

УДК 519.714

Немонотонная сложность логических схем и близкие задачи

Кочергин Вадим Васильевич¹, Михайлович Анна Витальевна²

¹ Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», e-mail: vvkoch@yandex.ru

² Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», e-mail: avmikhailovich@gmail.com

Исследуется сложность логических схем, реализующих булевы функции и функции многозначной логики, в бесконечных базисах, состоящих из всех монотонных и конечного числа немонотонных функций. В качестве мер сложности рассматривается как классическая мера, характеризующая общее число элементов в схеме, так и немонотонная сложность, отражающая только число использований немонотонных элементов. В работе дан обзор результатов авторов, обобщающих теорему Маркова об инверсионной сложности булевых функций, а также представлены новые результаты в задачах, связанных с немонотонной сложностью, и в близких задачах.

Ключевые слова: булевы функции, функции многозначной логики, логические схемы, схемная сложность, немонотонная сложность, инверсионная сложность, теорема Маркова.

Рассматривается задача о сложности реализации булевых функций и функций многозначной логики схемами из функциональных элементов (логическими схемами) в бесконечных базисах, состоящих из всех монотонных и конечного числа немонотонных функций, причем в качестве меры сложности схем помимо классической меры, характеризующей общее число элементов в схеме, исследуется также немонотонная сложность, отражающая только число использований немонотонных элементов (монотонные функции «бесплатны»). Для случая реализации систем булевых функций в базисе, содержащем помимо монотонных функций только отрицание, А. А. Марковым установлено точное значение немонотонной сложности (называемой в этом случае инверсионной сложностью). В настоящей работе дан обзор результатов авторов, обобщающих теорему Маркова, а также представлены новые результаты в задачах, связанных с немонотонной сложностью, и в близких задачах.

Дадим несколько определений.

Пусть P_k — множество всех функций k -значной логики ($k \geq 2$), M — класс всех функций из P_k , монотонных относительно порядка $0 < 1 < \dots < k - 1$.

Обозначим множество $\{0, 1, \dots, k - 1\}$ через E_k . Последовательность

$$\tilde{\alpha}_1 = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}), \tilde{\alpha}_2 = (\alpha_{21}, \dots, \alpha_{2n}), \dots, \tilde{\alpha}_r = (\alpha_{r1}, \dots, \alpha_{rn})$$

наборов из множества E_k^n назовем *возрастающей цепью относительно порядка* $0 < 1 < \dots < k - 1$ или просто *цепью*, если все наборы $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_r$ различны и выполняются неравенства

$$\alpha_{ij} \leq \alpha_{i+1,j}, \quad i = 1, \dots, r - 1, \quad j = 1, \dots, n.$$

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$ — функция k -значной логики. Упорядоченную пару наборов $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in E_k^n$, будем называть *обрывом для функции f* , если выполнены условия:

- 1) $\alpha_j \leq \beta_j$, $j = 1, \dots, n$;
- 2) $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$.

Обрывом для системы функций будем называть любую пару наборов, являющуюся обрывом хотя бы для одной функции системы.

Пусть $F = \{f_1, \dots, f_m\}$, $m \geq 1$, — система функций k -значной логики от переменных $x_1, \dots, x_n$, а C — цепь, имеющая вид $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_r$. Под *падением $d_C(F)$ системы F на цепи C* будем понимать число обрывов для системы F на парах вида $(\tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_{i+1})$.

Снад $d(F)$ системы F определим равенством $d(F) = \max d_C(F)$, где максимум берется по всем цепям C .

Для произвольной системы функций $F \subset P_k$, $k \geq 2$, и полного в P_k базиса B обозначим через $L_B(F)$ и $I_B(F)$ обычную сложность и немонотонную сложность системы F в базисе B , т. е. минимальное число всех элементов и, соответственно, немонотонных элементов в схемах, реализующих систему F в базисе B .

А. А. Марковым в 1957–1963 гг. установлено [1; 2] точное значение инверсионной сложности (т. е. немонотонной сложности в булевом базисе $B_0 = A \cup \{\bar{x}\}$, где $[A] = M$) для произвольной конечной системы F булевых функций:

$$I_{B_0}(F) = \lceil \log_2(d(F) + 1) \rceil.$$

В 1961 г. Э. И. Нечипоруком найдено [3] точное значение инверсионной сложности для любой булевой функции в классе схем без ветвления выходов элементов (формул).

В 2015 г. установлена асимптотика роста немонотонной сложности произвольной последовательности F_n систем булевых функций при $d(F_n) \rightarrow \infty$.

Теорема 1 ([4]). *Для любого полного базиса B найдется такая константа $c(B)$, что для любой системы F функций из P_2 выполняются неравенства*

$$\lceil \log_2(d(F) + 1) \rceil - c(B) \leq I_B(F) \leq \lceil \log_2(d(F) + 1) \rceil.$$

Эта теорема дает верхнюю и нижнюю оценки немонотонной сложности систем булевых функций, отличающиеся не более чем на константу. Однако этот результат далек от окончательного, так как эта константа зависит от базиса, причем для любой константы можно подобрать базис рассматриваемого вида и булеву функцию так, что разность верхней оценки из теоремы 1 и реальной немонотонной сложности этой функции превосходит эту константу.

В случае реализации одной булевой функции установлено точное значение немонотонной сложности.

Теорема 2 ([5]). Пусть B — полный в P_2 базис, $\omega_1, \dots, \omega_p$ — все монотонные функции базиса B , $D(B) = \max\{d(\omega_1), \dots, d(\omega_p)\}$. Тогда для любой булевой функции f выполняется равенство

$$I_B(f) = \left\lceil \log_2 \left(\frac{d(f)}{D(B)} + 1 \right) \right\rceil.$$

Для того чтобы сформулировать полученные результаты о немонотонной сложности в общем случае (при реализации функций k -значной логики, $k \geq 2$), требуется ввести еще некоторые понятия.

Для произвольной функции k -значной логики $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и произвольной цепи $C = (\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \dots, \tilde{\alpha}_r)$ наборов из E_k^n определим величину $u_C(f)$ как наибольшую длину t подпоследовательности $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \dots, \tilde{\beta}_t$ последовательности C , удовлетворяющей условию $f(\tilde{\beta}_1) > f(\tilde{\beta}_2) > \dots > f(\tilde{\beta}_t)$.

Теперь определим *инверсионную силу* $u(f)$ функции f равенством $u(f) = \max u_C(f)$, где максимум берется по всем цепям C наборов из E_k^n . Очевидно, что для любой функции f выполняются соотношения $1 \leq u(f) \leq d(f) + 1$, при этом если функция f не является монотонной, то справедливо неравенство $u(f) \geq 2$.

Наконец, для базиса B функций k -значной логики равенством $u(B) = \max u(f)$, где максимум берется по всем функциям f из базиса B , введем величину $u(B)$ — *инверсионную силу базиса* B .

Асимптотика роста немонотонной сложности произвольной последовательности F_n систем функций k -значной логики при условии $d(F_n) \rightarrow \infty$ установлена в 2017 г.

Теорема 3 ([6]). Для любого полного базиса B найдется такая константа $c(B)$, что для любой системы F функций из P_k выполняются неравенства

$$\lceil \log_{u(B)}(d(F) + 1) \rceil - c(B) \leq I_B(F) \leq \lceil \log_{u(B)}(d(F) + 1) \rceil.$$

Отметим, что как и в теореме 1 в теореме 3 заменить константу $c(B)$, зависящую от базиса, на абсолютную константу нельзя: для любого $k \geq 2$ и для любого заданного значения N найдется базис B_N в P_k и функция $g_N \in P_k$, для которых справедливо неравенство $\lceil \log_{u(B_N)}(d(g_N) + 1) \rceil - I_{B_N}(g_N) > N$.

Далее будем рассматривать два естественных базиса функций k -значной логики, а именно, базисы $B_P = M \cup \{N_P(x)\}$ и $B_L = M \cup \{N_L(x)\}$, где $N_P(x)$ — отрицание Поста, т. е. функция $x + 1 \pmod k$, а $N_L(x)$ — отрицание Лукасевича, т. е. функции $k - 1 - x$.

Относительно немонотонной сложности в этих базисах в 2016 г. получен в некотором смысле окончательный результат.

Теорема 4 ([7]). Для любой конечной системы F функций k -значной логики справедливы равенства

$$I_{B_P}(F) = \lceil \log_2(d(F) + 1) \rceil, \quad I_{B_L}(F) = \lceil \log_k(d(F) + 1) \rceil.$$

Отметим, что теорема 4 дает возможность выписать точные значений соответствующих функций Шеннона немонотонной сложности функций и вектор-функций в базисах B_P и B_L (это проделано в [7]).

Теперь рассмотрим тесно связанную с задачей о немонотонной сложности задачу о сложности реализации функций k -значной логики в базисах B_P и B_L . Принципиальной отличительной особенностью задач изучения величин $L_{B_P}(f)$, $L_{B_L}(f)$, $L_{B_P}(n)$ и $L_{B_L}(n)$ является бесконечность базисов B_P и B_L .

Справедливость естественной гипотезы о том, что величина $L_{B_L}(f)$ растет примерно как $2 \lceil \log_k(d(f) + 1) \rceil$, доказана в 2018 г.

Теорема 5 ([8]). *Для любой функции k -значной логики f справедливы неравенства*

$$2 \lceil \log_k(d(f) + 1) \rceil - 1 \leq L_{B_L}(f) \leq 2 \lceil \log_k(d(f) + 1) \rceil + 1.$$

Положим

$$T(k, n) = (k - 1)n - \left\lfloor \frac{(k - 1)n}{k} \right\rfloor + 1 = (k - 2)n + \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil + 1.$$

Легко проверить, что величина $T(k, n)$ ровно на единицу превосходит максимально возможный спад у функций k -значной логики от n переменных.

Обозначим через R_k множество натуральных чисел n , удовлетворяющих условию: число $T(k, n) - 1$ является степенью числа k .

Теорема 6 ([8]). *При $n \geq k + 2$ для функции Шеннона сложности реализации функций k -значной логики ($k \geq 2$) в базисе B_L верно равенство*

$$L_{B_L}(n) = \begin{cases} 2 \lceil \log_k T(k, n) \rceil, & \text{если } n \in R_k; \\ 2 \lceil \log_k T(k, n) \rceil + 1, & \text{если } n \in \mathbb{N} \setminus R_k. \end{cases}$$

Переходя к базису B_P , для произвольного натурального n положим

$$\tau(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } 3^r < n \leq 4 \times 3^{r-1} \text{ для некоторого целого } r; \\ 2, & \text{если } 4 \times 3^{r-1} < n \leq 2 \times 3^r \text{ для некоторого целого } r; \\ 3, & \text{если } 2 \times 3^r < n \leq 3 \times 3^r \text{ для некоторого целого } r. \end{cases}$$

В 2017 г. для базиса B_P с точностью до единицы установлено значение сложности реализации произвольной функции k -значной логики ($k \geq 3$), а также найдено точное значение соответствующей функции Шеннона.

Теорема 7 ([9]). *При $k \geq 3$ для любой функции k -значной логики f , удовлетворяющей условию $d(f) \geq 2$, справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} L_{B_P}(f) &\geq 3 (\lceil \log_3(d(f) + 1) \rceil - 1) + \tau(d(f) + 1), \\ L_{B_P}(f) &\leq 3 (\lceil \log_3(d(f) + 1) \rceil - 1) + \tau(d(f) + 1) + 1. \end{aligned}$$

Теорема 8 ([9]). При $k \geq 3$ для любого натурального $n \geq 4$ для функции Шеннона сложности реализации функций k -значной логики в базисе B_P справедливо равенство

$$L_{B_P}(n) = 3(\lceil \log_3 T(k, n) \rceil - 1) + \tau(T(k, n)) + 1.$$

При реализации в базисах B_P и B_L систем функций k -значной логики справедливы похожие оценки.

Теорема 9. Для любой системы функций $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\} \subset P_k$, $k \geq 2$, выполняются неравенства

$$2 \lceil \log_k(d(F) + 1) \rceil - 1 \leq L_{B_P}(F) \leq 2 \lceil \log_k(d(F) + 1) \rceil + m.$$

Теорема 10. Для любой системы функций $F = \{f_1, f_2, \dots, f_m\} \subset P_k$, $k \geq 3$, выполняются неравенства

$$\begin{aligned} 3(\lceil \log_3(d(F) + 1) \rceil - 1) + \tau(d(F) + 1) - 1 &\leq L_{B_P}(F) \leq \\ &\leq 3(\lceil \log_3(d(F) + 1) \rceil - 1) + \tau(d(F) + 1) + m. \end{aligned}$$

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, проект № 18-01-00337.

Список литературы

- [1] Марков А. А. Об инверсионной сложности систем функций // ДАН СССР. 1957. Т. 116, № 6. С. 917–919.
- [2] Марков А. А. Об инверсионной сложности систем булевых функций // ДАН СССР. 1963. Т. 150, № 3. С. 477–479.
- [3] Нечипорук Э. И. О сложности схем в некоторых базисах, содержащих нетривиальные элементы с нулевыми весами // Проблемы кибернетики. Вып. 8. М. : Физматгиз, 1962. С. 123–160.
- [4] Кочергин В. В., Михайлович А. В. О сложности схем в базисах, содержащих монотонные элементы с нулевыми весами // Прикладная дискретная математика. 2015. № 4 (30). С. 24–31.
- [5] Кочергин В. В., Михайлович А. В. Точное значение немонотонной сложности булевых функций // Математические заметки. 2019. Т. 105. Вып. 1. С. 32–41.
- [6] Kochergin V. V., Mikhailovich A. V. Asymptotics of growth for non-monotone complexity of multi-valued logic function systems // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2017. Vol. 14. P. 1100–1107.

- [7] Кочергин В. В., Михайлович А. В. О минимальном числе отрицаний при реализации систем функций многозначной логики // Дискретная математика. 2016. Т. 28, вып. 4. С. 80–90.
- [8] Кочергин В. В., Михайлович А. В. О схемной сложности функций k -значной логики в одном бесконечном базисе // Прикладная математика и информатика. 2018. № 58. С. 21–34.
- [9] Кочергин В. В., Михайлович А. В. О сложности функций многозначной логики в одном бесконечном базисе // Дискретный анализ и исследование операций. 2018. Т. 25, № 1. С. 42–74.

Nonmonotone complexity of logic circuits and similar problems

Kochergin Vadim Vasil'evich ¹, Mikhaylovich Anna Vital'evna ²

¹ Lomonosov Moscow State University; National Research University — Higher School of Economics , e-mail: vvkoch@yandex.ru

² National Research University — Higher School of Economics , e-mail: avmikhailovich@gmail.com

We study the complexity of the realization of Boolean functions and multi-valued logic functions by circuits in infinite complete bases containing all monotone functions and finitely many nonmonotone functions. We consider both classical measure of complexity which corresponds to the total number of elements in the circuit and nonmonotone complexity that indicates the number of non-monotone elements of the circuit. The paper reviews our results that extend Markov's theorem of inversion complexity of Boolean function as well as contains new results concerning non-monotone complexity and similar problems.

Keywords: Boolean functions, multi-valued logic functions, logic circuits, circuit complexity, nonmonotone complexity, inversion complexity, Markov's theorem.