

4. Rösler M. Dunkl operators. Theory and applications, in Orthogonal Polynomials and Special Functions. Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 2003. Vol. 1817. P. 93–135.

5. Thangavelu S., Xu Y. Riesz transform and Riesz potentials for Dunkl transform // J. Comput. Appl. Math. 2007. Vol. 199. P. 181–195.

6. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Positive L_p-bounded Dunkl-type generalized translation operator and its applications // Constr. Approx. 2018. P. 1–51.
doi.org/10.1007/s00365-018-9435-5

7. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Tikhonov S. Yu. Riesz potential and maximal function for Dunkl transform. Preprint CRM, Barcelona, 2018. № 1238. P. 1–28.

УДК 511.9

Кое-что о Мишеле Деза

В. П. Гришухин (Россия, Москва)
Центральный экономико-математический институт РАН
e-mail: vgrishukhin@mail.ru

Something about Michel Deza

V. P. Grishukhin (Russia, Moscow)
Central economics and mathematics institute RAS
e-mail: vgrishukhin@mail.ru

М. Деза окончил МГУ, кажется, в 1963 году и поступил работать в ЦЭМИ, где я работаю сейчас. Но я поступил в ЦЭМИ в 1968 году. Еще будучи студентом МГУ Михаил Ефимович Тылкин поменял свою фамилию на Деза. Он очень рано женился, и вскоре у него родилась дочь, которая, по моему, до сих пор живет в Москве.

В 70-х годах Деза развелся, женился на француженке и вскоре эмигрировал во Францию, и стал Мишелем Мари Деза. Там у него родились два сына. Один из них, Антуан Деза, стал математиком. У меня с ним и Мишелем есть совместная статья [8]. В те времена эмигрантам был запрещен въезд в СССР. И только в начале перестройки, в 1989г., Деза впервые смог вернуться в Москву. В этот год он выступил на семинаре А. Кельманса по дискретной математики в институте проблем управления (ИПУ). Деза рассказал о проблеме конуса разрезных метрик (кратко, разрезного конуса).

В своей, еще студенческой работе [1], М. Деза поставил вопрос о нахождении условий, при которых метрика на конечном множестве вложима в единичный куб. Он привел некоторые неравенства, которые необходимы для вложимости. Он назвал их *неравенствами f-угольника*, так как они обобщают неравенства треугольника, которые превращают расстояние в метрику. Неравенства f-угольника являются частным случаем следующих *гиперметрических* неравенств. Пусть $d_{ij} = d_{ji}$ есть расстояние между точками i и j конечного множества $N = \{1, 2, ..., n\}$. Тогда гиперметрческие неравенства имеют вид

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} b_i b_j d_{ij} \leqslant 0,$$