

УДК 519.718

Асимптотически оптимальные по надежности схемы в базисе, состоящем из функции Вебба, при неисправностях типа 0 на выходах элементов

Алехина Марина Анатольевна¹, Барсукова Оксана Юрьевна²¹ Пензенский государственный технологический университет, e-mail: alekhina@penzgtu.ru² Пензенский государственный университет, e-mail: oksana.barsukova.71@gmail.com

Рассматривается реализация функций k -значной логики ($k \geq 3$) схемами из ненадежных функциональных элементов в полном базисе, состоящем из функции Вебба. Предполагается, что элементы схемы переходят в неисправные состояния независимо друг от друга, подвержены однотипным константным неисправностям типа 0 на выходах. Показано, что при неисправностях типа 0 почти любую функцию k -значной логики можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой, функционирующей с ненадежностью асимптотически равной ненадежности одного базисного элемента. Полученный результат справедлив в двойственном (относительно перестановки, порождаемой функцией Лукашевича) базисе при однотипных константных неисправностях типа $k - 1$ соответственно.

Ключевые слова: функции k -значной логики, ненадежные функциональные элементы, надежность и ненадежность схемы, синтез схем из ненадежных элементов, неисправности на выходах элементов.

Рассматривается реализация функций k -значной логики ($k \geq 3$) схемами из ненадежных элементов в полном базисе B , состоящем из функции Вебба $V_k(x_1, x_2) = \max\{x_1, x_2\} + 1 \pmod k$, а также в двойственном (относительно перестановки, порождаемой функцией $N(x) = k - 1 - x$, которую называют отрицанием Лукашевича) базисе B^* , состоящем из функции $\min\{x_1, x_2\} + k - 1 \pmod k$.

Задача синтеза надежных схем в этих базисах была решена в [1] при инверсных неисправностях на выходах базисных элементов (когда на каждом входном наборе любого из базисных элементов вероятность появления неверного значения на выходе элемента одинакова) и $k = 3$, причем были применены два различных метода синтеза и найдены условия, при которых один метод дает лучшую оценку надежности схем чем другой. В отличие от [1] будем исследовать однотипные константные неисправности типа 0 на выходах элементов и произвольном $k \geq 3$. Предполагается, что элементы схемы переходят в неисправные состояния с вероятностью $\varepsilon \in (0, 1/2)$, независимо друг от друга.

Пусть $k, n \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$. Обозначим через $E_k = \{0, 1, 2, \dots, k - 1\}$, а через P_k — множество всех функций k -значной логики, т.е. функций $f(x_1, \dots, x_n) : (E_k)^n \rightarrow E_k$. Используемые в этой работе понятия и определения можно найти в [1], [2].

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Любую функцию $f \in P_k$ можно реализовать такой схемой S , что $P(S) < \varepsilon + c_1(k)\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, где $\varepsilon_1 = 2^{-2^k}/(27k^8)$, $c_1(k) = 5 \cdot 2^{2^k}$.

Из теоремы 1 следует, что любую функцию из P_k можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически (при $\varepsilon \rightarrow 0$) не больше ε .

Пусть $K(n)$ — множество функций k -значной логики, каждая из которых зависит от переменных $x_1, \dots, x_n$ ($n \geq 1$) и отлична от функций $0, x_1, \dots, x_n$ ($n \geq 1$). Обозначим $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K(n)$. Очевидно, что $|K(n)| = k^{k^n} - n - 1$, а значит, класс $K(n)$ содержит почти все функции из множества $P_k(n)$ (поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k^{k^n} - n - 1}{k^{k^n}} = 1$).

Справедлива теорема 2 о нижней оценке ненадежности схем, реализующих функции из класса K .

Теорема 2. Пусть функция $f \in K$. Тогда для любой схемы S , реализующей f , верно неравенство $P(S) \geq \varepsilon$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/2)$.

Для доказательства теоремы 2 достаточно выделить подсхему из одного элемента, выход которого является выходом схемы, и оценить вероятность появления 0 на любом ненулевом входном наборе схемы.

Из теоремы 2 следует, что любая схема, реализующая функцию $f \in K$, функционирует с ненадежностью, которая не меньше ε . Это означает, что схема, реализующая функцию $f \in K$ и удовлетворяющая условиям теоремы 1, является асимптотически оптимальной по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Поскольку ненадежности двойственных (относительно перестановки, порождаемой функцией $N(x) = k - 1 - x$, которую называют отрицанием Лукашевича) схем равны [3], утверждение, доказанное в базисе B для ненадежности схемы, реализующей функцию f , при неисправностях типа 0 на выходах элементов верно в базисе B^* для ненадежности двойственной схемы, реализующей функцию f^* , при неисправностях типа $k - 1$ на выходах элементов. Следовательно, в базисе B^* при неисправностях типа $k - 1$ на выходах элементов почти любую функцию k -значной логики можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности, которая функционирует с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 17-01-00451-а).

Список литературы

- [1] Алехина М. А., Барсукова О. Ю. Верхняя оценка схем в базисе, состоящем из функции Вебба // Известия высших учебных заведений. Математика. 2015. № 3. С. 15–27.

- [2] Алехина М. А. Рекуррентные соотношения для ненадежностей схем при однотипных константных неисправностях типов 0 и $k-1$ в базисе, состоящем из функции Вебба, в P_k // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2018. № 4. С. 25–30.
- [3] Алехина М. А. Надежность двойственных схем в P_k // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2017. № 1. С. 3–13.

Asymptotically optimal in reliability circuits in a basis consisting of the Webb function with the faults of type 0 at the outputs of gates.

Alekhina Marina Anatol'evna ¹, Barsukova Oksana Yur'evna ²

¹ Penza State Technological University , e-mail: alekhina@penzgtu.ru

² Penza State University , e-mail: oksana.barsukova.71@gmail.com

We consider the problem of the implementation of k -valued logics ($k \geq 3$) by circuits from unreliable gates in full basis consisting of the Webb function. We assume that gates of the circuit pass to fault states independently of each other, and they are exposed to single-type constant faults of type 0 at the outputs. It is shown that with faults of type 0 almost any function of k -valued logics can be implemented by an asymptotically optimal in reliability circuit functioning with the unreliability which is asymptotically equal to unreliability of one basis element. The obtained result is valid in a dual (with respect to the permutation which is generated by the Lukashevich function) basis with single-type constant faults of type $k - 1$ respectively.

Keywords: unreliable functional gates, reliability and unreliability of circuit, synthesis of circuits from unreliable gates, faults at outputs of gates.