

УДК 519.7

Алгоритм минимизация мультиопераций в классе ключевых стандартных форм

Тоди́ков Сергей Игоревич

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»
им. В. И. Ульянова (Ленина), e-mail: sergeytodikov@gmail.com

В работе рассматривается вопрос минимизации мультиопераций в классе ключевых стандартных форм. В основе работы лежит разработанный алгоритм минимизации мультиопераций для $n = 2$ и $n = 3$ в классе ключевых стандартных форм. С помощью разработанного алгоритма получены минимальные представления мультиопераций для $n = 2$ и $n = 3$, средняя сложность минимального представления мультиопераций и количественное распределение мультиопераций по сложностям полученных минимальных представлений в классе ключевых стандартных форм. Произведено сравнение полученных результатов минимизации мультиопераций в классе ключевых стандартных форм с минимизацией мультиопераций в классе стандартных форм.

Ключевые слова: мультиоперация, суперклон, ключевая стандартная форма, алгоритм, минимизация.

В работе рассматривается реализация алгоритма нахождения представления минимальной сложности для мультиопераций в классе ключевых стандартных форм.

Пусть 2^A — множество всех подмножеств A . Отображением из A^n в 2^A называется n -местной мультиоперацией над A . Множество всех n -местных мультиопераций на A будем обозначать через H_n^A . При $|A| = k$ будем использовать обозначение H_n^k . Мультиоперации заданные на k -элементном множестве A будем называть мультиоперациями ранга k .

Определим бинарную мультиоперацию $\cap \in H_k^2$ как $\cap(a, b) = \{a\} \cap \{b\}$. В дальнейшем будем использовать суффиксную форму записи $\cap(a, b) = a \cap b$. Эта мультиоперация является коммутативной и ассоциативной. Также эта мультиоперация принадлежит любому суперклону [1], что делает естественным её использование для построений формульных представлений мультиопераций.

Через $d_{i,\alpha}^n \in H_k^n$ обозначим следующие мультиоперации:

$$d_{i,\alpha}^n = (2^k - 1, \dots, 2^k - 1, \alpha^i, 2^k - 1, \dots, 2^k - 1), (1 \leq i \leq k^n),$$

где $\alpha \in \{2^k - 1, \dots, 2^k - 1\}$. В частности $d_{1,\alpha}^0 = (\alpha)$. Если $\alpha = 2^k - 1$, то используем обозначение d^n , то есть $d^n = (2^k - 1, \dots, 2^k - 1)$.

В [2] была введена ключевая стандартная форма мультиопераций

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bigcap_j d_j(x_{j_1}, \dots, x_{j_m}),$$

при котором выполняется $d_j \in \langle f, d_{1,1}^1, \dots, d_{s,2^{s-1}}^1, \dots, d_{k,2^{k-1}}^1 \rangle$.

Также в [2] была введена лемма, говорящая о том, что если $f \in H_k^n$ и $f \neq d^n$, то существует разложение по аргументу x_i :

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0 \cap f_1 \cap f_2 \cap \dots \cap f_2^{s-1} \cap \dots \cap f_2^{k-1},$$

где в f_0 аргумент x_i является фиктивным, а f_2^{k-1} такие, что $2^r - 1$ остаточные по аргументу x_i при $r \neq s$ равным d^{n-1} , при этом выполняется $f_0, f_2^{s-1} \in \langle f, d_{1,1}^1, \dots, d_{s,2^{s-1}}^1, \dots, d_{k,2^{k-1}}^1 \rangle, s \in \{1, \dots, k\}$.

Пример 1. Представим мультиоперацию $f \in H_2^n$ заданной векторно $f(x_1, x_2, x_3) = (20312001)$ в ключевой стандартной форме.

$$f(x_1, x_2, x_3) = d_{2,1}^1(x_3) \cap d_{1,2}^1(x_2) \cap d_{7,0}^3(x_1, x_2, x_3)$$

Также данную мультиоперацию можно представить следующим видом:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) = & d_{2,1}^1(x_3) \cap d_{1,2}^1(x_2) \cap d_{2,0}^2(x_2, x_3) \cap d_{3,2}^2(x_1, x_3) \cap d_{4,1}^2(x_1, x_3) \\ & \cap d_{3,2}^2(x_1, x_2) \cap d_{4,1}^2(x_1, x_2) \cap d_{6,0}^3(x_1, x_2, x_3) \cap d_{7,0}^3(x_1, x_2, x_3) \end{aligned}$$

Как видно, представление мультиопераций в ключевой стандартной форме не единственно.

Под минимальностью будем понимать представление мультиоперации в виде ключевой стандартной формы с наименьшим количеством компонент пересечения. Количество компонент пересечения в представлении назовем его сложностью.

Работа алгоритма заключается в наилучших заменах нулевых элементов мультиоперации с помощью леммы, так как именно на этих шагах ключевая стандартная форма дает разные сложности.

На вход алгоритма подается вектор, представляющий мультиоперацию.

На выходе алгоритма получим минимальную ключевую стандартную форму, представляющую мультиоперацию и сложность её формы.

Работу алгоритма можно представить следующими шагами:

Шаг 1. Выполнить основные шаги алгоритма представления мультиоперации в ключевой стандартной формы до момента замены нулевых элементов мультиоперации, где начинает работать лемма.

Шаг 2. Если в мультиоперации нет ни одного нулевого элемента, то перейти к шагу 1, иначе переходим к шагу 3.

Шаг 3. Если в мультиоперации нулевой элемент можно заменить на элемент $2^k - 1$, то производим замену. Если на данном шаге все нулевые элементы заменяются на элементы $2^k - 1$, то возвращаемся на шаг 1.

Шаг 4. Если с помощью замены нулевых элементов можно построить одинаковую последовательность элементов в мультиоперации, то производим замену, создаем последовательность и переходим к шагу 1, иначе переходим к шагу 5.

Шаг 5. Производим замену нулевых элементов с помощью элементов, которые получаются по остаточной мультиоперации от последней переменной в мультиоперации и возвращаемся к шагу 1.

Для тестирования алгоритма была реализована компьютерная программа и проведена минимизация всех мультиопераций в классе ключевых стандартных форм для $n = 2$ и $n = 3$.

Мультиоперации вида $d_{1,0}^0$ и $d_{1,3}^0$ являются специфическими для данного алгоритма и найти их сложность по алгоритму невозможно, но они имеют сложность 1, так как их представление в ключевой стандартной форме очевидно и сложность каждого представления равна 1. Для остальных мультиопераций, с помощью алгоритма, были найдены все минимальные представления и их сложности.

Полученные данные позволили определить среднюю сложность минимального представления мультиопераций в классе ключевых стандартных форм для $n = 2$ и $n = 3$ и количественное распределение мультиопераций по сложностям полученных минимальных представлений.

$L_{aver}(2) = 2, 36$; $L_{aver}(3) = 4, 46$; где L_{aver} — средняя сложность минимального представления мультиопераций в классе ключевых стандартных форм.

Распределение полученных минимальных представлений при $n = 2$ отображено в таблице 1 и при $n = 3$ в таблице 2. Используем следующие обозначения: L — сложность мультиопераций; K — количество мультиопераций, имеющих соответствующую сложность, P — процент от числа мультиопераций.

Таблица 1

L	K	P
1	28	10,51%
2	122	47,76%
3	92	36,22%
4	14	5,51%

Данные результаты позволяют сравнить минимизацию мультиопераций в классе ключевых стандартных форм с минимизацией в классе стандартных форм [3]. Средние сложности минимального представления мультиопераций в классе стандартных форм для $n = 2$ и $n = 3$ имеют следующие значения: $L_{aver}(2) = 2, 36$; $L_{aver}(3) = 4, 14$. В таблицах 3 и 4 показаны распределения минимальных представлений при $n = 2$ и при $n = 3$ для класса стандартных форм.

При сравнении видно, что для мультиопераций от $n = 2$ минимизация почти совпала, а средние сложности минимального представления почти равны. Для мультиопераций от $n = 3$ минимизация по сложностям совпала, но зна-

Таблица 2

L	K	P
1	82	0,12%
2	1548	2,36%
3	9560	14,60%
4	22580	34,45%
5	21560	32,89%
6	8648	13,20%
7	1472	2,25%
8	86	0,13%

Таблица 3

L	K	P
1	24	9,45%
2	124	48,82%
3	92	36,22%
4	14	5,51%

Таблица 4

L	K	P
1	78	0,12%
2	1765	2,69%
3	13319	20,32%
4	28966	44,2%
5	17144	26,16%
6	3724	5,69%
7	512	0,78%
8	26	0,04%

чения P различаются, причем в классе стандартных форм он лучше. Также видно, что средняя сложность минимального представления в классе стандартных форм при $n = 3$ немного лучше, чем в классе ключевых стандартных форм. Это говорит о том, что минимальное представление мультиопераций в классе стандартных форм лучше, чем в классе ключевых стандартных форм,

но так как класс ключевых стандартных форм является частью класса стандартных форм, то получение таких результатов вполне естественно.

Список литературы

- [1] Перязев Н. А. Стандартные формы мультиопераций в суперклонах // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2010. Т. 3, № 4. С. 88-95.
- [2] Peryazev N. A., Sharankhaev I. K. Galois theory for clones and superclones // Discrete Mathematics and Applications. 2016. Vol. 26. № 4. P. 227-238.
- [3] Перязев Н. А., Яковчук И. А. Минимизация мультиопераций в классе стандартных форм // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2009. Т. 2, № 2. С. 117-125.

Algorithm for Minimizing Multioperations in the Class of Key Standard Forms

Todikov Sergei Igorevich

Saint-Petersburg Electrotechnical University «LETI», e-mail: sergeytodikov@gmail.com

This article addresses the problem of minimizing multioperations in a class of key standard forms. The work is based on the developed algorithm for minimizing multi-operations for $n = 2$ and $n = 3$. Using the developed algorithm, all minimal representations of multioperations for $n = 2$ and $n = 3$, the average complexity of the minimal representation of multioperations and the quantitative distribution of multioperations by the minimal complexity of the obtained minimal representation in the class of key standard forms are obtained. The obtained results of minimizing multioperations in the class of key standard forms are compared with the minimization of multioperations in the class of standard forms.

Keywords: multioperation, superclone, key standard form, algorithm, minimization.