

УДК 510.665

О полноте теорий второго порядка с аксиомами бесконечности

Смелянский Дмитрий Михайлович

Московский центр непрерывного математического образования, e-mail: dmsolardens@gmail.com

Доклад посвящен определению понятия аксиом бесконечности для формально-логических систем и постановке вопроса о существовании полных теорий второго порядка с аксиомами бесконечности, в дополнение к чему показано, что основные примеры полных эффективных теорий первого порядка не являются таковыми при расширении их логикой второго порядка.

Ключевые слова: теория второго порядка, полнота, аксиоматизируемость, аксиома бесконечности.

В работе ставится вопрос о существовании полных эффективно аксиоматизируемых теорий второго порядка с аксиомами бесконечности. Определение языка и системы вывода для логики второго порядка дается в соответствии с [1]. В отношении семантики рассматривается два рода моделей: стандартные (по Черчу главные) и так называемые модели Хенкина (по Черчу вторичные). Для последних, как показал Хенкин, имеет место полнота дедуктивной системы, и, как следствие, ее компактность.

1. Под аксиомой бесконечности понимается формула, не выполняемая ни в какой конечной модели. Соответственно, отрицание такой формулы может быть названо аксиомой конечной структуры. В действительности, не существует абсолютного формального признака конечной и бесконечной структуры, как показывают утверждения:

Предложение 1. *Не существует формулы, истинной во всех конечных структурах и только в них.*

Утверждение может быть усилено:

Предложение 2. *Если формула выполняема в конечной структуре произвольной мощности, то она выполняема и в некоторой бесконечной структуре.*

Как обращение первого утверждения получаем:

Предложение 3. *Не существует универсального следствия из всех аксиом бесконечности.*

Как следствие отсюда получаем существование нестандартных бесконечных структур, в том смысле, что они не имеют изоморфной множеству натуральных чисел подструктуры.

2. В языке второго порядка арифметика является конечно аксиоматизируемой теорией, что позволяет формализовать ее внутреннюю интерпретируемость, именно существование такой внутренней модели описывает формула:

$$\begin{aligned} & \exists N \exists R \exists z \\ & (\forall x N(x) \exists! y N(y) R(x, y) \wedge \forall u N(u) \forall v N(v) \forall w N(w) (R(u, w) \wedge R(v, w) \rightarrow u = v) \wedge \\ & \wedge \neg \exists x N(x) R(x, z) \wedge \forall P ((P(z) \wedge \forall u N(u) \forall v N(v) (R(v, w) \rightarrow (P(u) \rightarrow P(v)))) \rightarrow \\ & \rightarrow \forall x N(x) P(x))) \end{aligned}$$

Из основных результатов о неполноте формальных теорий отсюда следует, что любая эффективно аксиоматизируемая теория второго порядка, совместная с приведенной формулой, неполна.

3. По этой причине расширения в логике второго порядка ряда известных теорий первого порядка, таких как:

- теория плотного линейного порядка без первого и последнего элемента;
- теория вещественно-замкнутых полей;
- арифметика Пресбургера;

представляющих основные примеры полных систем, полными не оказываются. Действительно, каждая из них либо интерпретирует арифметику, либо совместна с такой интерпретацией.

Можно показать, однако, что такие расширения консервативны. Поэтому все полные теории с аксиоматикой первого порядка являются расширениями полных теорий первого порядка с идентичными аксиомами.

4. Еще один ряд примеров полных теорий в случае первого порядка доставляет свойство категоричности; в случае же второго порядка не имеет смысла, как следует из утверждения:

Предложение 4. Пусть $\mathfrak{K}$ — некоторая структура для языка второго порядка. Если T — теория с аксиомой бесконечности, то она имеет модель $\mathfrak{M}$, для которой существует подмножество N ее носителя M , такое что вместе с ограничениями на него всех предикатов из $\mathfrak{M}$ оно образует подструктуру $\mathfrak{N}$, изоморфную $\mathfrak{K}$.

Отсюда следует, что если какая-либо теория категорична хотя бы в некоторой бесконечной мощности, то всякая ее модель должна содержать все возможные подструктуры, что невозможно, если модель не главная.

Таким образом примеры эффективно аксиоматизируемых полных теорий второго порядка можно найти только среди систем с нестандартной бесконечностью.

Список литературы

- [1] Правиц Д. Натуральный вывод. Теоретико-доказательственное исследование. М. : Лори, 1997. 108 с.
- [2] Черч А. Введение в математическую логику. М. : Либроком, 2009. 482 с.
- [3] Такеути Г. Теория доказательств. М. : Мир, 1978. 412 с.

On the Completeness of Second-Order Theories with Infinity Axioms

Smelianskiy Dmitry Mikhailovich

Moscow Center for Continuous Mathematical Education, e-mail: dmsolardens@gmail.com

The talk is devoted to defining of the notion of infinity axioms for the formal logic systems and go statement of the question: are there any second order theories that are complete? In addition it is shown that the main examples of first order ones become not such by their extension having applied the second order logic.

Keywords: second order theory, completeness, axiomatizability, infinity axiom.