

УДК 519.716

Критерий ES_U -полноты множества мультифункций ранга 2

Пантелеев Владимир Иннокентьевич, Рябец Леонид
Владимирович

Иркутский государственный университет, e-mail: vl.panteleyev@gmail.com, l.riabets@gmail.com

В работе рассматривается действие оператора разветвления по предикату равенства на множестве мультифункций ранга 2. Определяются 11 предполных множеств мультифункций и формулируется критерий полноты.

Ключевые слова: замыкание, предикат равенства, мультифункция, замкнутое множество, суперпозиция, критерий полноты.

Мультифункции представляют собой функции, задаваемые на конечном множестве и возвращающие в качестве своих значений все подмножества рассматриваемого множества. Оператор суперпозиции приводит к континууму замкнутых множеств. Поэтому возникает необходимость рассмотрения операторов замыкания, которые наряду с суперпозицией содержат другие операции. К таким относится рассматриваемый оператор разветвления по предикату равенства (оператор E -замыкания) [2–5].

В работе рассматривается ES_U -замыкание мультифункций, полученное применением операции суперпозиции, основанной на объединении, и оператора разветвления по предикату равенства.

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Множество всех мультифункций ранга 2 обозначается как M_2 и определяется следующим образом:

$$M_{2,n} = \{f \mid f : E_2^n \rightarrow 2^{E_2}\}, \quad M_2 = \bigcup_n M_{2,n},$$

В дальнейшем не будем различать множество из одного элемента и элемент этого множества. Для множества E_2 будем использовать обозначение «—» (прочерк), для пустого множества — «*».

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$, $f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)$ — мультифункции. Суперпозиция $f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$ задает $g(x_1, \dots, x_m)$ следующим образом: если набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in E_2^m$, то по определению

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n). \quad (1)$$

Будем говорить, что мультифункция $g(x_1, \dots, x_n)$ получается из функций $f_1(x_1, \dots, x_n)$, $f_2(x_1, \dots, x_n)$ с помощью операции разветвления по предикату равенства, если для некоторых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ выполняется соотношение

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n), & \text{если } x_i = x_j, \\ f_2(x_1, \dots, x_n), & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (2)$$

Определим ES_U -замыкание множества $Q \subseteq M_2$ как множество всех мультифункций из M_2 , которые можно получить из множества Q с помощью операций введения фиктивных переменных, отождествления переменных, суперпозиции (1) и разветвления по предикату равенства (2). ES_U -замыкание множества Q обозначаем как $[Q]$.

Введем в рассмотрение 11 множеств мультифункций:

$$K_1 = \{f \mid f(0, \dots, 0) \in \{0, -\}\}; K_2 = \{f \mid f(1, \dots, 1) \in \{1, -\}\};$$

$$K_3 = \{f \mid f(0, \dots, 0) \in \{0, *\}\}; K_4 = \{f \mid f(1, \dots, 1) \in \{1, *\}\};$$

$$K_5 = O_2^*; K_6 = H_2; K_7 = \{f \mid f(\tilde{\alpha}) \in \{*, 1, -\}\};$$

$$K_8 = \{f \mid f(\tilde{\alpha}) \in \{*, 0, -\}\}; K_9 = Pol R_9; R_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & - \\ 1 & 0 & * & - \end{pmatrix};$$

$$K_{10} = Pol R_{10}; R_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & 1 & - & * & * & * & * \end{pmatrix};$$

$$K_{11} = \{f \mid * \in f(0, \dots, 0) \cup f(1, \dots, 1) \text{ либо } f(0, \dots, 0) = 0 \text{ и } f(1, \dots, 1) = 1\}.$$

Где через $Pol R$ обозначается множество функций, сохраняющих предикат R . Понятие сохранения предиката функцией является стандартным [1].

Для рассматриваемых множеств справедлива лемма.

Лемма 1. *Множества $K_1 - K_{11}$ являются ES_U -замкнутыми.*

Будем в дальнейшем использовать обозначение f_{K_i} для функции, не принадлежащей множеству K_i ($i \in \{1, \dots, 11\}$).

Рассмотрим набор вспомогательных утверждений, позволяющих получить критерий полноты.

Лемма 2. *Справедливо $[0, 1, f_{K_5}, f_{K_6}] = M_2$.*

Лемма 3. *Пусть $g_1(x) = (--)$, $g_2(x) = (10)$. Тогда справедливо $[g_1, g_2, f_{K_5}, f_{K_6}, f_{K_9}] = M_2$.*

Лемма 4. *Пусть $g_1(x) = (--)$, $g_2(x) = (11)$. Тогда справедливо $[g_1, g_2, f_{K_2}, f_{K_5}, f_{K_6}, f_{K_7}] = M_2$.*

Лемма 5. *Пусть $g_1(x) = (--)$, $g_2(x) = (1-)$. Тогда справедливо $[g_1, g_2, f_{K_2}, f_{K_5}, f_{K_6}, f_{K_7}] = M_2$.*

Лемма 6. *Пусть $g_1(x) = (--)$, $g_2(x) = (00)$. Тогда справедливо $[g_1, g_2, f_{K_2}, f_{K_5}, f_{K_6}, f_{K_9}] = M_2$.*

Лемма 7. *Пусть $g_1(x) = (--)$, $g_2(x) = (**)$. Тогда справедливо $[g_1, g_2, f_{K_2}, f_{K_5}, f_{K_6}, f_{K_7}] = M_2$.*

Лемма 8. *Пусть $g_1(x) = (--)$, $g_2(x) = (*-)$. Тогда справедливо $[g_1, g_2, f_{K_2}, f_{K_5}, f_{K_6}, f_{K_7}] = M_2$.*

Теорема. *Множество мультифункций Q является ES_U -полным тогда и только тогда, когда оно не содержится целиком ни в одном из классов $K_1 - K_{11}$.*

Список литературы

- [1] Казимиров А. С., Пантелеев В. И., Токарева Л. В. Классификация и перечисление базисов клона всех гиперфункций ранга 2 // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2014. Т 7. С. 61–78.
- [2] Марченков С. С. Операторы замыкания с разветвлением по предикату // Вестник МГУ. Серия 1, Математика и механика. 2003. № 6. С. 37–39.
- [3] Марченков С. С. Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве частичных булевых функций // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 6. С. 80–88.
- [4] Марченков С. С. Оператор E -замыкания на множестве частичных функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. М. : Физматлит, 2013. Т. 19. С. 227–238.
- [5] Пантелеев В. И., Рябец Л. В. Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве гиперфункций ранга 2 // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. Т. 10. С. 93–105.

**ES_U -completeness criterion of multifunctions on
two-element set**

Panteleev Vladimir Innokentevich, Riabets Leonid Vladimirovich

Irkutsk State University, e-mail: vl.panteleyev@gmail.com, l.riabets@gmail.com

In this paper, we consider the action of the operator with branching on equality on the set of multifunction functions of rank 2. Eleven precomplete sets of multifunctions are determined and a completeness criterion is formulated.

Keywords: closure, equality predicate, multifunction, closed set, composition, completeness criterion.