Сложность исчисления Ламбека

М. Р. Пентус

1 Лекция 1

1.1 Несеквенциальное исчисление Ламбека

Определение 1.1. Элементы счётного множества $\mathrm{Pr} \rightleftharpoons \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$ называются *примитивными типами.*

Определение 1.2. *Типы* исчисления Ламбека строятся из элементов множества Pr с помощью трёх бинарных операторов $\cdot$, $\backslash$ и $/$. Множество всех типов обозначается Tp. Типы будем обозначать заглавными буквами из начала латинского алфавита.

Определение 1.3. Рассмотрим исчисление $\mathrm{L_H}$ (см. [1]), выводимыми объектами которого являются формулы вида $A \to B$, где $A \in \mathrm{Tp}$ и $B \in \mathrm{Tp}$. Аксиомы исчисления $\mathrm{L_H}$ имеют вид $A \to A$, $(A \cdot B) \cdot C \to A \cdot (B \cdot C)$ и $A \cdot (B \cdot C) \to (A \cdot B) \cdot C$, а выводы строятся с помощью следующих правил:

$$\frac{A \cdot C \to B}{C \to A \setminus B,} \qquad \frac{C \cdot A \to B}{C \to B \,/\, A,} \qquad \frac{C \to A \setminus B}{A \cdot C \to B,} \qquad \frac{C \to B \,/\, A}{C \cdot A \to B,} \qquad \frac{A \to B \quad B \to C}{A \to C.}$$

В каждом правиле формула под чертой называется *заключением* данного правила, а формулы над чертой (одна или две) называются *посылками* данного правила. Множество выводимых формул данного исчисления определяется как наименьшее множество, содержащее все аксиомы и замкнутое относительно правил вывода (то есть удовлетворяющее следующему условию: если все посылки некоторого правила принадлежат этому множеству, то и заключение данного правила принадлежит этому множеству).

Исчисление $\mathrm{L_H}$ называется *исчислением Ламбека.* Будем писать $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$, если формула $A \to B$ выводима в исчислении $\mathrm{L_H}$.

Упражнение 1.4. $\mathrm{L_H} \vdash (A \,/\, B) \cdot B \to A$.

Упражнение 1.5. $\mathrm{L_H} \vdash B \cdot (B \setminus A) \to A$.

Пример 1.6. $\mathrm{L_H} \vdash B \to A \,/\, (B \setminus A)$:

$$\cfrac{\cfrac{B \setminus A \to B \setminus A}{B \cdot (B \setminus A) \to A}}{B \to A \,/\, (B \setminus A).}$$

Замечание 1.7. В математической лингвистике исчисление Ламбека используется для задания множества корректных предложений. В специальном словаре устанавливается соответствие между словоформами и типами исчисления Ламбека. Для наглядности обозначим p_1, p_2 и p_3 через s (предложение), np (именная группа) и n (именная группа без артикля). Пусть в словаре имеются следующие записи: $np \triangleright$ *Mary*, $np \triangleright$ *John*, $np \triangleright$ *Africa*, $(np \setminus s) \triangleright$ *smiles*, $(np \setminus s) \triangleright$ *sleeps*, $((np \setminus s) \setminus (np \setminus s)) \triangleright$ *charmingly*, $((np \setminus s) / np) \triangleright$ *reads*, $n \triangleright$ *book*, $(np / n) \triangleright$ *a*, $(n / n) \triangleright$ *strange*, $(n / n) \triangleright$ *green*, $((s \setminus s) / s) \triangleright$ *whenever*, $(s \,/\, (np \setminus s)) \triangleright$ *he*, $(s \,/\, (np \setminus s)) \triangleright$ *she*, $((s \,/\, np) \setminus s) \triangleright$ *him*, $((s \,/\, np) \setminus s) \triangleright$ *her*. $(np \,/\, n) \triangleright$ *this*, $np \triangleright$ *this*. Тогда выводимость $np \cdot (np \setminus s) \to s$ показывает, что *Mary smiles* является предложением.

Упражнение 1.8. $\mathrm{L_H} \vdash (A \setminus B) \cdot C \to A \setminus (B \cdot C)$.
Упражнение 1.9. $\mathrm{L_H} \vdash A \cdot (B \setminus C) \to (B \,/\, A) \setminus C$.

Теорема 1.10. *Если* $\mathrm{L_H} \vdash A_1 \to A_2$, *то* $\mathrm{L_H} \vdash A_1 \cdot B \to A_2 \cdot B$, $\mathrm{L_H} \vdash B \cdot A_1 \to B \cdot A_2$, $\mathrm{L_H} \vdash A_1/B \to A_2/B$, $\mathrm{L_H} \vdash B/A_2 \to B/A_1$, $\mathrm{L_H} \vdash B\backslash A_1 \to B\backslash A_2$, $\mathrm{L_H} \vdash A_2\backslash B \to A_1\backslash B$.

Определение 1.11. Типы A и B называются *эквивалентными* (обозначение $A \underset{\mathrm{L_H}}{\leftrightarrow} B$), если $\mathrm{L_H} \vdash A \to B$ и $\mathrm{L_H} \vdash B \to A$. Для краткости будем вместо $\underset{\mathrm{L_H}}{\leftrightarrow}$ использовать просто знак $\leftrightarrow$.
Упражнение 1.12. $(A \setminus B) \,/\, C \leftrightarrow A \setminus (B \,/\, C)$.
Упражнение 1.13. $A \,/\, (B \cdot C) \leftrightarrow (A \,/\, C) \,/\, B$.
Упражнение 1.14. $A \cdot (A \setminus (A \cdot B)) \leftrightarrow A \cdot B$.
Упражнение 1.15. $A \setminus (A \cdot (A \setminus B)) \leftrightarrow A \setminus B$.
Упражнение 1.16. $(A \,/\, B) \,/\, (B \,/\, B) \leftrightarrow A \,/\, B$.

1.2 Секвенциальное исчисление Ламбека

Замечание 1.17. Определяемое в этом разделе секвенциальное исчисление поможет установить разрешимость проблемы выводимости в исчислении $\mathrm{L_H}$.
Определение 1.18. Для множества всех конечных последовательностей типов используем обозначение Tp^*, а для множества всех непустых конечных последовательностей типов — Tp^+. Символ Λ будет обозначать пустую последовательность типов. Прописные греческие буквы (кроме Λ и Σ) будем использовать для обозначения произвольных конечных (не обязательно непустых) последовательностей типов. Иногда будем писать $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$ вместо $(\ldots(A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot A_n)$. Если $\Gamma = A_1 \ldots A_n$, то $\bullet\Gamma \rightleftharpoons A_1 \cdot \ldots \cdot A_n$.
Определение 1.19. Определим теперь исчисление L (см. [1]). Выводимыми объектами этого исчисления являются записи вида $A_1, \ldots, A_n \to B$, где $n \geqslant 1$ (такие записи называются *секвенциями*). Интуитивно $A_1, \ldots, A_n \to B$ означает то же, что и $A_1 \cdot \ldots \cdot A_n \to B$. Тип B называется *сукцедентом*, а последовательность $A_1, \ldots, A_n$ — *антецедентом* секвенции $A_1, \ldots, A_n \to B$. Иногда для ясности типы антецедента отделяют друг от друга запятыми.

Аксиомы исчисления L имеют вид $A \to A$. Выводы строятся с помощью следующих правил:

$$\frac{A, \Pi \to B}{\Pi \to A \setminus B}\ (\to \setminus),\ \text{где } \Pi \neq \Lambda, \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, \Pi, (A \setminus B), \Delta \to C}\ (\setminus \to),$$

$$\frac{\Pi, A \to B}{\Pi \to B \,/\, A}\ (\to /),\ \text{где } \Pi \neq \Lambda, \qquad \frac{\Pi \to A \quad \Gamma, B, \Delta \to C}{\Gamma, (B \,/\, A), \Pi, \Delta \to C}\ (/ \to),$$

$$\frac{\Gamma \to A \quad \Delta \to B}{\Gamma, \Delta \to A \cdot B}\ (\to \cdot), \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \to C}{\Gamma, (A \cdot B), \Delta \to C}\ (\cdot \to),$$

$$\frac{\Pi \to B \quad \Gamma, B, \Delta \to A}{\Gamma, \Pi, \Delta \to A}\ (\mathrm{cut}).$$

В каждом правиле секвенция под чертой называется *заключением* данного правила, а секвенции над чертой (одна или две) называются *посылками* данного правила.

Исчисление L называется *секвенциальным исчислением Ламбека* или просто *исчислением Ламбека.*

Пример 1.20. $\mathrm{L} \vdash ((p_1 \setminus p_2) \,/\, p_3) \to (p_1 \setminus (p_2 \,/\, p_3))$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p_3 \to p_3 \qquad \dfrac{p_1 \to p_1 \quad p_2 \to p_2}{p_1, (p_1 \setminus p_2) \to p_2}\,(\setminus \to)}{p_1, ((p_1 \setminus p_2) \,/\, p_3), p_3 \to p_2}\,(/ \to)}{p_1, ((p_1 \setminus p_2) \,/\, p_3) \to (p_2 \,/\, p_3)}\,(\to /)}{((p_1 \setminus p_2) \,/\, p_3) \to (p_1 \setminus (p_2 \,/\, p_3))}\,(\to \setminus).$$

Упражнение 1.21. $\mathrm{L} \vdash (A \,/\, B), (B \,/\, C) \to A \,/\, C$.

1.3 Простые теоретико-доказательственные свойства

Лемма 1.22. *Если* $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$*, то* $\Gamma \neq \Lambda$.

Замечание 1.23. Выводимость секвенции $np, (np \setminus s), ((np \setminus s) \setminus (np \setminus s)) \to s$ показывает, что *Mary smiles charmingly* является предложением языка, заданного в замечении 1.7.

Следующая теорема об устранимости сечения опубликовано И. Ламбеком в работе [1].

Теорема 1.24. *Любую секвенцию, выводимую в исчислении Ламбека, можно вывести без использования правила* (cut).

Теорема 1.25 (свойство подформульности)**.** *Если секвенция* $\Gamma \to A$ *выводима в* L*, то существует такой вывод секвенции* $\Gamma \to A$*, что каждая формула, встречающаяся в этом выводе, является подформулой некторой формулы, встречающейся в секвенции* $\Gamma \to A$.

Теорема 1.26. *Проблема выводимости в* L *разрешима.*

Теорема 1.27. $\mathrm{L} \vdash \Gamma \to A$ *тогда и только тогда, когда* $\mathrm{L_H} \vdash \bullet\Gamma \to A$ *(см.* [1]*).*

Пример 1.28. $\mathrm{L_H} \nvdash p_1 \to p_2 \cdot (p_2 \setminus p_1)$. $\mathrm{L_H} \nvdash p_1 \,/\, (p_2 \setminus p_1) \to p_2$.

Пример 1.29. $\mathrm{L} \vdash B, (A \,/\, B) \to A$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{L_H} \vdash B \cdot (A \,/\, B) \to A$.

Теорема 1.30. *Любую секвенцию, выводимую в исчислении Ламбека, можно вывести без правила* (cut) *так, что все используемые аксиомы имеют вид* $p_i \to p_i$ *(т. е. в аксиомах встречаются только примитивные типы).*

Доказательство. Рассмотрим исчисление, где исключены аксиомы с непримитивными типами и нет правила (cut). Достаточно доказать, что в этом исчислении выводимы все секвенции вида $A \to A$. Сделаем это индукцией по построению типа A.

Случай 1: $A = p_i$.

В этом случае $A \to A$ является аксиомой рассматриваемого исчисления.

Случай 2: $A = B \cdot C$.

По предположению индукции выводимы секвенции $B \to B$ и $C \to C$. Выведем секвенцию $B \cdot C \to B \cdot C$ следующим образом:

$$\dfrac{\dfrac{B \to B \quad C \to C}{BC \to B \cdot C}\,(\to \cdot)}{B \cdot C \to B \cdot C}\,(\cdot \to).$$

Случай 3: $A = B \setminus C$.

По предположению индукции выводимы секвенции $B \to B$ и $C \to C$. Выведем секвенцию $B \setminus C \to B \setminus C$ следующим образом:

$$\dfrac{\dfrac{B \to B \quad C \to C}{B(B \setminus C) \to C}\,(\setminus \to)}{B \setminus C \to B \setminus C}\,(\to \setminus).$$

Случай 4: $A = C \mathbin{/} B$.

По предположению индукции выводимы секвенции $B \to B$ и $C \to C$. Выведем секвенцию $C \mathbin{/} B \to C \mathbin{/} B$ следующим образом:

$$\dfrac{\dfrac{B \to B \quad C \to C}{(C \mathbin{/} B)B \to C}\,(/ \to)}{C \mathbin{/} B \to C \mathbin{/} B}\,(\to /).$$

$\square$

Список литературы

[1] Lambek J. The mathematics of sentence structure // American Mathematical Monthly. — 1958. — Vol. 65, № 3. — P. 154—170. — Русский перевод: Ламбек И. Математическое исследование структуры предложений // Математическая лингвистика: Сборник переводов / Под ред. Ю. А. Шрейдера и др. — М.: Мир, 1964. — С. 47—68.