

УДК 519.718

О надежности схем в базисе, содержащем особенную функцию

Алехина Марина Анатольевна, Гусынина Юлия Сергеевна,
Шорникова Татьяна Александровна

Пензенский государственный технологический университет, e-mail: alekhina@penzgtu.ru,
gusynina@mail.ru, shornikovat@mail.ru

Рассматривается реализация булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в полном конечном базисе, содержащем особенную функцию. Предполагается, что все элементы схемы независимо друг от друга с вероятностью $\varepsilon \in (0, 1/2)$ подвержены неисправностям типа 0 на выходах. Показано, что почти любую булеву функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой, функционирующей с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ключевые слова: ненадежные функциональные элементы, надежность и ненадежность схемы, синтез схем из ненадежных элементов.

Рассмотрим реализацию булевых функций схемами из ненадежных функциональных элементов в полном конечном базисе. Известно, что любой полный базис содержит нелинейную функцию [1], а из всякой нелинейной функции от трех или более переменных подстановкой (т. е. отождествлением и/или переименованием) переменных можно получить либо нелинейную функцию двух переменных $\phi(x_1, x_2) = x_1x_2 \oplus \alpha_1x_1 \oplus \alpha_2x_2 \oplus \alpha_0$, либо особенную функцию, т. е. функцию вида $\varphi(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus \beta_1x_1 \oplus \beta_2x_2 \oplus \beta_3x_3 \oplus \beta_0$, где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \{0, 1\}$ [2]. В этой работе будем рассматривать базисы, в каждом из которых содержится нелинейная функция, из которой можно получить особенную функцию. Поэтому без ограничения общности будем считать, что базис содержит особенную функцию, зависящую от переменных x_1, x_2, x_3 .

С точностью до переименования переменных x_1, x_2, x_3 для особенной функции (в зависимости от коэффициентов $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$) возможны 8 случаев:

- 1) $\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$;
- 2) $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus 1$;
- 3) $\varphi_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1$;
- 4) $\varphi_4(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$;
- 5) $\varphi_5(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$;
- 6) $\varphi_6(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_2$;
- 7) $\varphi_7(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus 1$;
- 8) $\varphi_8(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3$.

Обозначим через G множество функций, зависящих от переменных x_1, x_2, x_3 и имеющих вид $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2} \vee x_1^{\sigma_1}x_3^{\sigma_3} \vee x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3}$ ($\sigma_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{1, 2, 3\}$). Отметим, что функции $\varphi_5, \varphi_6, \varphi_7, \varphi_8 \in G$.

Известно, что если полный конечный базис содержит функцию из множества G , то как при инверсных неисправностях на выходах элементов [3], так и при неисправностях типа 0 на выходах [4] элементов любую булеву функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой (необходимые определения также можно найти в [4]), функционирующей с тривиальной оценкой ненадежности, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$. Ранее доказано [5], что этот же результат имеет место для базисов, содержащих функции φ_1, φ_3 . В этой работе показано, что при неисправностях типа 0 на выходах элементов утверждение верно и для полных конечных базисов, содержащих функции φ_2, φ_4 .

Далее будем считать, что все элементы полного конечного базиса B ненадежны, с вероятностью ε ($0 < \varepsilon < 1/2$) переходят в неисправные состояния типа 0 на выходах. Эти неисправности характеризуются тем, что в исправном состоянии функциональный элемент реализует приписанную ему булеву функцию, а в неисправном – константу 0. То есть при этих неисправностях функциональный элемент на единичных наборах с вероятностью $1 - \varepsilon$ выдает 1, с вероятностью ε выдает 0, а на нулевых наборах элемент работает абсолютно надежно (с вероятностью 1 выдает 0, с вероятностью 0 выдает 1).

Теорема 1. Пусть полный конечный базис содержит функцию $\varphi_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus 1$ или функцию $\varphi_4(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$. Тогда в этом базисе любую булеву функцию f можно реализовать такой схемой A , что $P(A) \leq \varepsilon + 16\varepsilon^2$ при всех $\varepsilon \in (0, 1/480]$.

Из теоремы 1 следует, что в базисах, содержащих φ_2 или φ_4 , любую булеву функцию можно реализовать схемой, ненадежность которой асимптотически не больше ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Отметим, что 1) любая схема, содержащая хотя бы один функциональный элемент и реализующая отличную от константы 0 функцию, имеет ненадежность, не меньше ε [4]; 2) функции x_i ($i \in \mathbf{N}$) можно реализовать абсолютно надежно (не используя функциональных элементов). Следовательно, любую булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ($n \in \mathbf{N}$), исключая $x_1, x_2, \dots, x_n$ и константу 0, можно реализовать схемой (см. теорему 1), которая является асимптотически оптимальной по надежности и функционирует с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Таким образом, из теоремы 1 и ранее полученных результатов [4; 5] следует, что если полный конечный базис содержит особенную функцию, то почти любую булеву функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой, функционирующей с ненадежностью, асимптотически равной ε при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Этот результат отличается от ранее известного результата для инверсных неисправностей на выходах элементов [3], поскольку для базиса, содержащего одну из функций $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ и не содержащего ни одну из функций множества G , доказано, что почти любую булеву функцию можно реализовать асимптотически оптимальной по надежности схемой, функционирующей с ненадежностью, асимптотически равной 2ε при $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. в случае неисправностей типа 0 на выходах элементов имеем лучшую (в 2 раза) асимптотическую оценку ненадежности схем.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 17-01-00451-а).

Список литературы

- [1] Яблонский С. В. Введение в дискретную математику: учебное пособие для вузов / под ред. В. А. Садовниченко. 3-е изд., стер. М. : Высш. шк., 2001. 384 с.
- [2] Редькин Н. П. О полных проверяющих тестах // Математические вопросы кибернетики. 1989. Вып. 2. С. 198–222.
- [3] Васин А. В. Асимптотически оптимальные по надежности схемы в полных базисах из трехвыходовых элементов : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Пенза, 2010. 100 с.
- [4] Алехина М. А. Синтез асимптотически оптимальных по надежности схем : монография. Пенза : ИИЦ ПГУ, 2006. 156 с.
- [5] Алехина М. А., Клянчина Д. М. Достаточные условия реализации булевых функций асимптотически оптимальными схемами с тривиальной оценкой ненадежности // Труды Международного симпозиума «Надежность и качество, 2010» г. Пенза, 24–31 мая 2010 г.). Пенза : ИИЦ ПГУ, 2010. Т. 1. С. 229–232.