

УДК 519.714.1

# О верхней оценке сложности трехзначных функций в классе поляризованных полиномов

Балюк Александр Сергеевич

ООО «Информатика медицины», г. Иркутск, e-mail: sacha@hotmail.ru

В работе с использованием компьютерных вычислений получены улучшенные асимптотические верхние оценки сложности трехзначных функций в классе поляризованных полиномов.

*Ключевые слова:* поляризованный полином, конечное поле, верхние оценки сложности.

Для произвольного элемента  $a$  некоторого кольца введем в рассмотрение величину  $[a = 0]$ , которая будет равна вещественной единице, если  $a = 0$  в этом кольце, и вещественному нулю в противном случае. Обозначим среднее арифметическое непустого конечного множества  $S$  вещественных чисел как  $\text{avg } S$ , а максимальный элемент в нем —  $\max S$ .

Пусть  $\mathbb{F}_q$  — конечное поле порядка  $q$ . Множество невырожденных верхних треугольных  $q \times q$  матриц над  $\mathbb{F}_q$  обозначим  $\mathbb{T}_q[q]$ . Если  $K \subseteq \mathbb{T}_q[q]$ , то  $K^{\otimes k} = \{M_1 \otimes \dots \otimes M_k \mid M_1, \dots, M_k \in K\}$ , где  $\otimes$  — кронекерово произведение матриц. Определим множество матриц  $\mathcal{P} = \{P_a \mid a \in \mathbb{F}_q\}$ , элементы которых равны  $\binom{j-1}{i-1} a^{|j-i|}$ , где  $i$  — номер строки, а  $j$  — номер столбца матрицы  $P_a$ . Читатель может легко убедиться, что  $\mathcal{P} \subset \mathbb{T}_q[q]$ .

Каждую  $n$ -местную функцию над  $\mathbb{F}_q$  будем отождествлять с некоторым вектором  $f \in \mathbb{F}_q^N$ , где  $N = q^n$ . Для каждого  $f \in \mathbb{F}_q^N$  определим величины  $Z(f) = \sum_{i=1}^N [f_i = 0]$  и  $L_{K^{\otimes}}^q(f) = q^n - \max\{Z(M^{-1}f) \mid M \in K^{\otimes n}\}$ , где  $K \subseteq \mathbb{T}_q[q]$ . Положим также  $L_{K^{\otimes}}^q(n) = \max\{L_{K^{\otimes}}^q(f) \mid f \in \mathbb{F}_q^N, N = q^n\}$ . Величину  $L_{\mathcal{P}^{\otimes}}^q(f)$  назовем *сложностью функции  $f$  в классе поляризованных полиномов*. Выбор такого термина восходит к работам [1; 2].

Для случая  $q = 3$ , то есть для случая трехзначных функций, точное значение величины  $L_{\mathcal{P}^{\otimes}}^q(n)$  неизвестно. Наилучшие на текущий момент нижняя и верхняя оценки были получены в работах [3] и [2] соответственно. Их можно свести в одну формулу  $\lfloor \frac{3}{4} 3^n \rfloor \leq L_{\mathcal{P}^{\otimes}}^3(n) \leq \lfloor \frac{5}{6} 3^n \rfloor$ .

В настоящей работе с привлечением компьютерных вычислений верхнюю оценку удалось слегка уменьшить. Для начала сформулируем утверждение, которое обобщает теорему 1 из [2].

**Теорема 1.** Пусть  $k$  — положительное целое,  $N = q^k$ ,  $K \subseteq \mathbb{T}_q[q]$  и для любой функции  $f \in \mathbb{F}_q^N$  выполняется  $\text{avg}\{Z(M^{-1}f) \mid M \in K^{\otimes k}\} \geq \beta + \delta[f_N = 0]$ , для некоторых вещественных  $\beta > 0$  и  $\delta \geq 0$ . Тогда  $L_{K^{\otimes}}^q(kn) \leq \lfloor (1 - \alpha)q^{kn} \rfloor$ , где  $\alpha = \frac{\beta}{N - \delta}$ .

Для случая  $q = 3$  были написаны компьютерные программы, которые вычисляют значения  $\beta$  и  $\delta$  при  $k = 2$  и  $k = 3$ .

Для  $k = 2$  были получены следующие значения:  $\beta = \frac{14}{9}$ ,  $\delta = 1$ . Тогда  $\alpha = \frac{14}{9(9-1)} = \frac{7}{36}$  и  $L_{\mathcal{P}^\otimes}^3(2n) \leq \lfloor \frac{29}{36} 3^{2n} \rfloor$ . Таким образом, получаем асимптотическую оценку  $L_{\mathcal{P}^\otimes}^3(n) \lesssim \frac{29}{36} 3^n$ .

Для  $k = 3$  программой были найдены следующие значения:  $\beta = \frac{151}{27}$ ,  $\delta = 1$ . Тогда  $\alpha = \frac{151}{27(27-1)} = \frac{151}{702}$  и  $L_{\mathcal{P}^\otimes}^3(3n) \leq \lfloor \frac{551}{702} 3^{3n} \rfloor$ , что дает асимптотическую оценку вида  $L_{\mathcal{P}^\otimes}^3(n) \lesssim \frac{551}{702} 3^n$ .

Эти оценки улучшают ранее известные, поскольку  $\frac{551}{702} < \frac{29}{36} < \frac{5}{6}$ .

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-01-00200).

## Список литературы

- [1] Селезнева С. Н. О сложности представления функций многозначных логик поляризованными полиномами // Дискретная математика. 2002. Т. 14, № 2. С. 48–53.
- [2] Балюк А. С., Янушковский Г. В. Верхние оценки сложности функций над конечными полями в некоторых классах кронекеровых форм // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2015. Т. 14. С. 3–17.
- [3] Маркелов Н. К. Нижняя оценка сложности функций трехзначной логики в классе поляризованных полиномов // Вестник Московского университета. Серия 15, Вычислительная математика и кибернетика. 2012. № 3. С. 40–45.

## On an upper bound for the complexity of three-valued functions in the class of polarized polynomials

Baliuk Aleksandr Sergeevich

LLC Informatics of Medicine, Irkutsk, e-mail: [sacha@hotmail.ru](mailto:sacha@hotmail.ru)

Using computer program results, improved asymptotic upper bounds have been obtained for the complexity of three-valued functions in the class of polarized polynomials.

*Keywords:* polarized polynomial, finite field, upper bounds for complexity.