

УДК 512.55

Новый критерий о критичности некоторых конечных некоммутативных колец

Батзул Тумур, Ганхуяг Данзан

Монгольский университет науки и технологий, e-mail: must1204@gmail.com

В этой работе вводится понятие коммутатор-тождества конечных колец, через которое определяется максимальное коммутатор-подкольцо. С помощью данных определений формулируется и доказывается новый критерий о критичности некоторых конечных некоммутативных колец.

Ключевые слова: кольцо, полиномиальное тождество кольца, критическое кольцо, абелева группа

Введение

В настоящей работе сформулирован новый критерий о критичности некоторых некоммутативных конечных колец. Заметим, что первый пример конечного кольца, не представимого матрицами, дан Дж. Бергманом в работе [1]. Оно является кольцом эндоморфизмов.

Роль критического кольца в теории многообразий колец впервые показана в работах [6] и [5]. Далее критические кольца и алгебры изучались в работах [2–4; 7–12]. В этой работе мы формулируем новое семейство классов многочленов и некоторые понятия колец.

Основная часть

Прежде всего отметим следующие классические определения.

Определение 1. Пусть $Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — кольцо многочленов от $x_1, x_2, \dots, x_n$ переменных с целыми коэффициентами. Пусть S — некоторое кольцо и $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется полиномиальным тождеством кольца S , если $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ для всех $a_1, a_2, \dots, a_n \in S$.

Определение 2. Пусть S — некоторое кольцо и $g(x_1, x_2, \dots, x_n) \in Z(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Если многочлен $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ не имеет полиномиального тождества кольца S и является полиномиальным тождеством над всеми подкольцами кольца S , то кольцо S называется критическим кольцом, а многочлен $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется критическим многочленом кольца S .

Замечание 1. Пусть $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$. Пусть $J_1[x_1, x_2] = [x_1, x_2]$, $J_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = [J_1(x_1, x_2), J_1(x_3, x_4)] = [x_1, x_2] \cdot [x_3, x_4] - [x_3, x_4] \cdot [x_1, x_2], \dots$,

$$\begin{aligned} J_m(x_1, x_2, \dots, x_{2^m}) &= [J_{m-1}(x_1, x_2, \dots, x_{2^{m-1}}), J_{m-1}(x_{2^{m-1}+1}, x_{2^{m-1}+2}, \dots, x_{2^m})] = \\ &= J_{m-1}(x_1, x_2, \dots, x_{2^{m-1}}) J_{m-1}(x_{2^{m-1}+1}, x_{2^{m-1}+2}, \dots, x_{2^m}) - \\ &\quad - J_{m-1}(x_{2^{m-1}+1}, x_{2^{m-1}+2}, \dots, x_{2^m}) J_{m-1}(x_1, x_2, \dots, x_{2^{m-1}}). \end{aligned}$$

Многочлен J_m назовём m кратным коммутатор-тождеством. Из этого замечания следует, что

$$J_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2 - x_2x_1)(x_3x_4 - x_4x_3) - (x_3x_4 - x_4x_3)(x_1x_2 - x_2x_1)$$

или

$$\begin{aligned} J_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1x_2x_3x_4 - x_2x_1x_3x_4 - x_1x_2x_4x_3 + x_2x_1x_4x_3 - \\ &\quad - x_3x_4x_1x_2 + x_4x_3x_1x_2 + x_3x_4x_2x_1 - x_4x_3x_2x_1. \end{aligned}$$

Теперь докажем следующую лемму

Лемма 1. Пусть S — конечное кольцо. Тогда существует некоторое кратное коммутатор-тождество J_m такое, что J_m имеет полиномиальное тождество кольца S .

Доказательство. Если S коммутативное кольцо, то $J_1[x, y] = [x, y] = xy - yx = 0$ для всех $x, y \in S$. Пусть S — некоммутативное конечное кольцо. Пусть порядок кольца S равен $|S| = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_i$, где $p_1, p_2, \dots, p_i$ — простые числа. Докажем индукцией по i .

- I. Если $i = 1$ или p_1 — простое число и порядок кольца S равен p_1 , то кольцо S является коммутативным кольцом. Поэтому J_1 имеет полиномиальное тождество кольца S .
- II. Пусть k — некоторое целое положительное число. Тогда считаем, что если i любое положительное целое число ($i < k$), а $p_1, p_2, \dots, p_i$ любые простые числа, то существуют кратные коммутатор-тождества каждого из колец порядка $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_i$.
- III. Пусть $q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_k$ — некоторые простые числа, S — некоторое конечное некоммутативное кольцо, порядок S равен $|S| = q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_k$, а 0 — нейтральный элемент кольца S . Пусть $r \in S$ и $r \neq 0$.

$$T = \{n_1r + n_2r^2 + \dots + n_mr^m : 1 \leq m \in \mathbb{Z}, n_1, n_2, \dots, n_m \in \mathbb{Z}\}.$$

Тогда T имеет коммутативное подкольцо кольца S . Из теоремы Лагранжа группы следует, что порядок кольца T делит порядок кольца S . Пусть $|T| = q_{t+1} \cdot \dots \cdot q_t > 1$, $1 < t < k$.

Порядок фактор кольца S/T равен $|S/T| = q_1 \cdot q_t$. Из условия (II) следует, что существует кратное коммутатор-тождество J_m кольца S/T . Из определения следует,

$$J_m(y_1 + T, y_2 + T, \dots, y_{2^m} + T) = 0 + T \text{ для любых } y_1, \dots, y_{2^m}. \quad (1)$$

Пусть $a_1, \dots, a_{2^m}, \dots, a_{2^{m+1}} \in S$

$$\alpha = J_m(a_1, a_2, \dots, a_{2^m}), \beta = J_m(a_{2^m+1}, a_{2^m+2}, \dots, a_{2^{m+1}}).$$

Тогда из определения фактор-кольца следует

$$J_m(a_1 + T, a_2 + T, \dots, a_{2^m} + T) = J_m(a_1, a_2, \dots, a_{2^m}) + T = \alpha + T$$

и

$$\begin{aligned} J_m(a_{2^m+1} + T, a_{2^m+2} + T, \dots, a_{2^{m+1}} + T) &= \\ &= J_m(a_{2^m+1}, a_{2^m+2}, \dots, a_{2^{m+1}}) + T = \beta + T. \end{aligned}$$

Поэтому из условия (1) следует $\alpha + T = 0 + T \in S/T$, $\beta + T = 0 + T \in S/T$ или $\alpha, \beta \in T$. T — коммутативное кольцо, поэтому $J_1(\alpha, \beta) = 0$ или

$$\begin{aligned} J_{m+1}(a_1, a_2, \dots, a_{2^{m+1}}) &= \\ &= J(J_m(a_1, a_2, \dots, a_{2^m}), J_m(a_{2^m+1}, a_{2^m+2}, \dots, a_{2^{m+1}})) = J(\alpha, \beta) = 0. \end{aligned}$$

Отсюда J_{m+1} имеет коммутатор-тождество кольца S . По принципу математической индукции лемма доказана. $\square$

Следствие 1. Пусть $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_i$ — простые числа, S — конечное некоммутативное кольцо, а порядок S равен $|S| = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_i$. Тогда существует положительное целое число m такое, что J_m имеет коммутатор-тождество кольца S и $1 < m \leq k$.

Определение 3. Пусть S — некоммутативное конечное кольцо. Если J_m не имеет коммутатор-тождество кольца S , а J_{m+1} имеет коммутатор-тождество кольца S , то J_m назовём внешним коммутатор-тождеством кольца S .

Определение 4. Пусть S — некоммутативное конечное кольцо, J_m — внешнее коммутатор-тождество кольца S , а T — подкольцо кольца S . Если T максимальное подкольцо удовлетворяет условию, что J_m имеет внешнее коммутатор-тождество, то кольцо T назовём максимальным коммутатор-подкольцом кольца S .

Лемма 2 (Новый критерий критичности некоторых конечных некоммутативных колец). Пусть S — конечное некоммутативное кольцо, а T — максимальное коммутатор-подкольцо кольца S . Если T имеет подкольцо всех максимальных колец кольца S и фактор-кольцо S/T имеет критическое кольцо, то кольцо S является критическим кольцом.

Доказательство. Из определения следует, что существует J_m такое, что

$$\text{а) } J_m(x_1, x_2, \dots, x_{2^m}) = 0, \text{ для каждых } x_1, x_2, \dots, x_{2^m} \in T.$$

$$\text{б) } \text{Существуют } a_1, a_2, \dots, a_{2^m} \in S \text{ такие, что } J_m(a_1, a_2, \dots, a_{2^m}) \neq 0.$$

Кроме того, из определения критического кольца следует, что существует некоторый критический многочлен $f(x_1, x_2, \dots, x_\nu)$ кольца S/T . Пусть

$$g(x_1, x_2, \dots, x_{2m+\nu}) = f(J_m(x_1, x_2, \dots, x_{2m}), \dots, J_m(x_{2m+\nu-2+1}, x_{2m+\nu-2+2}, \dots, x_{2m+\nu-1})).$$

Легко проверить, что тогда $g(x_1, x_2, \dots, x_{2m+\nu})$ имеет критическое тождество кольца S . Лемма доказана. $\square$

Список литературы

- [1] Bergman G. M. Some examples in PI ring theory // Israel Jour. Math. 1974. Vol. 18, N 3. P. 257–277.
- [2] Мекей А. О критичности колец эндоморфизмов некоторых конечных абелевых групп // Фундаментальная и прикладная математика. 1996. Т. 2, вып. 2. С. 449–482.
- [3] Генов Г. К., Сидеров П. Базис тождеств алгебры матриц четвертого порядка над конечным полем I // Серд. Бълг. мат. списание. 1982. Т. 8. С. 313–353.
- [4] Генов Г. К., Сидеров П. Базис тождеств алгебры матриц четвертого порядка над конечным полем II // Серд. Бълг. мат. списание. 1982. Т. 8. С. 353–366.
- [5] Kruse R. L. Identities satisfied by a finite ring // J. of algebra. 1973. Vol. 26. P. 298–318.
- [6] Львов И. В. О многообразиях ассоциативных колец I // Алгебра и логика. 1973. Т. 12, № 3. С. 269–297.
- [7] Латышев В. Н. Конечная базлируемость тождеств некоторых колец // Успехи математических наук. 1976. Т. 32, № 4. С. 259–260.
- [8] Мальцев Ю. Н. О строении некоторых критических колец // Сибирский математический журнал. 1984. Т. 25, № 1. С. 91–100.
- [9] Мальцев Ю. Н. Кольцо матриц над критическим кольцом является критическим // УМН. 1984. Т. 39. Вып. 4(238). С. 171–172.
- [10] Мальцев Ю. Н. О представлении конечных колец матрицами над коммутативным кольцом // Математический сборник. 1985. Т. 128(170), № 3. С. 383–402.
- [11] Мальцев Ю. Н., Нечаев А. А. О критических кольцах многообразиях алгебр // Алгебра и логика. 1979. Т. 18, № 3. С. 341–347.

- [12] Нечаев А. А. Описание конечных критических колец главных идеалов // Успехи математических наук. 1982. Т. 37, вып. 5(227). С. 193–194.

New criterion on criticality of particular finite noncommutative rings

Batzul Tumor, Gankhuyag Danzan

Mongolian University of Science and Technology , e-mail: must1204@gmail.com

This paper introduces commutator-identity of finite rings and maximal commutator-subring. We formulate and prove a new criterion on criticality of particular finite noncommutative rings using these definitions.

Keywords: ring, polynomial identity of a ring, critical ring, abelian group.