

УДК 510.64

Константа Сметанича и метод конечной канонической модели

Яшин Александр Данилович

Удмуртский государственный университет, e-mail: yashin.alexandr@yandex.ru

Метод конечной канонической модели, разработанный К. Шютте, применяется к так называемой логике Сметанича, определяющей новую логическую константу в интуиционистской пропозициональной логике. Это позволяет одновременно доказать семантическую полноту в классе соответствующих моделей Крипке и финитную аппроксимируемость логики Сметанича.

Ключевые слова: интуиционистская пропозициональная логика, новая логическая константа по П. С. Новикову, семантическая полнота, финитная аппроксимируемость.

В неклассических логиках для доказательства семантической полноты исчислений с успехом применяется так называемый метод *канонических моделей*. Точками таких моделей обычно являются непротиворечивые множества (или пары множеств) формул данного языка. Получаемые при этом модели часто следует понимать в обобщённом смысле, они обычно велики (несчётны). Далее для уменьшения размера полученных моделей применяются варианты *метода фильтрации*, позволяющие получать конечные модели (*финитная аппроксимируемость*).

В работе [1] К. Шютте продемонстрировал метод *конечной канонической модели* для интуиционистского пропозиционального исчисления *Int*, позволивший «одним махом» обосновать как семантическую полноту исчисления, так и его финитную аппроксимируемость.

В работе [2] Я. С. Сметанич предложил пример исчисления, определяющего новую логическую константу в *Int* по П. С. Новикову. Семантика этой константы в классе конечных моделей Крипке известна автору под названием *крыша* (из личных бесед автора с А. А. Мучником).

Логика Сметанича *Sm* формулируется в пропозициональном языке с дополнительной константой φ (имеет тот же синтаксический статус, что и константы 0 «ложь» и 1 «истина») [3]:

$$Sm = Int + 1^\circ : \neg\neg\varphi + 2^\circ : \varphi \rightarrow (A \vee \neg A).$$

Это исчисление корректно в классе конечных моделей Крипке относительно интерпретации $a \Vdash \varphi \Leftrightarrow \max(a)$.

В данной работе предлагается доказательство теоремы о семантической полноте *Sm* и параллельно теоремы о финитной аппроксимируемости методом конечной канонической модели.

Фиксируем формулу A_0 , невыводимую в *Sm*. Через $Sub(A_0)$ обозначаем множество всех её подформул.

Введём множество формул

$$\Sigma(A_0) := \text{Sub}(A_0) \cup \{\varphi, \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} \cup \{\neg A \mid A \in \text{Sub}(A_0)\}.$$

Множество $\Sigma(A_0)$ является конечным и замкнуто по подформульности.

В дальнейшем упоминание об A_0 будем опускать.

Упорядоченная пара подмножеств $\Gamma, \Delta \subseteq \Sigma$ называется *противоречивой* (относительно Sm), если $Sm \vdash \bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$; в противном случае пара называется *непротиворечивой*. Примером непротиворечивой пары является пара $(\emptyset \mid \{A_0\})$.

Пара $(\Gamma \mid \Delta)$ называется *полной*, если $\Gamma \cup \Delta = \Sigma$.

Лемма 1. Пусть пара $(\Gamma \mid \Delta)$ непротиворечива и C — произвольная формула φ -языка. Тогда по крайней мере одна из пар $(\Gamma \cup \{C\} \mid \Delta)$, $(\Gamma \mid \Delta \cup \{C\})$ непротиворечива.

Следствие 1. Любая непротиворечивая пара может быть дополнена до полной непротиворечивой пары.

Полные непротиворечивые пары называем *типами*. Типы обозначаем буквами $\sigma, \tau, \dots$, при этом $\sigma = (\sigma^0 \mid \sigma^1)$. Иногда применяем наглядное изображение $\sigma = (\dots B, \dots C \dots \mid \dots D, \dots)$, акцентируя внимание на нужные формулы. Заметим, что множество всех типов непусто и конечно.

Частичный порядок на множестве типов определяется по включению левых компонент:

$$\sigma \leq \tau :\Leftrightarrow \sigma^0 \subseteq \tau^0.$$

Нетрудно убедиться, что это действительно частичный порядок.

Лемма 2 (общие свойства типов). Имеют место следующие свойства типов:

- (i) $A \wedge B \in \sigma^0 \Rightarrow A \in \sigma^0$ и $B \in \sigma^0$;
- (ii) $A \wedge B \in \sigma^1 \Rightarrow A \in \sigma^1$ или $B \in \sigma^1$;
- (iii) $A \vee B \in \sigma^0 \Rightarrow A \in \sigma^0$ или $B \in \sigma^0$;
- (iv) $A \vee B \in \sigma^1 \Rightarrow A \in \sigma^1$ или $B \in \sigma^1$;
- (v) $A \rightarrow B \in \sigma^0 \Rightarrow A \in \sigma^1$ или $B \in \sigma^0$;
- (vi) $A \rightarrow B \in \sigma^1 \Rightarrow$ найдётся $\tau \geq \sigma : A \in \tau^0$ и $B \in \tau^1$;
- (vii) $\neg A \in \sigma^0 \Rightarrow A \in \sigma^1$;
- (viii) $\neg A \in \sigma^1 \Rightarrow$ найдётся $\tau \geq \sigma : A \in \tau^0$.

Теперь приведём свойства типов, связанные с наличием константы φ .

Лемма 3. $\varphi \in \sigma^0 \Rightarrow \max_{\mathcal{M}}(\sigma)$.

Доказательство. Предполагаем посылку и, от противного, неверно $\max(\sigma)$. Найдётся $\tau > \sigma$, т. е. $\sigma^0 \subsetneq \tau^0$. Для некоторой формулы $B \in \Sigma$ имеем $B \in \sigma^1$ и $B \in \tau^0$. Что такое B ?

1. Пусть $B \in \text{Sub}(A_0)$. Тогда $\neg B \in \Sigma$.

Имеем $\neg B \notin \tau^0$ (иначе τ противоречив). Поэтому $\neg B \in \tau^1$. $\neg B \in \sigma^1$. Тип σ имеет вид

$$\sigma = (\varphi, \dots \mid B, \neg B, \dots)$$

и оказывается противоречивым в силу аксиомы 2° .

2. Имеем $B \neq \varphi$ (так как σ непротиворечив);

$B \neq \neg\varphi$ (так как τ непротиворечив);

$B \neq \neg\neg\varphi$, так как иначе $\sigma = (\varphi, \dots \mid \neg\neg\varphi, \dots)$, и σ оказывается противоречивым в силу $X \rightarrow \neg\neg X \in \text{Int}$.

3. Пусть $B \doteq \neg C$ для некоторой $C \in \text{Sub}(A_0)$. Изобразим типы $\sigma < \tau$:

$$\begin{array}{c} \tau = (\varphi, \neg C, \dots \mid \dots) \\ | \\ \sigma = (\varphi, \dots \mid \neg C, \dots) \end{array}$$

Если $C \in \sigma^0$, то $C \in \tau^0$, т. е. τ противоречив.

Если $C \in \sigma^1$, то σ противоречив по аксиоме 2° . □

Лемма 4. $\forall \sigma \exists \tau \geq \sigma : \varphi \in \tau^0$.

Доказательство. В силу аксиомы 1° $\neg\neg\varphi \in \sigma^0$ (напомним, что $\neg\neg\varphi \in \Sigma$). По общим свойствам типов сначала $\neg\varphi \in \sigma^1$, затем $\exists \tau \geq \sigma : \varphi \in \tau^0$.

Следствие 2. $\max(\sigma) \Rightarrow \varphi \in \sigma^0$.

Зададим на структуре $\mathcal{M}$ выделенный конус для интерпретации константы φ так:

$$\Phi := \{\sigma \in \mathcal{M} \mid \max(\sigma)\}.$$

Для переменных $p \in \text{Sub}(A_0)$ оценку на $\mathcal{M}$ зададим так:

$$\sigma \Vdash p :\Leftrightarrow p \in \sigma^0.$$

Лемма 5 (семантическая). Для любой формулы $A \in \Sigma$, для любой $\sigma \in \mathcal{M}$:

$$A \in \sigma^0 \Rightarrow \sigma \Vdash A;$$

$$A \in \sigma^1 \Rightarrow \sigma \not\Vdash A.$$

Доказательство. Доказательство. Оба утверждения доказываются одновременной индукцией по построению формулы A .

Для переменной $p \in \Sigma$ первое утверждение следует из определения оценки $\Vdash$ на $\mathcal{M}$, второе: из непротиворечивости типа и из $p \in \sigma^1$ получаем $p \notin \sigma^0$, далее по определению оценки $\Vdash$ получаем $\sigma \not\Vdash p$.

Для константы φ . Если $\varphi \in \sigma^0$, то по лемме 3 $\max(\sigma)$. По определению конуса Φ имеем $\sigma \in \Phi$, т. е. $\sigma \Vdash \varphi$.

Если $\varphi \in \sigma^1$, то в силу непротиворечивости типов $\varphi \notin \sigma^0$. По следствию 2 имеем неверно $\max(\sigma)$, т. е. $\sigma \notin \Phi$, поэтому $\sigma \not\Vdash \varphi$.

Для связок $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$ шаги индукции проводятся обычным образом со ссылкой на общие свойства типов. $\square$

Теорема 1. *Если $St \not\Vdash A_0$, то построенная конечная каноническая φ -шкала является моделью логики St , опровергающей формулу A_0 .*

Список литературы

- [1] Шютте К. Полные системы модальной и интуиционистской логики // Р. Фейс. Модальная логика. М. : Наука, 1974. С. 324–421.
- [2] Сметанич Я. С. Об исчислениях высказываний с дополнительной операцией // ДАН СССР. 1961. Т. 139 № 2. С. 309–312.
- [3] Яшин А. Д. Логика Сметанича T^Φ и два определения новой интуиционистской связки // Математические заметки. 1994. Т. 56, № 1. С. 135–142.

The Smetanich constant and finite canonical model method

Yashin Alexandr Danilovich, (Izhevsk, Russia)

Udmurt State University, e-mail: yashin.alexandr@yandex.ru

The method of finite canonical model described by K. Shchütte is applied to the Smetanich logic which determines a new logical constant in the intuitionistic propositional logic (in the sense of P. Novikov's approach). This method allows to prove semantical completeness and finite model property for Smetanich logic simultaneously.

Keywords: intuitionistic propositional logic, new logical constant in the P. Novikov sense, semantical completeness, finite model property.