

УДК 519.716

Критерий ES_I -полноты множества мультифункций ранга 2

Тагласов Эдуард Станиславович, Пантелеев Владимир
Инокентьевич

Иркутский государственный университет, e-mail: taglasov1@gmail.com, vl.panteleyev@gmail.com

В работе рассматривается ES_I -замыкание мультифункций, заданных на двухэлементном множестве. Приводятся примеры полных множеств, формулируется и доказывается критерий функциональной полноты.

Ключевые слова: мультифункция, полнота, базис, замыкание, суперпозиция.

Наряду с классическими функциональными системами над множеством k -значных функций ($k \geq 2$) достаточно давно изучаются системы, в которых рассматриваются обобщения функций k -значной логики: частичные функции, мультифункции и гиперфункции — функции, заданные на конечном множестве A и принимающие в качестве своих значений подмножества множества A , относительно оператора суперпозиции (например, $[1; 2; 11]$).

Оператор суперпозиции приводит, как правило, к счетной или континуальной классификации, поэтому вызывают интерес операторы замыкания, которые порождают конечные классификации функций. К таким операторам относятся, в частности, операторы параметрического и позитивного замыканий, оператор E -замыкания [3–6; 8–10].

Пусть $E_2 = \{0, 1\}$. Множество всех мультифункций ранга 2 обозначается как M_2 и определяется следующим образом:

$$M_{2,n} = \{f \mid f : E_2^n \rightarrow 2^{E_2}\}, \quad M_2 = \bigcup_n M_{2,n},$$

При дальнейшем изложении мы не будем различать множество из одного элемента и элемент этого множества. Для множества E_2 будем использовать обозначение « $-$ » (прочерк), а для пустого множества — $*$.

Пусть $f(x_1, \dots, x_n)$, $f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)$ — мультифункции. Суперпозиция $f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$ задает мультифункцию $g(x_1, \dots, x_m)$ следующим образом: если набор $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in E_2^m$, то по определению

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{если это пересечение не пусто;} \\ \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Определенную таким образом суперпозицию будем называть I -суперпозицией. I -суперпозиция позволяет находить значения мультифункций на наборах, составленных из элементов множества $\{0, 1, -, *\}$.

Пример. Пусть мультифункция $f(x, y)$ такая, что $f(0, 0) = 0$, $f(0, 1) = -$, $f(1, 0) = *$, $f(1, 1) = 1$. Тогда $f(0, -) = f(0, 0) \cap f(0, 1) = 0$ и, так как $f(1, 0) \cap f(1, 1) = *$, то $f(1, -) = f(1, 0) \cup f(1, 1) = 1$.

Будем говорить, что мультифункция $g(x_1, \dots, x_n)$ получается из функций $f_1(x_1, \dots, x_n)$, $f_2(x_1, \dots, x_n)$ с помощью операции разветвления по предикату равенства, если для некоторых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ выполняется соотношение

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n), & \text{если } x_i = x_j, \\ f_2(x_1, \dots, x_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определим ES_I -замыкание множества $Q \subseteq M_2$ как множество всех мультифункций из M_2 , которые можно получить из множества Q с помощью операций введения фиктивных переменных, отождествления переменных, I -суперпозиции и разветвления по предикату равенства. ES_I -замыкание множества Q обозначаем как $[Q]$.

Множество гиперфункций, которое совпадает со своим замыканием, называется ES_I -замкнутым классом. Множество R называется полным в M_2 , если ES_I -замыкание R совпадает с M_2 .

Множество функций, сохраняющих предикат R , обозначим как $Pol R$. Далее m -местный предикат, содержащий n наборов, будем задавать матрицей размерности $m \times n$, в которой столбцами являются наборы из предиката.

Введем в рассмотрение следующие 9 множеств мультифункций:

$$\begin{aligned} K_1 &= \{f \mid f(0, \dots, 0) \in \{0, *\}\}; K_2 = \{f \mid f(1, \dots, 1) \in \{1, *\}\}; \\ K_3 &= O_2^*; K_4 = H_2; K_5 = \{f \mid f(\tilde{\alpha}) \in \{*, 1, -\}\}; \\ K_6 &= \{f \mid f(\tilde{\alpha}) \in \{*, 0, -\}\}; K_7 = Pol R_7; R_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & - \\ 1 & 0 & * & - \end{pmatrix}; \\ K_8 &= Pol R_8; R_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & * & * & * & * & 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & 0 & 1 & - & * & * & * & * \end{pmatrix}; \\ K_9 &= \{f \mid * \in f(0, \dots, 0) \cup f(1, \dots, 1) \text{ либо } f(0, \dots, 0) = 0 \text{ и } f(1, \dots, 1) = 1\}. \end{aligned}$$

Теорема 1. Множества $K_1 - K_9$ являются ES_I -замкнутыми.

Теорема 2. Для множеств $K_1, \dots, K_9$ выполняется $K_i \not\subseteq K_j$ при $i \neq j$.

Будем использовать обозначение f_{K_i} для функции, не принадлежащей множеству K_i ($i \in \{1, \dots, 9\}$).

Лемма 1. Справедливо $[0, 1, f_{K_3}, f_{K_4}] = M_2$.

Лемма 2. Пусть $g_1(x) = (--)$, $g_2(x) = (10)$. Тогда справедливо $[g_1, g_2, f_{K_3}, f_{K_4}, f_{K_7}] = M_2$.

Лемма 3. Пусть $g_1(x) = (--)$, $g_2(x) = (11)$. Тогда справедливо $[g_1, g_2, f_{K_3}, f_{K_4}, f_{K_5}] = M_2$.

Лемма 4. Пусть $g_1(x) = (--)$, $g_2(x) = (00)$. Тогда справедливо $[g_1, g_2, f_{K_3}, f_{K_4}, f_{K_6}] = M_2$.

Теорема 3. Множество мультифункций R является ES_I -полным тогда и только тогда, когда оно не содержится целиком ни в одном из классов $K_1 - K_9$.

Доказательство. Отождествлением переменных из функции f_{K_9} можно получить одну из восьми следующих одноместных функций:

$f_{K_9}^1 = (--)$, $f_{K_9}^2 = (00)$, $f_{K_9}^3 = (11)$, $f_{K_9}^4 = (10)$, $f_{K_9}^5 = (0-)$, $f_{K_9}^6 = (-0)$, $f_{K_9}^7 = (1-)$, $f_{K_9}^8 = (-1)$.

Так как $f_{K_9}^6(f_{K_9}^6(x)) = f_{K_9}^5$ и $f_{K_9}^5(f_{K_9}^5(x)) = (00)$, $f_{K_9}^8(f_{K_9}^8(x)) = f_{K_9}^7$ и $f_{K_9}^7(f_{K_9}^7(x)) = (11)$, то достаточно рассмотреть первые четыре случая.

Случай 1. $f_{K_9}^1 = (--)$. Из функции f_{K_5} отождествлением переменных можно получить функцию $h(x, y)$ такую, что на наборах (01) и (10) она принимает одно из следующих четырех значений — (00) , (01) , $(0*)$, $(0-)$.

Определим функцию $t(x, y)$:

$$t(x, y) = \begin{cases} -, & \text{если } x = y; \\ h(x, y), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Суперпозиция $t(x, -)$ определяет одноместную функцию $p(x) = (0\beta)$, где $\beta \in \{0, -, 1\}$. Первые два случая сводятся к лемме 4. Рассмотрим оставшийся случай: $p(x) = (01)$.

Оператор разветвления по предикату равенства позволяет из функции $p(x)$ и $-$ получить функцию $(-01-)$, а с помощью суперпозиции $-(10)$. Справедливость утверждения следует из леммы 2.

Случай 2. $f_{K_9}^2 = (00)$. Подставляя константу 0 в функцию f_{K_1} , получим одно из двух множеств функций: $\{0, 1\}$ или $\{0, -\}$.

Для первого множества воспользуемся леммой 1. Для второго леммой 4.

Случай 3. $f_{K_9}^3 = (11)$. Подставляя константу 1 в функцию f_{K_2} , получим одно из двух множеств функций: $\{0, 1\}$ или $\{1, -\}$.

Для первого множества воспользуемся леммой 1. Для второго леммой 3.

Случай 4. $f_{K_9}^4 = (10)$. Функция f_{K_8} на некоторой паре противоположных наборов возвращает одну из следующих пар — (00) , (11) , $(0-)$, (-0) , $(1-)$, (-1) , (11) . А это означает, что, подставляя в функцию f_{K_8} на соответствующие места переменных функцию (10) , можно получить одну из следующих одноместных функций: (00) , (11) , $(0-)$, (-0) , $(1-)$, (-1) , $(--)$, которые легко сводятся к случаю 1.

□

Список литературы

- [1] Ло Джукай. Максимальные замкнутые классы в множестве частичных функций многозначной логики // Кибернетический сборник. Новая серия. М. : Мир, 1988. Вып. 25. С. 131–141.
- [2] Ло Джукай. Теория полноты для частичных функций многозначной логики // Кибернетический сборник. Новая серия. М. : Мир, 1988. Вып. 25. С. 142–157.
- [3] Марченков С. С. О выразимости функций многозначной логики в некоторых логико-функциональных языках // Дискретная математика. 1999. Т. 11, вып. 4. С. 110–126.
- [4] Марченков С. С. Операторы замыкания с разветвлением по предикату // Вестник МГУ. Серия 1, Математика и механика. 2003. № 6. С. 37–39.
- [5] Марченков С. С. Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве частичных булевых функций // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 6. С. 80–88.
- [6] Марченков С. С. Оператор E -замыкания на множестве частичных функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. М. : Физматлит, 2013. Вып. 19. С. 227–238.
- [7] Матвеев С. А. Построение всех E -замкнутых классов частичных булевых функций // Математические вопросы кибернетики. М. : Физматлит, 2013. Вып. 18. С. 239–244.
- [8] Пантелеев В. И., Рябец Л. В. Оператор замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве гиперфункций ранга 2 // Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2014. Т. 10. С. 93–105.
- [9] Рябец Л. В. Параметрически замкнутые классы гиперфункций ранга 2 // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2016. Т. 17. С. 46–61.
- [10] Рябец Л. В. Операторы параметрического и позитивного замыкания на множестве гиперфункций ранга 2 // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2016. Т. 20, вып. 3. С. 79–84.
- [11] Machida H., Pantovic J. On maximal hyperclones on $\{0,1\}$ — a new approach // Proceedings of 38th IEEE International Symposium on Multiple-Valued Logic (ISMVL 2008). 2008. P. 32–37.

Criterion for the ES_I -completeness of Sets of Multifunctions of Rank 2

Taglasov Eduard Stanislavovich, Panteleev Vladimir Innokentevich

Irkutsk State University, e-mail: taglasov1@gmail.com, vl.panteleyev@gmail.com

In this paper the ES_I -closure of multifunction defined on a two-element set is considered. Examples of complete sets are given, a criterion of functional completeness is formulated and proved.

Keywords: multifunction, completeness set, base, closing, superposition.