

УДК 519.7

О сложности мультиопераций ранга k в классе стандартных форм

Казимиров Алексей Сергеевич

Иркутский государственный университет, e-mail: a.kazimirov@gmail.com

Мультиоперации ранга k определяются как функции на множестве всех подмножеств некоторого k -элементного множества A , при этом значения мультиоперации на наборах из A задаются, а на остальных наборах определяются как объединение всех значений мультиопераций на соответствующих наборах из A . Таким же образом определяется суперпозиция для мультиопераций. Мультиоперации являются обобщением различных моделей неопределенности, частичных и гиперопераций. Для мультиопераций можно определить стандартные формы через мультиоперацию пересечения. Для них можно естественным образом ввести понятие сложности по количеству компонент пересечения. Ранее была найдена сложность стандартных форм мультиопераций ранга 2 сведением к длине наикратчайшей ДНФ. В данной работе обобщается предыдущий результат на мультиоперации ранга k .

Ключевые слова: мультиоперации, сложность, стандартные формы.

Мультиоперации ранга k определяются как функции на множестве 2^A ($|A| = k$), при этом значения мультиоперации на наборах из A задаются, а на остальных наборах определяются как объединение всех значений мультиопераций на соответствующих наборах из A . Таким же образом определяется суперпозиция для мультиопераций.

Мультиоперации являются обобщением различных моделей неопределенности, частичных и гиперопераций.

Для мультиопераций можно определить стандартные формы через мультиоперацию пересечения. Для них можно естественным образом ввести понятие сложности по количеству компонент пересечения.

Ранее [1] была найдена сложность стандартных форм мультиопераций ранга 2 сведением к длине наикратчайшей ДНФ. В данной работе обобщается предыдущий результат на мультиоперации ранга k .

Отображение из A^n в A называется n -местной операцией на A . Через 2^A обозначим множество всех подмножеств A . Отображение из A^n в 2^A называется n -местной мультиоперацией на A . Множество всех n -местных мультиопераций на A при $|A| = k$ будем обозначать H_k^n .

Суперпозиция мультиопераций определяется следующим образом

$$(f * (f_1, \dots, f_n))(a_1, \dots, a_m) = \bigcup_{b_i \in f_i(a_1, \dots, a_m)} f(b_1, \dots, b_n).$$

Следуя [2], n -местную мультиоперацию f на множестве $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ будем представлять как отображение

$$f : \{2^0, 2^1, \dots, 2^{k-1}\}^n \rightarrow \{0, 1, \dots, 2^k - 1\},$$

используя следующую кодировку для элементов 2^A :

$$\emptyset \rightarrow 0; \quad a_i \rightarrow 2^i; \quad \{a_{i_1}, \dots, a_{i_s}\} \rightarrow 2^{i_1} + \dots + 2^{i_s}.$$

При этом n -местную мультиоперацию f можно задать вектором всех ее значений $(\alpha_1, \dots, \alpha_{k^n})$, где $f(2^{a_1}, \dots, 2^{a_n}) = \alpha_i$, если $(i_1, \dots, i_n)$ есть представление числа i в системе счисления с основанием k .

Определим бинарную мультиоперацию ранга k «пересечение» $\cap$ следующим образом: $\cap(a, b) = \{a\} \cap \{b\}$. Далее будем использовать инфиксную форму записи для пересечения. Эта мультиоперация является коммутативной и ассоциативной, а также принадлежит любому суперклону [3], что делает естественным использование $\cap$ для построения формульных представлений мультиопераций.

Обозначим через $d_{i,\alpha}^n$ следующие мультиоперации

$$d_{i,\alpha}^n = (2^k - 1, \dots, 2^k - 1, \overset{i}{\alpha}, 2^k - 1, \dots, 2^k - 1), \quad (1 \leq i \leq k^n),$$

где $\alpha \in \{0, \dots, 2^k - 1\}$. В частности, $d_{1,\alpha}^0 = (\alpha)$.

В [4] была введена стандартная форма мультиоперации

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigcap_j d_j(x_{i_1}, \dots, x_{i_m}),$$

где $d_j \in \{d_{i,\alpha}^m \mid 0 \leq m \leq n, \alpha \in \{0, \dots, 2^k - 1\}\}$. Представление мультиопераций стандартной формой не единственно.

Для стандартной формы Φ , имеющей вид

$$\Phi = d_1 \cap \dots \cap d_s,$$

где $d_j \in \{d_{i,\alpha}^m \mid 0 \leq m \leq n, \alpha \in \{0, \dots, 2^k - 1\}\}$, можно ввести понятие сложности через количество компонент пересечения $L_{SF}(\Phi) = s$.

Для мультиоперации f ранга k сложность определяется как сложность минимальной стандартной формы, представляющей f :

$$L_{SF_k}(f) = \min_{f=\Phi} L_{SF}(\Phi).$$

Сложность класса всех n -местных мультиопераций ранга k (функция Шеннона сложности мультиопераций) определяется как сложность n -местной мультиоперации с наибольшей сложностью:

$$L_{SF_k}(n) = \max_{f \in H_k^n} L_{SF_k}(f).$$

Для любой n -местной мультиоперации f ранга k выполняется $L_{SF_k}(f) \leq k^n$.

Рассмотрим последовательность мультиопераций $f_n(x_1, \dots, x_n)$, которая определяется следующим образом:

$$f_n(a_1, \dots, a_n) = 2^k - 1 - 2^a, \quad a = (a_1 + \dots + a_n) \pmod{k}.$$

Мультиоперации из данной последовательности имеют следующую сложность:

Теорема 1. $L_{SF_k}(f_n) = k^n$.

С учетом верхней оценки сложности можно сделать следующий вывод:

Следствие 1. $L_{SF_k}(n) = k^n$.

Список литературы

- [1] Казимиров А. С. О сложности стандартных форм мультифункций // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2017. Т. 22. С. 63–70.
- [2] Перязев Н. А. Клоны, ко-клоны, гиперклоны и суперклоны // Ученые записки Казанского государственного университета. Серия Физико-математические науки. 2009. Т. 151, кн. 2. С. 120–125.
- [3] Перязев Н. А. Стандартные формы мультиопераций в суперклонах // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2010. Т. 3, № 4. С. 88–95.
- [4] Перязев Н. А. Суперклоны мультиопераций // Труды VIII Международной конференции «Дискретные системы в теории управляющих систем». М. : МАИС Пресс, 2009. С. 233–238.

On the Complexity of Standard Forms for Multioperations of rank k

Kazimirov Alexey Sergeevich

Irkutsk State University, e-mail: a.kazimirov@gmail.com

Multioperations of rank k are defined as functions mapping k -element set A to the set of all its subsets. Values of a multioperation for inputs equal to one-element sets are given and values for other sets are calculated as a union of values on one-element sets. Superposition of multioperations is defined in the same way. Multioperation is a generalization of different models of uncertainty, incomplete and partial operations and hyperoperations. Standard forms representing multioperations are defined using intersection multioperation. It is natural to define complexity of a standard form as the number of its components. This paper generalizes previous exact bounds on complexity of n -ary multioperations of rank 2 to multioperations of rank k .

Keywords: multioperation, complexity, standard form.