Алгебры унарных операций и конечные алгебры Краснера мультиопераций

Н.А. Перязев

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В. И. Ульянова (Ленина)

2019

Мультиоперации

Пусть A — конечное множество и n — натуральное число.

- $f : A^n \to 2^A$ — n-местная мультиоперация на A;
- если при любых $a_1, \dots, a_n$ из A выполняется $|f(a_1, \dots, a_n)| = 1$, то f — n-местная операция на A.

Мультиоперации

Пусть A — конечное множество и n — натуральное число.

- $f : A^n \to 2^A$ — n-местная мультиоперация на A;
- если при любых $a_1, \ldots, a_n$ из A выполняется $|f(a_1, \ldots, a_n)| = 1$, то f — n-местная операция на A.

Обозначения:

- $\mathcal{M}_A^{(n)}$ — множество n-местных мультиопераций на A;
- $\mathcal{O}_A^{(n)}$ — множество n-местных операций на A.

$$\mathcal{O}_A^{(n)} \subset \mathcal{M}_A^{(n)}.$$

Задание мультиопераций, размерность и ранг

Мультиоперации $f \in \mathcal{M}_A^{(n)}$, где $A = \{a_0, ..., a_{k-1}\}$ можно представлять как отображения

$$f : \{2^0, 2^1, ..., 2^{k-1}\}^n \to \{0, 1, ..., 2^k - 1\},$$

получаемых из f при кодировке

$$a_i \to 2^i; \quad \varnothing \to 0; \quad \{a_{i_1}, ..., a_{i_s}\} \to 2^{i_1} + ... + 2^{i_s}.$$

Говорим, что f мультиоперация размерности n, ранга k (считаем $|k| \geq 2$.)

Обозначения: $\mathcal{M}_k^{(n)}, \mathcal{O}_k^{(n)}$ — множества мультиопераций и операций размерности n, ранга k.

Основные мультиоперации

- Операция проекция по i-му аргументу
  $e_i^n(a_1, ...a_n) = \{a_i\}$
  (проекцию e_1^1 называют тождественной операцией).

- Пустая мультиоперация
  $o^n(a_1, ...a_n) = \varnothing$.

- Полная мультиоперация
  $u^n(a_1, ...a_n) = A$.

Метаоперации мультиопераций

- Суперпозиция $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ и $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{M}_k^{(m)}$

$$(f * f_1, \ldots, f_n)(a_1, \ldots, a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, \ldots, a_m)} f(b_1, \ldots, b_n);$$

при $n = m$ будет $(n+1)$-местная метаоперация суперпозиции в $\mathcal{M}_k^{(n)}$.

Метаоперации мультиопераций

- Суперпозиция $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ и $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{M}_k^{(m)}$

$$(f * f_1, \ldots, f_n)(a_1, \ldots, a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, \ldots, a_m)} f(b_1, \ldots, b_n);$$

при $n = m$ будет $(n+1)$-местная метаоперация суперпозиции в $\mathcal{M}_k^{(n)}$.

- Унарная метаоперация разрешимости $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$

$$(\mu f)(a_1, \ldots, a_n) = \{b \mid a_1 \in f(b, a_2, \ldots, a_n)\}.$$

Метаоперации мультиопераций

- Суперпозиция $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ и $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{M}_k^{(m)}$

$$(f * f_1, \ldots, f_n)(a_1, \ldots, a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, \ldots, a_m)} f(b_1, \ldots, b_n);$$

  при $n = m$ будет $(n+1)$-местная метаоперация суперпозиции в $\mathcal{M}_k^{(n)}$.

- Унарная метаоперация разрешимости $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$

$$(\mu f)(a_1, \ldots, a_n) = \{b \mid a_1 \in f(b, a_2, \ldots, a_n)\}.$$

- Бинарная метаоперация пересечения f и g
  $(f \cap g)(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \cap g(a_1, \ldots, a_n)$.

Метаоперации мультиопераций

- Суперпозиция $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ и $f_1, ..., f_n \in \mathcal{M}_k^{(m)}$

$$(f * f_1, ..., f_n)(a_1, ..., a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1,...,a_m)} f(b_1, ..., b_n);$$

  при $n = m$ будет $(n+1)$-местная метаоперация суперпозиции в $\mathcal{M}_k^{(n)}$.
- Унарная метаоперация разрешимости $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$

$$(\mu f)(a_1, ..., a_n) = \{b \mid a_1 \in f(b, a_2, ..., a_n)\}.$$

- Бинарная метаоперация пересечения f и g $(f \cap g)(a_1, ..., a_n) = f(a_1, ..., a_n) \cap g(a_1, ..., a_n)$.
- Бинарная метаоперация объединения f и g $(f \cup g)(a_1, ...a_n) = f(a_1, ...a_n) \cup g(a_1, ...a_n)$.

Алгебры унарных операций ранга k

- Алгеброй унарных операций ранга k называется любое $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(1)}$, содержащее тождественную операцию и замкнутое относительно метаоперации суперпозиции.

Алгебры унарных операций ранга k

- Алгеброй унарных операций ранга k называется любое $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(1)}$, содержащее тождественную операцию и замкнутое относительно метаоперации суперпозиции.
- $[\mathcal{F}]$ — алгебра унарных операций ранга k порожденная множеством $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(1)}$.
- $\mathcal{V}_k^1$ — решетка алгебр унарных операций ранга k.

Алгебры унарных операций ранга k

- Алгеброй унарных операций ранга k называется любое $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(1)}$, содержащее тождественную операцию и замкнутое относительно метаоперации суперпозиции.
- $[\mathcal{F}]$ — алгебра унарных операций ранга k порожденная множеством $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(1)}$.

- $\mathcal{V}_k^1$ — решетка алгебр унарных операций ранга k.

Замечание. Алгебры унарных операций еще называют моноидами преобразований.

Алгебры мультиопераций размерности n, ранга k

- Алгеброй Краснера мультиопераций размерности n, ранга k называется любое подмножество $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_A^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции, пустую n-местную мультиоперацию и замкнутое относительно метаопераций суперпозиции, разрешимости и объединения, а при $n = 1$ еще содержит полную и замкнуто относительно метаоперации пересечения.

Алгебры мультиопераций размерности n, ранга k

- Алгеброй Краснера мультиопераций размерности n, ранга k называется любое подмножество $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_A^{(n)}$, содержащее все n-местные проекции, пустую n-местную мультиоперацию и замкнутое относительно метаопераций суперпозиции, разрешимости и объединения, а при $n = 1$ еще содержит полную и замкнуто относительно метаоперации пересечения.

- $\langle \mathcal{R} \rangle$ — алгебра Краснера мультиопераций размерности n, ранга k порожденная множеством $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(n)}$.

- $\mathcal{W}_k^n$ — решетка алгебр Краснера мультиопераций размерности n, ранга k.

Связь Галуа для упорядоченных множеств

Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ упорядоченные множества.
Пара соответствий $\rho : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ определяет связь Галуа для $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, если выполняется условия:

1) для любых $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ и $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ если $c_1 \leq c_2$ и $d_1 \leq d_2$, то $\rho(c_1) \geq \rho(c_2)$ и $\pi(d_1) \geq \pi(d_2)$;

2) для любых $c \in \mathcal{C}$ и $d \in \mathcal{D}$ верно $\pi(\rho(c)) \geq c$ и $\rho(\pi(d)) \geq d$.

Связь Галуа для упорядоченных множеств

Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ упорядоченные множества.
Пара соответствий $\rho : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ определяет связь Галуа для $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, если выполняется условия:

1) для любых $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ и $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ если $c_1 \leq c_2$ и $d_1 \leq d_2$, то $\rho(c_1) \geq \rho(c_2)$ и $\pi(d_1) \geq \pi(d_2)$;

2) для любых $c \in \mathcal{C}$ и $d \in \mathcal{D}$ верно $\pi(\rho(c)) \geq c$ и $\rho(\pi(d)) \geq d$.

$\pi(\rho(c))$ — замыкание Галуа в $\mathcal{C}$,
$\rho(\pi(d))$ — замыкание Галуа в $\mathcal{D}$.

Связь Галуа для упорядоченных множеств

Пусть $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ упорядоченные множества.
Пара соответствий $\rho : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ и $\pi : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ определяет связь Галуа для $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$, если выполняется условия:

1) для любых $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ и $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$ если $c_1 \leq c_2$ и $d_1 \leq d_2$, то $\rho(c_1) \geq \rho(c_2)$ и $\pi(d_1) \geq \pi(d_2)$;

2) для любых $c \in \mathcal{C}$ и $d \in \mathcal{D}$ верно $\pi(\rho(c)) \geq c$ и $\rho(\pi(d)) \geq d$.

$\pi(\rho(c))$ — замыкание Галуа в $\mathcal{C}$,
$\rho(\pi(d))$ — замыкание Галуа в $\mathcal{D}$.

Если $\pi(\rho(c)) = c$, то связь Галуа совершенна в $\mathcal{C}$.
Если $\rho(\pi(d)) = d$, то связь Галуа совершенна в $\mathcal{D}$.
Если выполняются оба условия, то совершенная связь Галуа.

Полуперестановочность мультиопераций

Отношение включения мультиопераций
$f \subseteq g \Longleftrightarrow f(a_1, ..., a_n) \subseteq g(a_1, ..., a_n)$.

Полуперестановочность мультиопераций

Отношение включения мультиопераций
$f \subseteq g \Longleftrightarrow f(a_1, ..., a_n) \subseteq g(a_1, ..., a_n)$.

Тождество *полуперестановочности* для $f \in \mathcal{M}_k^{(n)}$ и $g \in \mathcal{M}_k^{(m)}$

$$(f * (g * e_1^{nm}, \ldots, e_m^{nm}), \ldots, (g * e_{(n-1)m+1}^{nm}, \ldots, e_{nm}^{nm})) \subseteq$$

$$\subseteq (g * (f * e_1^{nm}, e_{m+1}^{nm}, \ldots, e_{(n-1)m+1}^{nm}), \ldots, (f * e_m^{nm}, e_{2m}^{nm}, \ldots, e_{nm}^{nm}))$$

f стабильна относительно g, g нормальна относительно f.

(Перязев Н.А., Шаранхаев И.К. Теория Галуа для клонов и суперклонов. Дискретная математика. Т.27. Вып. 4, 2015. С.79-93.)

n-стабилизаторы и m-нормализаторы

- Пусть $g \in \mathcal{M}_k^{(m)}$ и $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(m)}$

  $S^n(g) = \{f \mid f \in \mathcal{O}_k^{(n)}, f$ стабильна отн. $g\}$ — *n-стабилизатор g*;

$$S^n(\mathcal{R}) = \bigcap_{g \in \mathcal{R}} S^n(g) \text{ — } n\text{-стабилизатор } \mathcal{R}.$$

n-стабилизаторы и m-нормализаторы

- Пусть $g \in \mathcal{M}_k^{(m)}$ и $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(m)}$

  $S^n(g) = \{f \mid f \in \mathcal{O}_k^{(n)}, f$ стабильна отн. $g\}$ — *n-стабилизатор g*;

  $$S^n(\mathcal{R}) = \bigcap_{g \in \mathcal{R}} S^n(g) \text{ — } n\text{-стабилизатор } \mathcal{R}.$$

- Пусть $f \in \mathcal{O}_k^{(n)}$ и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(n)}$

  $N^m(f) = \{g \mid g \in \mathcal{M}_k^{(m)}, g$ нормальна отн. $f\}$—*m-нормализатор f*

  $$N^m(\mathcal{F}) = \bigcap_{f \in \mathcal{F}} N^m(f) \text{ — } m\text{-нормализатор } \mathcal{F}.$$

Связь Галуа для $\mathcal{V}_k^1$ и $\mathcal{W}_k^m$

Теорема 1. *Пара соответствий* S^1 *и* N^m *определяет связь Галуа для* $\mathcal{V}_k^1$ *и* $\mathcal{W}_k^m$.

Теорема 2. *Связь Галуа для решеток* V_k^1 *и* W_k^m *является совершенной тогда и только тогда, когда* $m \geq k - 1$.

Связь Галуа для $\mathcal{V}_k^1$ и $\mathcal{W}_k^m$

Теорема 1. *Пара соответствий S^1 и N^m определяет связь Галуа для $\mathcal{V}_k^1$ и $\mathcal{W}_k^m$.*

Теорема 2. *Связь Галуа для решеток V_k^1 и W_k^m является совершенной тогда и только тогда, когда $m \geq k - 1$.*

Следствие.
1) для любого множества $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(1)}$ выполняется $[\mathcal{F}] = S^1(N^m(\mathcal{F}))$ при $m \geq k - 1$;
2) для любого множества $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(m)}$ для $m \geq k - 1$ выполняется $\langle \mathcal{R} \rangle = N^m(S^1(\mathcal{R}))$;
3) решетки алгебр $\mathcal{V}_k^1$ и $\mathcal{W}_k^m$ при $m \geq k - 1$ антиизоморфны.

Связь Галуа для $\mathcal{V}_k^1$ и $\mathcal{W}_k^m$

Теорема 1. *Пара соответствий S^1 и N^m определяет связь Галуа для $\mathcal{V}_k^1$ и $\mathcal{W}_k^m$.*

Теорема 2. *Связь Галуа для решеток V_k^1 и W_k^m является совершенной тогда и только тогда, когда $m \geq k-1$.*

Следствие.
1) для любого множества $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{O}_k^{(1)}$ выполняется $[\mathcal{F}] = S^1(N^m(\mathcal{F}))$ при $m \geq k-1$;
2) для любого множества $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_k^{(m)}$ для $m \geq k-1$ выполняется $\langle \mathcal{R} \rangle = N^m(S^1(\mathcal{R}))$;
3) решетки алгебр $\mathcal{V}_k^1$ и $\mathcal{W}_k^m$ при $m \geq k-1$ антиизоморфны.

Замечание. $|\mathcal{V}_2^1| = |\mathcal{W}_2^1| = 6$, $|\mathcal{V}_3^1| = |\mathcal{W}_3^2| = 699$.