

УДК 510.67

О композициях циклических плотных порядков со структурами и их алгебрах бинарных формул

Емельянов Дмитрий Юрьевич¹, Кулпешов Бейбут Шайыкович²,
Судоплатов Сергей Владимирович³

¹ Новосибирский государственный технический университет, e-mail: dima-pavlyk@mail.ru

² Международный университет информационных технологий, e-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

³ Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный технический университет, Новосибирский государственный университет, e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

Рассматриваются композиции структур и композиции теорий для циклических плотных порядков и данных структур, а также сопутствующие алгебры. Доказано, что для любого I -группоида P , состоящего из неотрицательных меток, существует теория T с полным типом p и правильной меточной функцией $\nu(p)$ такая, что алгебра бинарных изолирующих формул над типом p представляется в виде композиции группоида над циклическим плотным порядком и группоида P .

Ключевые слова: композиция структур, композиция теорий, циклический плотный порядок, алгебра бинарных изолирующих формул

Алгебры бинарных формул изучены в серии статей как в общем случае [1–3], так и для теорий упорядоченных структур [4–7]. В работах [8–12] рассматривались различные аспекты теории циклически упорядоченных структур.

В настоящей работе мы рассматриваем композиции структур и композиции теорий для циклических плотных порядков и данных структур, а также сопутствующие алгебры.

Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — структуры предикатных сигнатур $\Sigma_{\mathcal{M}}$ и $\Sigma_{\mathcal{N}}$ соответственно. Зададим композицию $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ структур $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$, удовлетворяющую $\Sigma_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]} = \Sigma_{\mathcal{M}} \cup \Sigma_{\mathcal{N}}$, $M[N] = M \times N$, а также следующим условиям:

1) если $R \in \Sigma_{\mathcal{M}} \setminus \Sigma_{\mathcal{N}}$, $\mu(R) = n$, то $((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)) \in R_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]}$ тогда и только тогда, когда $(a_1, \dots, a_n) \in R_{\mathcal{M}}$;

2) если $R \in \Sigma_{\mathcal{N}} \setminus \Sigma_{\mathcal{M}}$, $\mu(R) = n$, то $((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)) \in R_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]}$ тогда и только тогда, когда $a_1 = \dots = a_n$ и $(b_1, \dots, b_n) \in R_{\mathcal{N}}$;

3) если $R \in \Sigma_{\mathcal{M}} \cap \Sigma_{\mathcal{N}}$, $\mu(R) = n$, то $((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)) \in R_{\mathcal{M}[\mathcal{N}]}$ тогда и только тогда, когда $(a_1, \dots, a_n) \in R_{\mathcal{M}}$, или $a_1 = \dots = a_n$ и $(b_1, \dots, b_n) \in R_{\mathcal{N}}$.

Теория $T = \text{Th}(\mathcal{M}[\mathcal{N}])$ называется *композицией* $T_1[T_2]$ теорий $T_1 = \text{Th}(\mathcal{M})$ и $T_2 = \text{Th}(\mathcal{N})$.

По определению композиция $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ получается заменой каждого элемента из $\mathcal{M}$ на копию структуры $\mathcal{N}$.

Композиция $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ называется *E -определимой*, если $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ имеет $\emptyset$ -определимое отношение эквивалентности E , у которого E -классы являются носителями копий структуры $\mathcal{N}$, образующих $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$. По определению каждая

E -определимая композиция $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ представляется в виде E -комбинации [13] копий структуры $\mathcal{N}$ с дополнительной структурой, порожденной предикатами из $\mathcal{M}$ и связывающими элементы копий структуры $\mathcal{N}$.

Заметим, что композиции сохраняют транзитивность теорий. Кроме того, если композиция $\mathcal{M}[\mathcal{N}]$ является E -определимой, то теория $\text{Th}(\mathcal{M}[\mathcal{N}])$ однозначно определяет теории $\text{Th}(\mathcal{M})$ и $\text{Th}(\mathcal{N})$, и наоборот.

Пусть $\mathcal{C}$ — плотный циклический порядок. Соответствующая алгебра $\mathfrak{P}_{\text{dco}}$ бинарных изолирующих формул имеет четыре метки, скажем 0, 1, 2, 3, где 0 используется для $x \approx y$, 1 для $x < y$ с углами меньше π , 2 для $x > y$ с углами больше π , и 3 для противоположных x и y на $\mathcal{C}$. Имеем $u \cdot 0 = 0 \cdot u = \{u\}$ for $u \in \{0, 1, 2\}$, $1 \cdot 1 = 2 \cdot 2 = \{1, 2, 3\}$, $1 \cdot 2 = 2 \cdot 1 = \{0, 1, 2, 3\}$, $1 \cdot 3 = 3 \cdot 1 = \{2\}$, $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2 = \{1\}$, $3 \cdot 3 = \{0\}$.

Пусть λ — положительный кардинал, $\mathcal{M}_\lambda$ — результат замены в $\mathcal{C}$ каждого элемента на дизъюнктивные антицепи A , имеющие мощность λ .

Ясно, что теория $T_\lambda = \text{Th}(\mathcal{M}_\lambda)$ транзитивна, т. е. имеет единственный 1-тип.

Теперь поместим изоморфные структуры $\mathcal{N}$, с транзитивной теорией, на каждую антицепь A из $\mathcal{M}_\lambda$. Полученная структура является E -определимой композицией $\mathcal{M}_1[\mathcal{N}]$, имеющей транзитивную теорию. Она может быть рассмотрена как вариант транзитивного размещения структур [14].

Как показано в [1; 2], каждая алгебра $\mathfrak{P}$ бинарных изолирующих формул фиксированного типа является I -группоидом с неотрицательными метками и может быть реализована некоторой структурой $\mathcal{N}$ с транзитивной теорией, используя подходящую синтаксическую генерическую конструкцию.

Рассматривая композиции $\mathcal{M}_1[\mathcal{N}]$, получаем следующую теорему.

Теорема 1. *Для любого I -группоида $\mathfrak{P}$, состоящего из неотрицательных меток, существует теория T с типом $p \in S(T)$ и правильной меточной функцией $\nu(p)$ такая, что $\mathfrak{P}_{\nu(p)} = \mathfrak{P}_{\text{dco}}[\mathfrak{P}]$.*

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № AP05132546), программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.1, проект № 0314-2019-0002, и Российского фонда фундаментальных исследований (проект 17-01-00531-а).

Список литературы

- [1] Судоплатов С. В. Классификация счетных моделей полных теорий. Ч. 1. Новосибирск : НГТУ, 2018. 376 с.

- [2] Shulepov I. V., Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. Vol. 11. P. 380–407.
- [3] Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for semi-isolating formulas of a complete theory // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2014. Vol. 11. P. 408–433.
- [4] Кулпешов Б. Ш., Судоплатов С. В. Об алгебрах распределений бинарных изолирующих формул для вполне о-минимальных теорий // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. 2015. Т. 300. № 2. С. 5–13.
- [5] Emelyanov D. Yu., Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. Algebras of distributions for binary formulas in countably categorical weakly o-minimal structures // Algebra and Logic. 2017. Vol. 56, N 1. P. 13–36.
- [6] Baikalova K. A., Emelyanov D. Yu., Kulpeshov B. Sh., Palyutin E. A., Sudoplatov S. V. On algebras of distributions of binary isolating formulas for theories of abelian groups and their ordered enrichments // Russian Mathematics. 2018. Vol. 62, N 4. P. 1–12.
- [7] Emelyanov D. Yu., Kulpeshov B. Sh., Sudoplatov S. V. On algebras of distributions for binary formulas for quite o-minimal theories // Algebra and Logic. 2018. Vol. 57, N 6.
- [8] Kulpeshov B. Sh., Macpherson H. D., Minimality conditions on circularly ordered structures // Mathematical Logic Quarterly. 2005. Vol. 51, N 4. P. 377–399.
- [9] Kulpeshov B. Sh. On $\aleph_0$ -categorical weakly circularly minimal structures // Mathematical Logic Quarterly. 2006. Vol. 52, N 6. P. 555–574.
- [10] Kulpeshov B. Sh. Definable functions in the $\aleph_0$ -categorical weakly circularly minimal structures // Siberian Mathematical Journal. 2009. Vol. 5, N 2. P. 282–301.
- [11] Kulpeshov B. Sh. On indiscernibility of a set in circularly ordered structures // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2015. Vol. 12. P. 255–266.
- [12] Kulpeshov B. Sh. On almost binarity in weakly circularly minimal structures // Eurasian Math. J. 2016. Vol. 7, N 2. P. 38–49.
- [13] Sudoplatov S. V. Combinations of structures // The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2018. Vol. 24. P. 65–84.

- [14] Судоплатов С. В. Транзитивные размещения алгебраических систем // Сибирский математический журнал. 1999. Т. 40, № 6. С. 1347–1351.

On compositions of circular dense orders with structures and of their algebras of binary formulas

Emelyanov Dmitry Yuryevich¹, Kulpeshov Beibut Shaiykovich²,
Sudoplatov Sergey Vladimirovich³

¹ Novosibirsk State Technical University, e-mail: dima-pavlyk@mail.ru

² Kazakh-British Technical University, International Information Technology University, e-mail:
b.kulpeshov@iitu.kz

³ Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk State Technical University, Novosibirsk State University,
e-mail: sudoplat@math.nsc.ru

We consider compositions of structures and compositions of theories for circular dense orders and given structures, as well as related algebras. It is proved that for any I -groupoid P consisting of non-negative labels, there is a theory T with a complete type p and a regular label function $\nu(p)$ such that the algebra of binary isolating formulas over the type p is represented as a composition of a groupoid over a circular dense order and the groupoid P .

Keywords: composition of structures, composition of theories, circular dense order, algebra of binary isolating formulas.