

С. П. Суетин

Численный анализ некоторых характеристик предельного цикла свободного уравнения Ван-дер-Поля

Цель настоящей работы – проиллюстрировать возможности методов эффективного аналитического продолжения степенного ряда на примере хорошо известного свободного уравнения Ван-дер-Поля. Все результаты работы носят исключительно численный характер.

Библиография: 38 названий.

Ключевые слова: свободное уравнение Ван-дер-Поля, аналитическое продолжение степенного ряда, аппроксимации Паде

§ 1. Введение

1.1. Основная цель настоящей работы – проиллюстрировать возможности некоторых методов “эффективного аналитического продолжения” степенного ряда на примере хорошо известного свободного уравнения Ван-дер-Поля – нелинейного дифференциального уравнения с “малым” параметром.

Как известно (см. [1], [2]), свободное уравнение Ван-дер-Поля является идеализированной математической моделью основанного на туннельном диоде физического прибора – “генератора”, который служит источником незатухающих периодических колебаний электрического тока. При определенной нормировке это уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{d^2U}{dt^2} + \varepsilon(U^2 - 1)\frac{dU}{dt} + U = 0, \quad (1)$$

где $U = U(t; \varepsilon)$ – величина, связанная с силой тока в электрической цепи, t – время, а физические характеристики самого генератора описываются одним “малым” параметром ε .

Хорошо известно [1], [2], что уравнение Ван-дер-Поля (1) при любом $\varepsilon > 0$ имеет в фазовой плоскости $(U, dU/dt)$ единственный *предельный цикл*, который является устойчивым. Этот математический факт соответствует экспериментально наблюдаемому физическому явлению: если характеристики генератора подобраны так, что соответствующее значение параметра ε положительно, то в генераторе возбуждаются незатухающие автоколебания вполне определенной частоты и амплитуды. При малых значениях параметра $\varepsilon > 0$ уравнение (1) близко к уравнению линейного осциллятора, а автоколебания в генераторе

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00317 и № 09-01-12160-офи-м) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3906.2008.1).

близки к простым гармоническим колебаниям. По мере роста ε автоколебания все больше отличаются от гармонических колебаний и при достаточно больших значениях ε их характер уже существенно иной – они становятся релаксационными. Это означает, что с течением времени при “движении” по замкнутой фазовой кривой в плоскости $(U, dU/dt)$ плавное изменение физического состояния системы чередуется с весьма быстрыми изменениями скачкообразного характера. Подробное изложение вопросов, касающихся уравнения Ван-дер-Поля, имеется в монографиях [1], [2].

1.2. В работах [3] и [4] предельный цикл уравнения Ван-дер-Поля (1) исследовался *численно* с помощью “Паде-анализа” – метода, основанного на использовании аппроксимаций Паде степенного ряда. Точнее, сначала в [3] было построено *формальное решение* уравнения (1) в виде ряда Тейлора по малому параметру ε с коэффициентами при степенях ε , зависящими от некоторого нового переменного (точнее, являющимися тригонометрическими полиномами от переменного $x = \nu(\varepsilon)t$, где $\nu(\varepsilon)$ – частота колебаний предельного цикла). А затем на основе анализа расположения в комплексной ε -плоскости нулей и полюсов диагональных аппроксимаций Паде достаточно высокого порядка¹ (вплоть до аппроксимаций типа [24/24]) в [3]–[4] были сделаны выводы о расположении и характере особых точек этого формального решения в комплексной ε -плоскости как аналитической функции от ε . В первую очередь это позволило сделать вполне правдоподобный вывод о сходимости построенного ряда в некоторой окрестности начала координат, величине его радиуса сходимости и расположении особых точек на границе соответствующего круга сходимости. Затем на основе полученной информации в [3]–[4] была сделана замена переменной, позволившая фактически осуществить *эффективное аналитическое продолжение* степенного ряда по переменной ε за пределы его круга сходимости (подробнее см. ниже п. 1.3). Такой подход позволил в итоге получить эффективную процедуру для численного построения предельного цикла уравнения (1) при достаточно больших значениях $\varepsilon > 0$.

На рис. 1–13 с необходимыми пояснениями изображены² в фазовой плоскости $(U, dU/dt)$ предельные циклы уравнения (1), построенные автором настоящей работы *непосредственно* с помощью диагональных аппроксимаций Паде для формального решения $U = U(t; \varepsilon)$ уравнения (1), соответствующие величинам $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\varepsilon = 1.3$, $\varepsilon = 1.6$, $\varepsilon = 1.64$, $\varepsilon = 1.65$, $\varepsilon = 1.66$, $\varepsilon = 1.67$, $\varepsilon = 1.7$, $\varepsilon = 2.0$, $\varepsilon = 2.5$, $\varepsilon = 3.0$ и $\varepsilon = 3.4$.

Кроме того, в [3]–[4] были исследованы численно как функции от параметра ε такие важные характеристики³ предельного цикла уравнения (1) как частота колебаний ν и их амплитуда A (пользуясь случаем, отметим, что на самом деле

¹Следует иметь в виду, что при вычислениях основная трудность состояла в определении совокупности функций $u_k(x)$ – функциональных коэффициентов при степенях малого параметра ε^k (см. 20 и 21). Функции частоты и амплитуды предельного цикла зависят от ε^2 , поэтому для вычисления для них аппроксимаций Паде типа $[n/n]$ необходимо знать $4n + 1$ коэффициентов-функций $u_k(x)$.

²Все необходимые при подготовки настоящей работы вычисления и графические построения проделаны автором работы самостоятельно и независимо от [3]–[4]; это касается и подготовки изображенных на рис. 1–13 предельных циклов уравнения (1), соответствующих перечисленным значениям ε .

³В настоящей работе мы по возможности придерживаемся обозначений работ [3]–[4].

обе эти функции зависят от ε^2 ; см. [3]–[4] и п. 3.1 ниже). На основе анализа расположения вычисленных нулей и полюсов диагональных аппроксимаций Паде достаточно высокого порядка в [3]–[4] был сделан вывод, что степенные ряды по переменной $z = \varepsilon^2$ для обеих этих функций имеют ненулевые (притом, весьма близкие друг к другу) радиусы сходимости и на границе соответствующих кругов сходимости этих степенных рядов располагается по паре комплексно-сопряженных особых точек $z_{1,2}(\nu) = R_\nu e^{\pm i\beta_\nu}$ и $z_{1,2}(A) = R_A e^{\pm i\beta_A}$. Проведенные численные расчеты позволили также дать достаточно хорошие с позиций авторов [3]–[4] аппроксимации⁴ для величин особых точек как частоты, так и амплитуды: $R \approx 3.42$, $\beta \approx 1.7925$ [3; п. 3, с. 683]. В [3; п. 3, с. 685] было также отмечено, что величина β близка к $4\pi/7 \approx 1.7952$.

Подчеркнем, что принципиальное отличие работ [3]–[4] от подавляющего большинства других работ, содержащих применение аппроксимаций Паде для построения так называемого “полуаналитического” (т.е. полученного в замкнутой “аналитической” форме, но приближенного) решения некоторого класса задач, состоит в использовании диагональных аппроксимаций Паде *достаточно высокого порядка*: (вплоть до порядка [24/24]).

1.3. Обсудим коротко узловые моменты в рассуждениях работ [3]–[4].

В [3] были численно найдены по 82 (ненулевых) тейлоровских коэффициента функций частоты ν и амплитуды A как функций от $z = \varepsilon^2$, а затем по этим коэффициентам были построены диагональные аппроксимации Паде $[n/n]_f$, $n = 11, 12, \dots, 24$, для $f = \nu, A$, найдены их нули и полюсы и проведен *анализ поведения этих нулей и полюсов* (в дальнейшем – “Паде-анализ”) в зависимости от n . Прделанные в [3]–[4] вычисления убедительно показали, что нули и полюсы диагональных аппроксимаций Паде как для частоты, так и для амплитуды *накапливаются* к некоторым вполне определенным точкам комплексной плоскости, для которых тем самым возникают эмпирические значения [3; с. 683]. На основе этого численно установленного результата в [3]–[4] фактически сделаны следующие выводы о свойствах аналитического продолжения функций частоты и амплитуды: *как частота, так и амплитуда – аналитические функции комплексного переменного $z = \varepsilon^2$, голоморфные в круге с центром в точке $z = 0$ и радиусом $R \approx 3.42$; на границе этого круга сходимости лежит (единственная) пара комплексно-сопряженных особых точек $Re^{\pm i\beta}$, где $\beta \approx 1.7925$; величина 1.7925 близка к величине⁵ $4\pi/7$.*

Эти оценки для значений радиуса и аргумента, полученные в [3]–[4] с помощью Паде-анализа, хорошо согласуются с приближенными значениями, полученными в [3]–[4] с помощью классической формулы Коши–Адамара для радиуса сходимости степенного ряда и с помощью так называемого “метода отношений” [5; часть 2, гл. 1, § 1.3, с. 316] (иногда называемого тестом Домба–Сайкса [33; с. 4] и основанного фактически на классической теореме Фабри “об отношении”; подробнее см. ниже 2). Хорошо известно [11], [16], [22], что “метод

⁴Точнее, в [3]–[4] предложены следующие *эмпирические границы* для величин R и β : $R \in (3.40, 3.44)$, $\beta \in (1.790, 1.795)$; более точные аппроксимации для этих величин в [3]–[4] фактически не потребовались.

⁵Фактически авторы [3]–[4] пришли к следующему выводу: на границах кругов сходимости степенных рядов, соответствующих частоте и амплитуде, расположено в точности по паре комплексно-сопряженных особых точек, величины радиусов которых лежат в интервале (3.40, 3.44), а аргументы – в интервале (1.790, 1.795).

отношений” естественным образом интерпретируется и обобщается в рамках теории сходимости классических аппроксимаций Паде – *локально наилучших* рациональных аппроксимаций степенных рядов (подробнее см. § 2).

Обнаруженный численно в [3]–[4] эффект, состоящий в том, что нули и полюсы диагональных аппроксимаций Паде как для функции частоты, так и амплитуды накапливаются к некоторым вполне определенным точкам комплексной плоскости, послужил основой для дальнейшего построения в [3]–[4] аппроксимационных формул, пригодных для приближенного вычисления значений функций ν и A при физически интересных значениях параметра $\varepsilon > 0$. А именно, опираясь на сделанные ранее выводы авторы [3]–[4] провели преоб-

разования вида $w = w(\varepsilon^2)$, $w(\varepsilon^2) = \frac{\varepsilon^2}{\sqrt{\varepsilon^4 - 2\varepsilon^2 R \cos \beta + R^2}}$, исходных степенных рядов и получили приближенные, но достаточно точные явные формулы для вычисления функций ν и A при практически интересных значениях $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Отметим, что для построения этих формул авторам [3]–[4] достаточно было знать расположение особых точек “не очень точно”: последующие преобразования указанного вида “уводили” эти особые точки в окрестность бесконечно удаленной точки $w = \infty$. Тем самым найденные приближенные значения $z_{1,2} \approx 3.42e^{1.7925i}$ оказались вполне достаточными для достижения целей, поставленных в [3]–[4]. Полученные в [3]–[4] численные результаты оказались хорошо согласованы с известными результатами, полученными ранее другими авторами традиционными методами: методом Рунге–Кутты и др. (подробнее см. [3]–[4]).

1.4. Цель настоящей работы – изучить доступными численными методами некоторые свойства *аналитического продолжения* функций частоты и амплитуды, в том числе – уточнить расположение их ближайших особых точек (на границе круга сходимости) и характер⁶ соответствующих им особенностей (см. ниже (1)–(3) и п. ??). *Основные данные* для проводимого в настоящей работе численного анализа – это найденные⁷ автором численно 221 тейлоровский коэффициент функций частоты ν и амплитуды A (см. таблицы 1 и 2). *Основные эмпирические выводы* настоящей работы, сделанные на основе такого анализа, сформулированы в конце этого пункта.

Как известно, сходящийся степенной ряд однозначно определяет полную в смысле Вейерштрасса аналитическую функцию, в том числе – область ее существования и особые точки. Значит, вся нужная информация о свойствах аналитического продолжения неизбежно присутствует в (бесконечной) совокупности коэффициентов заданного степенного ряда. В основе численного исследования интересующих нас вопросов лежит извлечение теми или иными доступными методами необходимой информации об интересующих нас характеристиках предельного цикла уравнения (1) – частоте ν и амплитуде A , содержащейся в их тейлоровских коэффициентах.

Наша дальнейшая задача – используя те или иные методы извлечь из этих коэффициентов информацию об аналитических свойствах функций ν и A .

⁶Напомним, что в [4; с. 895] в качестве наиболее вероятного характера особенностей было указано квадратичное ветвление типа $1/2$.

⁷Все необходимые автору настоящей работы вычисления были проделаны с точностью в 40 значащих цифр.

Так же как в [3]–[4] результаты настоящей работы основаны в первую очередь на Паде-анализе (т.е. численном анализе поведения нулей и полюсов аппроксимаций Паде достаточно высокого порядка): нами рассматриваются диагональные аппроксимации Паде⁸ $[n/n]$ для $n = 32, \dots, 36$ и строчные последовательности вида $[n/2]$ для $n = 31, \dots, 217$. Однако в отличие от [3]–[4] мы не ставим своей целью получить хорошие приближенные представления для функций ν и A , справедливые при $\varepsilon > 0$. Основная задача настоящей работы – уточнить местоположение и характер пары комплексно-сопряженных особенностей этих функций, ближайших к началу координат. Использование асимптотических свойств диагональных и строчных последовательностей аппроксимаций Паде лежит в основе методов исследования настоящей работы. При этом так же как и в [3]–[4] отличительная особенность проводимых нами численных исследований – достаточно высокий порядок используемых аппроксимаций Паде (до 36-го порядка – у диагональных аппроксимаций и до 217-го – у строчных аппроксимаций вида $[n/2]$). Однако численный анализ, проведенный нами на основе найденных тейлоровских коэффициентов, не исчерпывается аппроксимациями Паде. Полученные с помощью ДАП результаты служат основой для дальнейших исследований. Для уточнения полученных нами с помощью ДАП результатов о расположении особых точек частоты и амплитуды на границе круга сходимости, которые уже сами по себе *усиливают результаты* [3]–[4], мы используем классическую теорему Адамара о перемножении особенностей композиции двух степенных рядов, теорему Принсгейма об особой точке степенного ряда и непосредственный анализ “асимптотического” (в пределах найденных 221-го) поведения коэффициентов степенных рядов, а также асимптотического поведения полюсов аппроксимаций Паде вида $[n/2]$ (2-й строки соответствующей таблицы Паде) для функций частоты и амплитуды. Основные эмпирические выводы настоящей работы, сделанные на основе такого анализа, состоят в следующем.

(1) Для радиуса и аргумента ближайшей к началу координат (единственной) пары комплексно-сопряженных особых точек $Re^{\pm i\beta} = R_f e^{\pm i\beta_f}$, где $f = \nu, A$, справедливы следующие оценки: $R \approx 3.420$, $\beta \approx \varphi_1 + \varphi_2 \approx 1.79232$, где $\varphi_1 = 4\pi/7$, $\varphi_2 = -\pi/1092$.

(2) Характер особенностей функций частоты и амплитуды (т.е. “главная часть” каждой из этих функций в некотором существенно большем, чем $|z| < R$, круге) в точках $Re^{\pm i\beta}$ аналогичен функции

$$g(z) \left(e^{i\alpha} (z - Re^{i\beta})^\gamma + e^{-i\alpha} (z - Re^{-i\beta})^\gamma \right),$$

где $g(z)$ – голоморфная в круге радиуса $\rho \gg R$ функция, величина $\gamma \approx 1/2$, $\alpha = \alpha_\nu \approx \pi/4$ для частоты, $\alpha = \alpha_A \approx 3\pi/10$ для амплитуды.

При этом вполне возможно, что:

(3) R в точности равно 3.42, β в точности равно $\varphi_1 + \varphi_2 = 89\pi/156$, $\alpha_\nu = \pi/4$ для частоты, $\alpha_A = 3\pi/10$ для амплитуды.

(Уточняющие замечания по поводу функции g см. в § 4).

⁸В дальнейшем мы иногда будем использовать сокращение “ДАП”.

§ 2. Некоторые теоретические результаты

2.1. Прежде, чем переходить непосредственно к вычислительной части нашей работы, приведем определения и теоретические результаты, необходимые для дальнейшего анализа проделанных численных расчетов.

Пусть

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \quad (2)$$

– (формальный или сходящийся) степенной ряд, $R_0 = R_0(f) \geq 0$ – радиус его сходимости. Для произвольных фиксированных $n, m \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ аппроксимацией Паде $[n/m]_f$ типа (n, m) ряда f называется рациональная функция, равная отношению полиномов $P_{n,m}/Q_{n,m}$, где $\deg P_{n,m} \leq n$, $\deg Q_{n,m} \leq m$, $Q_{n,m} \neq 0$, и выполняется соотношение:

$$(Q_{n,m}f - P_{n,m})(z) = A_{n,m}z^{n+m+1} + \dots, \quad z \rightarrow 0 \quad (3)$$

(справа стоит ряд по возрастающим степеням z). Указанными условиями полиномы $P_{n,m}$ и $Q_{n,m}$ определяются не однозначно, но рациональная дробь $[n/m]_f = P_{n,m}/Q_{n,m}$ – единственна. Аппроксимация Паде $[n/m]_f$ обладает следующим *характеристическим свойством*: в классе $\mathcal{R}_{n,m}$ всех рациональных дробей вида $r = p/q$ степени не выше⁹ (n, m) рациональная функция $[n/m]_f$ доставляет максимально возможный порядок касания к степенному ряду (2) в точке $z = 0$, тем самым, аппроксимации Паде – это (локально) наилучшие рациональные аппроксимации степенного ряда. В “общем положении”, точнее если все определители Адамара

$$H_{n,m} = \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+m-1} \end{vmatrix} \quad (\text{полагаем } c_k = 0 \text{ при } k < 0), \quad (4)$$

составленные из коэффициентов c_k , отличны от нуля, соотношение (3) эквивалентно соотношению

$$f(z) - [n/m]_f(z) = A_{n,m}^* z^{n+m+1} + \dots, \quad \text{где } A_{n,m}^* \neq 0,$$

а для полиномов $Q_{n,m}$ имеет место следующая *явная формула*:

$$Q_{n,m}(z) = \begin{vmatrix} c_{n-m+1} & c_{n-m+2} & \dots & c_n & c_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n & c_{n+1} & \dots & c_{n+m-1} & c_{n+m} \\ z^m & z^{m-1} & \dots & z & 1 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Полином $P_{n,m}$ уже однозначно определяется по $Q_{n,m}$; тем самым, рациональная аппроксимация $[n/m]_f$ *вычисляется непосредственно по коэффициентам* c_0, c_1, \dots, c_{n+m} ряда f .

Совокупность $\{[n/m]_f, n, m = 0, 1, 2, \dots\}$ всех аппроксимаций Паде ряда f называется *таблицей Паде* этого ряда. Последовательность $\{[n/m]_f, n = 0, 1, \dots\}$,

⁹То есть $\deg p \leq n$, $\deg q \leq m$.

где $m \in \mathbb{N}_0$ – фиксированно, называется m -й строкой таблицы Паде ряда f ; тем самым, нулевая строка таблицы состоит из частичных сумм ряда (2). Последовательность $\{[n/n]_f, n = 0, 1, \dots\}$ называется *главной диагональной* последовательностью или главной диагональю таблицы Паде. Подробнее см. монографию [5].

Подчеркнем, что в наших исследованиях нам понадобятся как диагональные аппроксимации Паде $\{[n/n]_f, n = 0, 1, \dots\}$, так и строчные последовательности вида $\{[n/2]_f, n = 0, 1, \dots\}$, т.е. 2-я строка таблицы Паде, для $f = \nu, A$.

Приведем теперь некоторые результаты из теории сходимости аппроксимаций Паде, на которые мы будем опираться при численном анализе найденных 221 тейлоровских коэффициентов для $f = \nu, A$ и извлечения из них тех или свойств аналитического продолжения ряда f .

Для произвольного $m \in \mathbb{N}$ через $R_m = R_m(f)$ обозначим радиус максимального круга с центром в точке $z = 0$, в который ряд f продолжается¹⁰ как мероморфная функция, имеющая $\leq m$ полюсов¹¹; очевидно, $R_m \geq R_0$. Пусть $D_m = D_m(f) : |z| < R_m$ – m -й круг мероморфности f .

Вопрос об эффективном восстановлении функции f в круге D_m по степенному ряду (2) при условии, что число полюсов f в D_m в точности равно m решается классической теоремой Монтеcssу де Болора [6] (см. также [5], [7]).

ТЕОРЕМА МОНТЕССУ ДЕ БОЛОРА. Пусть функция f имеет ровно m полюсов в круге $D_m : |z| < R_m$. Тогда:

1°. При для всех достаточно больших n аппроксимации Паде $[n/m]_f$ ряда f имеют равно m конечных полюсов, которые при $n \rightarrow \infty$ стремятся к полюсам функции f в D_m , причем, каждый полюс f “притягивает” столько полюсов $[n/m]_f$ какова его кратность.

2°. Последовательность $\{[n/m]_f, n = 0, 1, \dots\}$ сходится к функции f равномерно внутри (т.е. на компактных подмножествах) области D'_m , которая получается из D_m удалением полюсов функции f .

При этом в условиях теоремы скорость сходимости последовательности $[n/m]_f$ к функции f характеризуется неравенством:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f(z) - [n/m]_f(z)|^{1/n} \leq \frac{|z|}{R_m} < 1, \quad z \in D'_m.$$

При доказательстве своего результата Монтеcssу де Болор в существенной степени опирался на полученные ранее Адамаром [8] непосредственно в терминах коэффициентов ряда (2) формулы для радиусов R_m кругов D_m . Точнее, пусть $H_{n,m}$ – определитель Адамара (4). Тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА АДАМАРА. Для произвольного $m \in \mathbb{N}_0$

$$R_m = \frac{\ell_m}{\ell_{m+1}}, \quad \text{где } \ell_j = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |H_{n,j}|^{1/n}$$

($\ell_0 = 1$; если $\ell_1, \dots, \ell_m \neq 0$, $\ell_{m+1} = 0$, то $R_m = \infty$).

¹⁰Продолженную функцию мы также будем обозначать через f .

¹¹Как обычно, полюсы и нули функции считаются с учетом их кратностей.

Хорошо известная формула Коши–Адамара для радиуса сходимости степенного ряда – частный случай этого результата Адамара.

Из теоремы Монтессу де Болора уже легко следует, что конечные полюсы рациональных функций $[n/m]_f$ стремятся к полюсам f со скоростью геометрической прогрессии. На самом деле это свойство полюсов функций $[n/m]_f$ является *характеристическим*. Это вытекает непосредственно из *полного описания* m -мероморфного продолжения степенного ряда f с помощью m -й строки таблицы Паде при *произвольном* $m \in \mathbb{N}$, полученного А. А. Гончаром в [11].

В терминах, связанных с асимптотическим поведением конечных полюсов m -й строки таблицы Паде в [11] для *произвольного* $m \in \mathbb{N}$ получены формулы для вычисления радиуса m -го круга мероморфности и дивизора полюсов продолженной функции f внутри этого круга, а также доказана общая теорема о сходимости m -й строки таблицы Паде по (логарифмической) *емкости* (об этом понятии см. [12]) внутри $D_m(f)$; результат Монтессу вытекает из нее как частный случай.

Зафиксируем произвольное натуральное число m и рассмотрим m -ю строку таблицы Паде ряда (2): $\{[n/m]_f, n = 0, 1, 2, \dots\}$.

Пусть $\mathcal{P}_n = \{p_1(n), \dots, p_{m_n}(n)\}$, $0 \leq m_n \leq m$, – множество конечных полюсов рациональной функции $[n/m]_f$. Введем следующие характеристики асимптотического поведения последовательности множеств \mathcal{P}_n , $n = 0, 1, \dots$, в окрестности произвольной точки $a \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$:

- 1) $\mu(a)$ – число точек множества \mathcal{P}_n , стремящихся к точке a со скоростью геометрической прогрессии при $n \rightarrow \infty$;
- 2) $\Delta(a) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^{m_n} |a; p_j(n)|^{1/n}$, где $|\cdot; \cdot|$ – расстояние между двумя точками в сферической метрике.

Очевидно, $\mu(a) \geq 1 \iff \Delta(a) < 1$. Положим $\mathcal{P} = \{a \in \mathbb{C}^* : \mu(a) \geq 1\}$.

В [11] в терминах характеристик μ и Δ полностью описано m -мероморфное продолжение ряда (2).

ТЕОРЕМА 1 (А. А. ГОНЧАР). Пусть f – ряд (2), $m \in \mathbb{N}$ и $a \neq 0$ – фиксированная точка комплексной плоскости. Следующие утверждения эквивалентны:

- 1°. $|a| < R_m$ и f имеет полюс в точке a ;
- 2°. $\Delta(a) < 1$ (или, что то же самое, $\mu(a) \geq 1$).

При этом (если выполнено какое-либо из условий 1° и 2°) кратность полюса f в точке a равна $\mu(a)$ и справедлива формула

$$R_m = \frac{|a|}{\Delta(a)}. \quad (6)$$

Тем самым, если $d_m = \{(a_1, \nu_1), \dots, (a_s, \nu_s)\}$ – дивизор полюсов функции f в круге D_m (a_1, \dots, a_s – полюсы f в D_m , ν_1, \dots, ν_s – их кратности, $|d_m| = \nu_1 + \dots + \nu_s$ – число полюсов f в D_m , $|d_m| \leq m$), то из теоремы 1 вытекает формула для вычисления дивизора полюсов функции f в круге D_m при любом $m \in \mathbb{N}$: дивизор $d_m = \{(a, \mu(a)) : a \in \mathcal{P}\}$. Утверждение классической теоремы Монтессу по существу состоит в том, что эта формула для вычисления дивизора функции f справедлива, в частности, при условии, что $|d_m| = m$.

Наконец, в условиях теоремы 1 справедливо следующее представление

$$f(z) = [n_0/m]_f(z) + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{A_{n,m} z^{n+m+1-\lambda_{n,m}}}{Q_{n,m}(z)Q_{n+1,m}(z)}, \quad z \in D_m, \quad (7)$$

где равенство понимается в смысле сходимости по емкости на компактах в D_m , величина $0 \leq \lambda_{n,m} \leq m$; при условии, что знаменатели $Q_{n,m}$ сферически нормированы (см. [11]) имеет место формула

$$\frac{1}{R_m} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |A_{n,m}|^{1/n}.$$

Равенство (7) раскрывает сущность метода аппроксимаций Паде – это *нелинейный метод суммирования степенного ряда за пределами его круга сходимости* (см. также (14)).

Как было замечено в [13], в предположении, что к точке a стремится по-крайней мере один полюс $[n/m]_f$, формула (6) *остаётся справедливой и в случае, когда величина $\Delta(a) = 1$* , а именно, в этом случае $R_m = |a|$. Естественным образом возникает следующий вопрос: какие ещё выводы можно сделать о функции f в целом, если известно, что конечные полюсы m -й строки таблицы Паде стремятся к некоторым точкам в комплексной плоскости *без какого-либо априорного предположения о скорости этой сходимости*. Рассмотрим первую строку, т.е. случай $m = 1$. Если $c_n \cdot c_{n+1} \neq 0$, то единственный конечный полюс $p(n)$ рациональной функции $[n/1]_f$ вычисляется по формуле $p(n) = c_n/c_{n+1}$. Таким образом, соотношение $p(n) \rightarrow a \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ эквивалентно тому, что $c_n/c_{n+1} \rightarrow a$ при $n \rightarrow \infty$, и мы оказываемся в условиях классической теоремы Фабри “об отношении” [14] (см. также монографию [15]).

ТЕОРЕМА ФАБРИ ОБ ОТНОШЕНИИ. *Если для коэффициентов степенного ряда (2) имеет место соотношение*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = a,$$

то $z = a$ – особая точка суммы $f(z)$ этого ряда на границе его круга сходимости $|z| < R_0$, $R_0 = |a|$.

Тем самым, для $m = 1$ теорема Фабри фактически устанавливает связь между асимптотическим поведением конечного полюса 1-й строки таблицы Паде и особыми точками функции f на границе круга голоморфности $D_0(f)$.

Следующее утверждение обобщает теорему Фабри на случай *произвольной* строки таблицы Паде.

ТЕОРЕМА 2 см. [16]. *Пусть $m \in \mathbb{N}$ и для всех достаточно больших n рациональные функции $[n/m]_f$ имеют ровно m конечных полюсов $p_1(n), p_2(n), \dots, p_m(n)$, причем*

$$p_j(n) \rightarrow a_j \in \mathbb{C}^*, \quad n \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где

$$0 < |a_1| \leq \dots \leq |a_{\mu-1}| < |a_\mu| = \dots = |a_m| = R.$$

Тогда:

1°. $R_{\mu-1}(f) = \dots = R_{m-1}(f) = R$ и все точки $a_1, \dots, a_{\mu-1}$ и только они – полюсы функции f в круге $|z| < R$.

2°. Все точки a_μ, \dots, a_m – особые точки функции f на границе круга $|z| < R$.

Теорема 2 представляет собой результат *обратного* характера и обобщает теорему Фабри “об отношении” на случай m -й строки таблицы Паде.

В настоящей работе как теорема 1, так и теорема 2 понадобятся нам для случая $m = 2$.

2.2. Из сказанного выше вытекает, что строчные последовательности аппроксимаций Паде приспособлены прежде всего для описания мероморфных продолжений ряда (2) в соответствующие *круги* мероморфности. Присутствие на границе круга сходимости этого ряда хотя бы одной особенности иного характера, чем полюс (например, любой точки ветвления), приводит к тому, что *любая* строчная последовательность оказывается неэффективной при решении задачи аналитического продолжения *за пределы такого круга*. Иначе обстоит дело с *диагональными* последовательностями аппроксимаций Паде.

Для формулировки результатов о сходимости диагональных аппроксимаций Паде нам удобно временно в пределах этого пункта перейти к новой переменной $\zeta = 1/z$ и соответственно этому вместо ряда Тейлора f рассматривать ряд Лорана

$$F = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{\zeta^{k+1}}, \quad (8)$$

сходящийся в окрестности бесконечно удаленной точки $\zeta = \infty$, $F(\infty) = 0$. Диагональные аппроксимации инвариантны относительно такой замены переменной, а их связь с чебышёвскими непрерывными дробями [17] (см. также [18]) хорошо видна именно для рядов Лорана (8).

Если все ганкелевы определители, составленные из коэффициентов $\{c_k\}$, отличны от нуля, то с помощью классического алгоритма Евклида ряду F можно сопоставить *чебышёвскую непрерывную дробь*

$$\frac{a_0}{\zeta - b_1 - \frac{a_1}{\zeta - b_2 - \dots}}, \quad (9)$$

подходящие дроби P_n/Q_n которой обладают следующим характеристическим свойством:

$$\frac{P_n}{Q_n}(\zeta) = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{C_k}{\zeta^{k+1}} + \frac{A_n}{\zeta^{2n+1}} + \dots;$$

тем самым,

$$\left(F - \frac{P_n}{Q_n}\right)(\zeta) = O\left(\frac{1}{\zeta^{2n+1}}\right), \quad \zeta \rightarrow \infty.$$

Последнее соотношение единственным образом определяет рациональную функцию P_n/Q_n в классе всех рациональных дробей порядка не выше n . Эта дробь доставляет *наилучшее локальное приближение* ряда (8) в указанном классе рациональных функций. Такое свойство служит определением *диагональных аппроксимаций Паде* $[n/n]_f = P_n/Q_n$ для произвольного (формального или сходящегося) ряда (8).

П. Л. Чебышёв [17] впервые рассмотрел формальные разложения в непрерывные дроби (9) для функций вида

$$\widehat{\sigma}(\zeta) := \int_S \frac{d\sigma(x)}{\zeta - x}, \quad (10)$$

где σ – положительная борелевская мера с носителем $S = \text{Supp}(\sigma) \in \mathbb{R}$. Именно на этом пути Чебышёв открыл (см., например, [?; 1; гл. III, п. 3.5]) и исследовал общие ортогональные многочлены, соответствующие произвольной мере на \mathbb{R} ,

$$\int_S Q_n(x) x^k d\sigma(x) = 0, \quad k = 0, \dots, n-1,$$

– такие многочлены естественным образом возникают как знаменатели $Q_n(x) = Q_n(x; \widehat{\sigma})$ подходящих дробей функции $\widehat{\sigma}$ вида (10). При этом лорановские коэффициенты

$$C_k = \int x^k d\sigma(x), \quad k = 0, 1, \dots,$$

– моменты меры σ .

Одним из первых результатов общего характера о сходимости диагональных аппроксимаций Паде аналитических функций является классическая теорема Маркова [18], полученная им в терминах чебышёвских непрерывных дробей.

ТЕОРЕМА МАРКОВА. *Для функции $\widehat{\sigma}$ вида (10), где носитель $\text{Supp}(\sigma) \in \mathbb{R}$ и состоит из бесконечного множества точек, диагональные аппроксимации Паде $[n/n]_{\widehat{\sigma}}$, построенные непосредственно по коэффициентам разложения $\widehat{\sigma}$ в ряд Лорана в точке $\zeta = \infty$, сходятся к $\widehat{\sigma}$ равномерно внутри области $\overline{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$, где $[a, b]$ – минимальный отрезок вещественной прямой, содержащий $\text{Supp}(\sigma)$.*

Тем самым, любая *марковская функция* (т.е. функция вида (10) с $\text{Supp}(\sigma) \in \mathbb{R}$) может быть эффективно восстановлена вне выпуклой оболочки $[a, b]$ носителя меры σ по коэффициентам своего лорановского разложения в точке $\zeta = \infty$ (моментам меры σ).

Отметим, что установленное в теореме Маркова свойство сходимости диагональных аппроксимаций Паде относится и к следующим элементарным функциям

$$\widehat{\sigma}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}} \quad \text{и} \quad \widehat{\sigma}(\zeta) = \log \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1},$$

где в первом случае $d\sigma(x) = dx/(\pi\sqrt{1-x^2})$, а во втором $d\sigma(x) = dx$ – положительные меры с $\text{Supp}(\sigma) = [-1, 1]$; знаменатели соответствующих рациональных функций $[n/n]_{\widehat{\sigma}}$ – это полиномы Чебышёва (первого рода) и полиномы Лежандра. В обоих случаях $\widehat{\sigma}(\zeta)$ – голоморфная функция в области

$\overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$, ряд Лорана которой сходится лишь во внешности единичного круга $\{\zeta \in \overline{\mathbb{C}} : |\zeta| > 1\}$.

К теореме Маркова непосредственно примыкают результаты А. А. Гончара [20] и Е. А. Рахманова [21] о сходимости диагональных аппроксимаций Паде для мероморфных функций F марковского типа:

$$F = \hat{\sigma} + r, \quad (11)$$

где $\hat{\sigma}$ – марковская функция, r – произвольная комплексная рациональная функция ($r \in \mathbb{C}(\zeta)$), голоморфная на $[a, b]$ ($r \in \mathcal{H}[a, b]$), F – “рациональное возмущение” $\hat{\sigma}$. Конструкция аппроксимаций Паде существенно нелинейна, поэтому исследование сходимости таких рациональных приближений для функций вида (11) – нетривиальная задача. В [20] получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 3 (А. А. ГОНЧАР). Пусть σ – положительная борелевская мера с бесконечным носителем $\text{Supp}(\sigma) = [a, b]$, $\sigma' > 0$ н.в. на $[a, b]$ и $F = \hat{\sigma} + r$, где $r \in \mathbb{C}(\zeta)$ – произвольная рациональная функция, все полюсы которой принадлежат области $\mathbb{C} \setminus [a, b]$, и $r(\infty) = 0$. Тогда последовательность диагональных аппроксимаций Паде $\{[n/n]_F, n = 0, 1, \dots\}$ сходится к F равномерно в сферической метрике внутри (на компактных подмножествах) области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$.

Утверждение теоремы 3 справедливо (см. [20]) и в классе функций, голоморфная составляющая F^* которых имеет вид

$$F^*(\zeta) = \int_a^b \frac{s(x) d\sigma(x)}{\zeta - x}, \quad (12)$$

где функция $s \in \mathbb{C}(x)$ и не имеет на $[a, b]$ ни нулей, ни полюсов. Рассмотрим класс функций $F \in \mathcal{H}(\infty)$ вида

$$F(\zeta) = r_1(\zeta) + \frac{r_2(\zeta)}{w}, \quad (13)$$

где $w^2 = (\zeta - a)(\zeta - b)$, $a \neq b$, $a, b \in \mathbb{C}$ – произвольны, $r_1, r_2 \in \mathbb{C}(\zeta)$; тем самым, F – алгебраическая функция. Если $r_2(\zeta) \neq 0, \infty$ на $[a, b]$, то голоморфная составляющая F^* функции F класса (13) имеет вид (12), где σ – чебышёвская мера отрезка $[a, b]$, а $s = -r_2/\pi$. При условии, что $r_1(\infty) = 0$ и все полюсы r_1 лежат в D , для функций такого вида справедлива теорема 3.

Тем самым, диагональные аппроксимации Паде в классе алгебраических функций вида (13) при определенных условиях эффективно решают задачу мероморфного продолжения в область $\overline{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$ функции, заданной своим разложением в ряд Лорана (8) в бесконечно удаленной точке: полюсы этих аппроксимаций локализуют отрезок $[a, b]$ (носитель меры σ) и особые точки (полюсы и их кратности) функции F в $\overline{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$, а сами аппроксимации осуществляют мероморфное продолжение ряда F в $\overline{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$.

Тот факт, что в теореме Маркова речь идет о равномерной сходимости не в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Supp}(\sigma)$ – области голоморфности функции $\hat{\sigma}$, а лишь вне выпуклой оболочки $[a, b]$ носителя меры, связан с существом дела: непосредственно из открытого Чебышёвым свойства ортогональности знаменателей диагональных аппроксимаций Паде функции вида (10) вытекает, что если носитель меры σ

состоит из нескольких непересекающихся отрезков, то в лакунах между этими отрезками могут располагаться полюсы рациональной функции $[n/n]_{\hat{\sigma}}$ – нули соответствующих ортогональных полиномов. Более того, “в общем положении” множество предельных точек полюсов рациональных функций $[n/n]_{\hat{\sigma}}$ совпадает с $[a, b]$, что делает принципиально невозможной равномерную сходимость $[n/n]_{\hat{\sigma}}$ внутри $\overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Supp}(\sigma)$ в классе всех марковских функций (10) (см. [22]).

Если же $F = \hat{\sigma} + r$, где $r \in \mathbb{C}(\zeta)$, а $\text{Supp}(\sigma)$ состоит в точности из *двух* отрезков, $\text{Supp}(\sigma) = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$, то, как показано в [21], справедливо следующее. Существует открытая аналитическая дуга γ , соединяющая эти отрезки Δ_1 и Δ_2 и лежащая в $\overline{\mathbb{C}} \setminus [a, b]$, такая, что равномерная сходимость аппроксимаций Паде $[n/n]_F$ к функции F (в сферической метрике) имеет место в $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\text{Supp}(\sigma) \sqcup \gamma)$. При этом, если число $\omega_1(\infty)$ – гармоническая мера первого отрезка относительно области $\overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Supp}(\sigma)$ в бесконечно удаленной точке – иррационально, то сходимость не имеет места ни в какой области, пересекающейся с γ ; в противном случае существует конечное множество точек $\mathcal{P} \subset \gamma$ такое, что равномерная сходимость имеет место в $\overline{\mathbb{C}} \setminus (\text{Supp}(\sigma) \cup \mathcal{P})$. Дуга γ полностью определяется “геометрией” задачи: она зависит только от $\text{Supp}(\sigma) = \Delta_1 \sqcup \Delta_2$ и расположения полюсов функции r и не зависит от меры σ и вычетов функции r в полюсах.

Особо отметим случай *эллиптической* функции $F \in \mathcal{H}(\infty)$ вида

$$F(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2,$$

где точки $e_1, \dots, e_4 \in \mathbb{C}$ попарно различны и выбрана та ветвь корня, старший член которой в окрестности бесконечно удаленной точки равен ζ^2 . Этот случай был исследован Дюма [23] в терминах (чебышёвских) непрерывных дробей. Он показал, что если некоторые числовые параметры, связанные только с взаимным расположением точек e_1, \dots, e_4 , рационально независимы, то *множество полюсов диагональных аппроксимаций Паде всюду плотно в $\overline{\mathbb{C}}$* , т.е. последовательность $[n/n]_F$ не может равномерно сходиться ни в какой подобласти \mathbb{C} .

Таким образом, если носитель S меры σ в (10) не является отрезком, то предельные точки полюсов диагональных аппроксимаций Паде могут составлять аналитические дуги в области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \text{Supp}(\sigma)$ и даже быть всюду плотными в $\overline{\mathbb{C}}$. Более точно, по некоторым *подпоследовательностям* полюсы аппроксимаций Паде могут сходиться к любой наперед заданной точке аналитической дуги или, соответственно, к произвольной точке $\overline{\mathbb{C}}$. Полюсы такого типа, не соответствующие особым точкам аппроксимируемой функции, принято называть *ложными полюсами* аппроксимаций Паде [5; гл. 2, § 2.2]. Принято считать, что именно их наличие и делает невозможной равномерную сходимость ДАП, а сами эти полюсы возникают по случайным причинам и никак не связаны с природой аппроксимируемой функции. Известно, что таким полюсам сопутствуют близкие нули ДАП. Поэтому говорят о парах “полюс-нуль”, называемых *дефектами* [5; гл. 2, § 2.3]. Асимптотически полюсы и нули в таких парах “взаимно сокращаются”, что вроде бы подтверждает случайный характер этого явления. Особенно мешает вызванное этим явлением отсутствие равномерной сходимости ДАП при использовании их в приложениях. Отметим, что в последнее время в асимптотическом поведении таких полюсов обнаружены определенные закономерности [21], [24]–[26].

Вопрос о сходимости ДАП для функций вида $F = \hat{\sigma} + r$ в случае, когда $r \in \mathbb{C}(\zeta)$ – рациональная функция с комплексными коэффициентами, а носитель S меры σ состоит из нескольких отрезков, расположенных на одной прямой, решен в работе Е. А. Рахманова [21]: $[n/n]_F$ сходится к F по емкости внутри области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$. При этом оказалось, что динамика ложных полюсов ДАП подчиняется некоторым уравнениям [21], [25]. Рассмотренная Рахмановым ситуация охватывает и случай гиперэллиптических функций, все точки ветвления которых расположены на одной прямой. В случае произвольной гиперэллиптической функции *сходимость последовательности* $\{[n/n]_F\}_{n \in \mathbb{N}}$ *к* F *по емкости* доказана Дж. Наттолом (см. [27]).

В настоящее время наиболее общий результат о сходимости (по емкости) диагональных аппроксимаций Паде – теорема Штала [28], из которой в частности следует, что *если ряд (8) определяет алгебраическую функцию, то последовательность* $\{[n/n]_F, n = 0, 1, \dots\}$ *сходится по емкости внутри области* $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$, *где* $S = S(F) \subseteq \mathbb{C}$ – так называемый *компакт минимальной емкости*, соответствующий выбранной рядом (8) ветви алгебраической функции: F продолжается из окрестности точки $\zeta = \infty$ в дополнение к S как мероморфная (т.е. однозначная аналитическая) функция, а из всех компактов, обладающих таким свойством, S имеет наименьшую емкость. Компакт минимальной емкости S состоит из конечно числа кусочно-аналитических дуг; тем самым в комплексной плоскости \mathbb{C} существует соответствующая ряду F *система разрез*ов, вне которой последовательность $\{[n/n]_F\}$ сходится к функции F (по емкости) со скоростью геометрической прогрессии. Последовательность полюсов рациональных дробей $[n/n]_F$ восстанавливает заранее неизвестный компакт минимальной емкости S : ассоциированная с этими полюсами дискретная мера сходится¹² к равновесной (робеновской) мере компакта S ; отсюда следует, что все полюсы $[n/n]_F$ за возможным исключением $o(n)$ из них “притягиваются” к компакт S . Именно эти полюсы рациональных дробей $[n/n]_F$ и восстанавливают компакт S (см. рис. 14–21). Кроме того, каждый полюс F в D притягивает по крайней мере столько полюсов $[n/n]_F$, какова его кратность.

Подведем итог. Наиболее естественной (в том числе, с учетом наличия ложных полюсов) сходимостью для аппроксимаций Паде – как для строчных, так и для диагональных последовательностей – в достаточно широких классах аналитических функций является сходимость по емкости. Первые общие результаты в этих терминах, справедливые в *классах* функций и естественным образом обобщающие как теорему Монтессу, так и теорему Маркова, были получены в работах [7], [11], [20], [21].

В случае, соответствующем “простейшей” алгебраической функции $F(\zeta) = 1/\sqrt{\zeta^2 - 1}$ с двумя точками ветвления $\zeta = \pm 1$ получаем классическую ситуацию: знаменатели Q_n диагональных аппроксимаций Паде $[n/n]_F$ – полиномы Чебышёва (первого рода), ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $1/\sqrt{1-x^2}$. Тем самым, в этом частном случае *все полюсы* рациональных дробей $[n/n]_F$ – нули полиномов Q_n – *лежат* на отрезке $S = [-1, 1]$, а соответствующая им единичная мера сходится к равновесной мере этого отрезка $\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Сами

¹²Здесь сходимость понимается в смысле слабой сходимости в пространстве мер.

диагональные аппроксимации Паде $\{[n/n]_F, n = 0, 1, \dots\}$ равномерно сходятся к функции F внутри области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1]$. Но уже в случае эллиптической функции – алгебраической функции с четырьмя точками ветвления – ситуация принципиальной меняется: по теореме Шталя последовательность $\{[n/n]_F, n = 0, 1, \dots\}$ сходится к F по емкости внутри D , а равномерной сходимости внутри D нет.

Итак, в классе алгебраических функций, заданных своими разложениями вида (8), диагональные аппроксимации Паде решают *задачу эффективного аналитического продолжения* в следующем смысле: их полюсы “локализуют” компакт минимальной емкости S , а сами аппроксимации “восстанавливают” алгебраическую функцию в области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S$. Более точно, справедливо представление:

$$F(\zeta) = [n_0/n_0]_F(\zeta) + \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{A_n}{Q_n(\zeta)Q_{n+1}(\zeta)}, \quad \zeta \in D = \overline{\mathbb{C}} \setminus S, \quad (14)$$

где равенство понимается в смысле сходимости по емкости на компактах в D (см. [28], а также [9], [10]).

Таким образом, обнаруживаемое при численном анализе характерное накопление нулей и полюсов диагональных аппроксимаций Паде к некоторым точкам комплексной плоскости (см. рис. 14–21), с учетом приведенных теоретических результатов, вполне естественно трактовать как прямое указание на эти точки как на особые точки аппроксимируемой функции.

Некоторые примеры вычисления нулей и полюсов диагональных аппроксимаций Паде для заданных рядом Лорана (8) алгебраических функций, иллюстрирующие приведенные теоретические результаты, представлены с необходимыми пояснениями на рисунках 14–21 как в плоскости переменного z (для разложений в точке $z = 0$), так и в плоскости переменного $\zeta = 1/z$ (для разложений в точке $\zeta = \infty$; именно в этом случае возникающие в комплексной плоскости разрезы образуют компакт минимальной емкости).

2.3. Представленные на рисунках 14–21 результаты вычислений с одной стороны являются иллюстрацией к результатам *прямого* характера – теоремам Дюма и Шталя об асимптотическом поведении диагональных аппроксимаций Паде для эллиптических и, более общо, алгебраических функций. Однако на самом деле как теорема Дюма, так и теорема Шталя оказываются справедливыми и для более широких “естественных” классов функций (см., соответственно, [29] и [28]). Тем самым, предполагая заранее, что функция $f = \nu, A$ принадлежит такому “естественному” классу и анализируя “асимптотическое” (в пределах найденных численно 221-го тейлоровского коэффициента) поведение нулей и полюсов ДАП для соответствующих степенных рядов мы сможем сделать определенные выводы о расположении и характере особых точек функции f , $f = \nu, A$. Прояснив таким способом качественную картину расположения особых точек функции f и, в частности, обнаружив, что на границе круга голоморфности f лежит в точности пара комплексно-сопряженных особых точек, мы затем будем уточнять эту картину (т.е. расположение и характер этих особых точек) с помощью обобщенного варианта теоремы Фабри об отношении,

классической теоремы Адамара о перемножении особенностей (адамаровской) композиции степенных рядов, теоремы Принсгейма об особой точке степенного ряда, а также непосредственного анализа поведения тейлоровских коэффициентов ряда f .

Приведем два нужных нам классических результата, относящихся к теории аналитического продолжения степенных рядов – теорему Адамара о перемножении особенностей композиции двух степенных рядов и теорему Принсгейма об особой точке степенного ряда.

Пусть¹³ $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$ и $g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n z^n$ – два сходящихся степенных ряда с центром в точке $z = 0$. Композицией Адамара $h = f \circ g$ этих двух рядов называется ряд

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} f_n g_n z^n. \quad (15)$$

Очевидно, $R(h) \geq R(f)R(g)$. Справедлива следующая теорема Адамара [15; § 1, п. 1.4, теорема 1.4.1, с. 37].

ТЕОРЕМА АДАМАРА О ПЕРЕМНОЖЕНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ.¹⁴ Пусть радиусы сходимости степенных рядов f и g положительны и конечны, каждая из функций f и g на границе своего круга сходимости имеет конечное число особых точек: $\Sigma_f = \{\alpha_j, j = 1, \dots, m\}$ и $\Sigma_g = \{\beta_k, k = 1, \dots, \ell\}$ соответственно. Если $R(h) = R(f)R(g)$, то множество особых точек Σ_h ряда (15) на границе его круга сходимости конечно и

$$\Sigma_h \subset \Sigma_f \circ \Sigma_g := \{\alpha_j \beta_k, j = 1, \dots, m, k = 1, \dots, \ell\}. \quad (16)$$

Тем самым, особые точки функции $h = f \circ g$ на границе ее круга голоморфности лежат среди всевозможных произведений особых точек функций f и g , расположенных на границе их кругов голоморфности.

Нам понадобится также следующий результат (см. [15; § 1, теорема 1.8.1]).

ТЕОРЕМА ПРИНСГЕЙМ. Если для степенного ряда

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_n|^{1/n} = 1,$$

все коэффициенты $f_n \geq 0$ при $n \geq n_0$, то $z = 1$ – особая точка суммы этого ряда $f(z)$, $|z| < 1$.

§ 3. Основные численные результаты

3.1. Как уже отмечалось в 1.4 принципиальная возможность численного анализа свойств аналитических функций ν и A на основе их тейлоровских коэффициентов связана с тем, что в силу “теоремы единственности” для аналитической функции вся информация об ее “глобальных” свойствах содержится в

¹³В теории аналитического продолжения принято [15] для обозначения тейлоровских коэффициентов степенного ряда использовать ту же букву: $\{f_n\}$ для ряда f ; этой традиции мы будем следовать в пункте 2.3.

¹⁴Здесь приводится нужный нам частный вариант теоремы Адамара.

(бесконечной) совокупности ее тейлоровских коэффициентов: локально заданный росток аналитической функции однозначно определяет так называемую *полную* по Вейерштрассу *аналитическую функцию* (см. [30], [31]). Дело заключается “лишь” в том, чтобы найти подходящие методы для эффективного извлечения нужной информации из ограниченного числа фактически доступных коэффициентов. Подчеркнем, что в реальности эта информация может содержаться в далеких десятичных знаках численно найденных тейлоровских коэффициентов или вообще быть утрачена в процессе приближенных вычислений.

Опишем теперь коротко (см., например, [3]–[4]) стандартную схему построения формального решения уравнения Ван дер Поля (1) в виде ряда по степеням малого параметра ε с коэффициентами – тригонометрическими полиномами, зависящими от новой переменной $x = \nu(\varepsilon)t$.

Сделаем в (1) замену переменных: положим $x = \nu t$, где $\nu = \nu(\varepsilon) = 2\pi/T$ – частота предельного цикла, $T = T(\varepsilon)$ – его период. Положим $u(x; \varepsilon) = U(t; \varepsilon)$. Функция u периодична по x с периодом 2π , а уравнение (1) принимает вид:

$$\nu^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + \varepsilon \nu (u^2 - 1) \frac{du}{dx} + u = 0. \quad (17)$$

Представим теперь функции $u(x; \varepsilon)$ и $\nu(\varepsilon)$ в виде формальных рядов по ε :

$$u(x; \varepsilon) = \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x) \varepsilon^j = \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k}(x) \varepsilon^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} u_{2k+1}(x) \varepsilon^{2k+1}, \quad (18)$$

$$\nu(\varepsilon) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k \varepsilon^k, \quad (19)$$

затем подставим эти ряды в (17) и приравняем нулю получившиеся после произведенных действий коэффициенты при степенях ε . В результате получим рекуррентные соотношения для последовательного вычисления функций $u_k(x)$ и величин ν_k , часть из которых приводится ниже:

$$u_{2k}(x) = \sum_{j=0}^{2k} u_{2k,j} \cos((2j+1)x), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (20)$$

$$u_{2k+1}(x) = \sum_{j=0}^{2k+1} u_{2k+1,j} \sin((2j+1)x), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (21)$$

$$\sum_{j=0}^{2k+1} (2j+1) u_{2k+1,j} = 0, \quad k = 0, 1, \dots. \quad (22)$$

Отметим общее в структуре этих рекуррентных соотношений [4]: каждый k -й коэффициент, $u_{k,j}$, ν_k , в них *нелинейным* образом зависит от *всех* предыдущих коэффициентов. Таким образом, с каждым шагом сложность вычислений существенно возрастает.

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1) соответствует гармоническим колебаниям, поэтому имеем начальные условия: $\nu_0 = \nu(0) = 1$, $u(x; 0) = 2 \cos x$. Так как в силу (21)

$u_{2k+1}(0) = 0$, то функции частоты ν и амплитуды $A(\varepsilon) = u(0; \varepsilon)$ оказываются четными функциями параметра ε :

$$\nu(\varepsilon) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \nu_{2k} \varepsilon^{2k}, \quad A(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} \varepsilon^{2k}, \quad \text{где } a_{2k} = u_{2k}(0). \quad (23)$$

Таким образом, для того, чтобы найти 221 (ненулевой) тейлоровский коэффициент функций частоты ν и амплитуды A и затем построить аппроксимации Паде $[n/n]_f$, $n = 32, \dots, 36$, и $[n/2]_f$, $n = 31, \dots, 217$, для $f = \nu, A$, от переменной $z = \varepsilon^2$, необходимо было сначала вычислить 441 функцию $\{u_k(x)\}$, $k = 0, 1, \dots, 440$, – тейлоровский коэффициент функции $u(x; \varepsilon)$ как функции от ε . Подчеркнем, что эти 441 коэффициентов-функций $\{u_k(x)\}$ были построены в результате вычислений, проведенных в арифметике с плавающей точкой с точностью в 40 значащих цифр.

В [3]–[4] начальная часть вычислений была проделана с помощью программы символьных вычислений MACSYMA в рациональной арифметике. Несколько первых слагаемых рядов (21) и (23) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} u(x; \varepsilon) &= 2 \cos x + \left(\frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \right) \varepsilon + \\ &+ \left(-\frac{1}{8} \cos x + \frac{3}{16} \cos 3x - \frac{5}{96} \cos 5x \right) \varepsilon^2 + \\ &+ \left(-\frac{7}{256} \sin x + \frac{21}{256} \sin 3x - \frac{35}{576} \sin 5x + \frac{7}{576} \sin 7x \right) \varepsilon^3 + O(\varepsilon^4), \\ A(\varepsilon) &= 2 + \frac{1}{96} \varepsilon^2 - \frac{1033}{552960} \varepsilon^4 + \\ &+ \frac{1019689}{55738368000} \varepsilon^6 + \frac{9835512276689}{157315969843200000} \varepsilon^8 + O(\varepsilon^{10}), \\ \nu(\varepsilon) &= 1 - \frac{1}{16} \varepsilon^2 + \frac{17}{3072} \varepsilon^4 + \frac{35}{884736} \varepsilon^6 - \\ &- \frac{678899}{5096079360} \varepsilon^8 + \frac{28160413}{2293235712000} \varepsilon^{10} + O(\varepsilon^{12}). \end{aligned}$$

Основные же вычисления были проделаны в [3]–[4] также в арифметике с плавающей точкой. В частности, таким путем там были найдены 163 функции $u_k(x)$ и как следствие – по 82 ненулевых коэффициента функций частоты ν и амплитуды A . Все дальнейшие выводы были сделаны в [3]–[4] на основе Паде-анализа этих коэффициентов (использовались диагональные аппроксимации Паде вплоть до $[24/24]_f$ для $f = \nu, A$).

Автором настоящей работы с помощью программы, написанной на языке FORTRAN, были независимо от [3]–[4] вычислены в арифметике с плавающей точкой с 40 значащими цифрами функции-коэффициенты $u_0(x), \dots, u_{440}(x)$ из представления (18) и коэффициенты $\nu_0, \nu_2, \dots, \nu_{220}$ из представления (23). Найденные в результате этих вычислений коэффициенты частоты ν и амплитуды A (напомним, что $a_{2k} = u_{2k}(0)$) представлены в таблицах 1 и 2. Отметим еще раз, что эти численно найденные коэффициенты используются нами не только для построения ДАП,¹⁵ но также и для построения 2-й

строки таблицы Паде (т.е. последовательности вида $[n/2]_f$ для $f = \nu, A$) и привлечения для анализа некоторых других результатов из теории сходимости аппроксимаций Паде, а также результатов теории аналитического продолжения степенного ряда, включая классическую теорему Адамара о перемножении особенностей композиции степенных рядов, теорему Принсгейма об особой точке степенного ряда и непосредственного анализа “асимптотического” (в рамках вычисленных коэффициентов) поведения некоторых величин, зависящих от тейлоровских коэффициентов функций ν и A .

3.2. К настоящему времени накоплен богатый опыт успешного использования метода аппроксимаций Паде в самых различных задачах прикладной математики и механики. Обзор наиболее типичных примеров такого рода содержится в монографии [5]; см. также [32]–[35]. Отметим, что как правило применение метода аппроксимаций Паде ограничивается использованием диагональных аппроксимаций, причем – невысокого порядка и с целью построения так называемого “полуаналитического решения” конкретной задачи, не допускающей точного “аналитического”¹⁶ решения. Работы [3]–[4] – одни из немногих, где ДАП используются для локализации особых точек аналитической функции, изначально заданной разложением в степенной ряд, и построения с помощью нулей и полюсов ДАП “оптимальной” системы разрезов, соответствующей компакту минимальной емкости и превращающей эту функцию в мероморфную (т.е. однозначную аналитическую) функцию в дополнении к разрезам.

Перед тем как приступить непосредственно к анализу результатов проведенных нами вычислений, обсудим коротко следуя [5; часть I, гл. 2, § 2.3, с. 67] узловые моменты, связанные с использованием аппроксимаций Паде в численном анализе. Для правильной трактовки результатов вычислений необходимо заранее оценить “погрешность” этих вычислений. При использовании аппроксимаций Паде имеются три основных источника ошибок:

- (I) коэффициенты c_k степенного ряда известны лишь приближенно;
- (II) точность теряется при вычислении коэффициентов аппроксимаций Паде, их значений, а также полюсов и нулей;
- (III) сами аппроксимации представляют функцию лишь приближенно.

В связи с (I) отметим, что точность вычисления коэффициентов c_k очень существенна, поскольку информация об аналитической структуре исследуемой функции содержится как правило в *далеких* десятичных знаках коэффициентов. Поэтому, как хорошо известно, аппроксимации Паде очень сильно реагируют на их малые вариации. Во многих прикладных задачах, возникающих естественным образом как идеализированное математическое описание некоторого реального физического процесса, коэффициенты c_k вычисляются с помощью рекуррентных соотношений, устроенных по следующему принципу:

¹⁵В [3]–[4] Паде-анализ, проделанный на основе вычисленных там 82 (ненулевых) тейлоровских коэффициентов функций частоты ν и амплитуды A был использован для построения “полуаналитического” (т.е. приближенного формульного) представления функций частоты ν и амплитуды A на вещественной положительной полуоси, имеющего прикладной характер. В настоящей работе вопрос о таком представлении не затрагивается.

¹⁶Под “аналитическим” решением задачи здесь имеется в виду точное решение, найденное в явном формульном виде.

каждый коэффициент c_k зависит *нелинейным* образом от *всех* предыдущих коэффициентов c_0, c_1, \dots, c_{k-1} . Естественно, что в таком случае “стоимость” вычисления каждого следующего коэффициента существенно возрастает по сравнению со “стоимостью” предыдущего и сравнима с затратами по вычислению всех предыдущих коэффициентов вместе взятых.

Потеря точности типа (II) в практических вычислениях считается непростительной.

Как уже отмечалось выше, мы не ставим здесь своей целью получить приближенные представления для функций ν и A . Поэтому вопроса (III) о точности такого представления мы касаться не будем.

Общие рекомендации, связанные с точностью численных расчетов, основаны в первую очередь на практическом опыте и заключаются в следующем эмпирическом правиле (см. [5; часть I, гл. 2, § 2.3, с. 67]): *вычисление аппроксимаций Паде $[n/m]$ следует вести с m дополнительными десятичными знаками*. Тем самым, при использовании ДАП $[n/n]_f$, $f = \nu, A$, мы заведомо должны выбирать $n < 40$.

Наконец, в заключение этого пункта договоримся о следующем. В качестве основной функции для подробного анализа мы выбираем функцию частоты ν . Для функции амплитуды A все основные сделанные в работе выводы и найденные значения неизвестных параметров оказываются теми же самыми за исключением величины α (см. п. 1.4). Поэтому, таблицы, иллюстрирующие ход рассуждений и вычислений неизвестных параметров для функции амплитуды, здесь не приводятся.

3.3. Так как частота и амплитуда – четные функции параметра ε , то естественно ввести новую переменную $z = \varepsilon^2$. Функции ν и A будем рассматривать теперь в плоскости этого комплексного переменного z , а коэффициенты при степенях z вновь обозначим через ν_k и a_k соответственно:

$$\nu = \sum_{k=0}^{\infty} \nu_k z^k, \quad \nu_0 = 1, \quad (24)$$

и

$$A = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad a_0 = 2;$$

этих соглашений мы будем придерживаться всюду в дальнейшем.

В качестве первого шага в использовании коэффициентов частоты ν_k вычислим¹⁷ достаточно далекие ДАП для функции ν , а именно: $[32/32]_\nu, \dots, [36/36]_\nu$. Как следует из эмпирического правила (I) использование ДАП более высокого порядка заведомо нецелесообразно. Итоги вычисления нулей и полюсов¹⁸ этих ДАП представлены на рисунке 22 с необходимыми пояснениями.

¹⁷Для построения диагональных аппроксимаций Паде по коэффициентам степенного ряда (2) использовался стандартный QD-алгоритм (см. [5], где имеются дальнейшие ссылки).

¹⁸Для приближенного нахождения нулей числителя и знаменателя ДАП автор использовал эвристический итерационный метод, аналогичный методу Мюллера (см. [36]) и основанный на использовании трехточечной обобщенной аппроксимации Паде типа $[1/1]$.

После сравнения этого рисунка с модельными рисунками 14–21 напрашивается следующий *качественный* вывод:¹⁹

(i) пара комплексно-сопряженных точек $Re^{\pm i\beta}$, $\pi/2 < \beta < \pi$, в плоскости комплексного переменного z , к которым накапливаются нули и полюсы ДАП, ограничивает круг сходимости степенного ряда (24) для функции частоты²⁰ ν (тем самым, степенной ряд (24) для функции частоты имеет положительный радиус сходимости $R > 0$);

(ii) сами эти точки – особые точки функции ν на границе круга сходимости ряда (24);

(iii) других особых точек на окружности $|z| = R$ функция ν не имеет;

(iv) по своему характеру $Re^{\pm i\beta}$ – точки ветвления функции ν .

Прежде чем продолжить разговор договоримся о следующем. Как правило результаты вычислений мы будем оформлять в виде рисунков или таблиц. Все рисунки 1–23 и таблицы 1–18 размещены в конце работы. Однако иногда нам будет удобно привести фрагмент какой-либо таблицы непосредственно в тексте работы. В таком случае этот фрагмент нумеруется следующим образом: к номеру основной таблицы добавляется “штрих”.

Найдем при каждом $n = 1, \dots, 40$ нули $z_n = \rho_n e^{i\alpha_n}$ и полюсы $p_n = R_n e^{i\beta_n}$ ДАП $[n/n]_\nu$, расположенные в верхней полуплоскости и ближайшие к началу координат:²¹

Таблица 3'

n	ρ_n	α_n	ρ_n	β_n
31	3.4283194	1.7924123	3.4283546	1.7924263
32	3.4280471	1.7924132	3.4280804	1.7924265
33	3.4280436	1.7924084	3.4280771	1.7924216
34	3.4280437	1.7924104	3.4280771	1.7924237
35	3.4287592	1.7925295	3.4287941	1.7925454
36	3.4274488	1.7923442	3.4274800	1.7923556
37	3.4275936	1.7923759	3.4276250	1.7923879
38	3.4275936	1.7923759	3.4276250	1.7923879
39	3.4272316	1.7923304	3.4272618	1.7923413
40	3.4274442	1.7924210	3.4274733	1.7924329

Отсюда получаем приближенные значения для радиуса $R = R_\nu$ и аргумента $\beta = \beta_\nu$ соответствующей особой точки $Re^{i\beta}$:

$$R \approx 3.43, \quad \beta \approx 1.7924. \quad (25)$$

Отметим, что уже непосредственно из результатов этих весьма предварительных вычислений (пока мы не использовали ничего принципиально нового по сравнению с [3]–[4]) вытекает, что величина β достаточно сильно отличается от величины $4\pi/7 \approx 1.7952$. Этот вывод получит впоследствии дополнительное подтверждение.

¹⁹Этот вывод фактически уже был сделан в [3]–[4].

²⁰В соответствии с ранее сделанной договоренностью с этого момента мы анализируем только аналитические свойства функции частоты ν .

²¹В соответствии с нашим соглашением, полностью результаты вычислений представлены в таблице 3, помещенной в конце статьи.

Как уже говорилось, из анализа расположения нулей и полюсов ДАП $[32/32]_\nu, \dots, [36/36]_\nu$ вытекает, что кроме точек $Re^{\pm i\beta}$ других особых точек на границе круга сходимости нет. Более того, сравнивая рис. 22 с рис. 14–21, можно сделать вывод: другие особые точки функции частоты расположены достаточно далеко от начала координат и от уже найденной пары особых точек. Тем самым, естественно предположить, что “главная” (доминирующая) часть функции ν , определяющая расположение и характер двух ближайших к началу координат особых точек этой функции, имеет вид:

$$\nu(z) \approx g(z) (z - Re^{i\beta})^\gamma (z - Re^{-i\beta})^\gamma$$

или

$$\nu(z) \approx g_1(z) (z - Re^{i\beta})^\gamma + g_2(z) (z - Re^{-i\beta})^\gamma.$$

Первый вариант легко отвергается следующими простыми рассуждениями. Зная тейлоровские коэффициенты функции ν вычислим коэффициенты функции ν'/ν – логарифмической производной функции частоты. В первом “мультипликативном” случае особенности $Re^{\pm i\beta}$ должны были бы превратиться в полюсы функции $f = \nu'/\nu$ первого порядка. Однако расчеты показывают, что поведение нулей и полюсов ДАП $[n/n]_f$, $n = 32, \dots, 36$ остается качественно тем же самым, что и для функции ν (см. рис. 23). Тем самым естественно остановиться на втором варианте.

Мы рассмотрим здесь этот вариант в следующем существенно упрощенном²² виде: главная часть функции частоты ν при $|z| < \rho$, где $\rho \gg R$, имеет вид:

$$\text{const} \left(e^{i\alpha} (z - Re^{i\beta})^\gamma + e^{-i\alpha} (z - Re^{-i\beta})^\gamma \right) + p(z),$$

где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \notin \mathbb{Z}$, $\text{const} \neq 0$, $p \in \mathbb{R}[z]$ – вещественный полином “малой” степени и с “малыми” коэффициентами; величина const и полином p не участвуют в дальнейшем численном определении величин α , β , γ и R (см. также п. 4.1 в конце работы).

Теперь мы можем наконец точно сформулировать *основную задачу*, решаемую численно в настоящей работе: в предположении, что

$$\nu(z) \approx \text{const} \left(e^{i\alpha} (z - Re^{i\beta})^\gamma + e^{-i\alpha} (z - Re^{-i\beta})^\gamma \right) + p(z), \quad \text{при } |z| < \rho, \quad (26)$$

где $\rho \gg R$, и используя найденные численно тейлоровские коэффициенты ν_k , $k = 0, 1, \dots, 220$, функции частоты ν (см. таблицу 1) мы хотим найти приближенные значения величин α , β , γ и R , а тем самым фактически подтвердить справедливость приближенного представления (26). Само приближенное представление (26) мы будем понимать в смысле *приближенного равенства коэффициентов*. Точнее, мы будем исходить из того, что тейлоровские коэффициенты левой части (26) найдены нами численно (это – ν_k), а правой – находятся по явным формулам в терминах неизвестных параметров α , β , γ и R , а также постоянной const и коэффициентов полинома p . Дальнейшие рассуждения во

²² Для численного анализа более сложного варианта найденных нами 221-го коэффициента оказывается недостаточно; см. также п. 4.1.

многом основаны на анализе величин, в которые входят *отношения* тейлоровских коэффициентов, и именно поэтому величина, которую мы обозначили const , не играет роли в наших дальнейших рассуждениях. Вместе с тем даже такое, весьма приближенное, представление (26) оказывается довольно естественным: в п. 3.7 в конце работы показано, что если постоянную const в (26) заменить на функцию, то ее вклад в отношение тейлоровских коэффициентов правой части (26) является “не очень существенным”. Однако при уже найденных величинах α , β , γ и R последующим выбором постоянной const и полинома p коэффициенты правой части (26) не удается “состыковать” с заданными коэффициентами левой части (см. таблицы 16 и 17 и § 4).

3.4. Займемся сначала уточнением величины $\beta > 0$ – аргумента особой точки функции ν , расположенной в верхней полуплоскости (см. рис. 22). Как уже говорилось, в [3; с. 685] на основе численного анализа было замечено, что величина β близка к $4\pi/7$. Первое наше наблюдение состоит в том, что имеется определенная закономерность в чередовании знаков “+” и “–” в последовательности (ненулевых) тейлоровских коэффициентов функции частоты (см. таблицу 4). А именно, с 5-го по 32-й они чередуются по правилу “+ + – – + + –” с периодом, равным 7. С 33-го по 193-й – по правилу “+ + – – + + –” и с таким же периодом 7. Начиная со 194-го коэффициента правило вновь меняется и теперь выглядит так: “– + – – + + –”, но период 7 по-прежнему сохраняется. Если бы начиная с некоторого номера правило чередования знаков у коэффициентов оставалось неизменным и сохранился бы тот же самый период 7, то для доказательства того, что величина β в точности равна $4\pi/7$ нам было бы достаточно применить теоремы Адамара и Принсгейма. Действительно, в предположении о сохранении периодичности в поведении знаков тейлоровских коэффициентов функции ν нужно было бы рассмотреть адамаровскую композицию функции ν и функции

$$g(z) = \frac{1 + z - z^2 - z^3 + z^4 + z^5 - z^6}{1 - z^7},$$

все тейлоровские коэффициенты g_k которой равны ± 1 , а знаки чередуются по правилу “+ + – – + + –” с периодом, равным 7. В таком случае при сделанном предположении о периодичности в изменении знаков у коэффициентов ν_k все достаточно далекие коэффициенты композиции Адамара $h = g \circ \nu$ были бы положительными. А тогда по теореме Принсгейма точка $z = R$ была бы особой точкой функции $h = g \circ \nu$. Но по теореме Адамара о перемножении особенностей для адамаровской композиции двух рядов все особые точки функции $g \circ \nu$ на границе круга голоморфности могут возникнуть только как результат перемножения особых точек функции ν на окружности $|z| = R$ и особых точек функции g на единичной окружности. Нетрудно видеть, что все особые точки рациональной функции g – это в точности нули знаменателя, т.е. точки $z_k = e^{i2\pi k/7}$, $k = 0, 1, \dots, 6$ ($z_k = \varepsilon_7^k$, где $\varepsilon_7 = e^{i2\pi/7}$, $k = 1, \dots, 7$) или, эквивалентно, точки 1 , $e^{\pm i2\pi/7}$, $e^{\pm i4\pi/7}$, $e^{\pm i6\pi/7}$. Таким образом, по крайней мере одна из точек R , $Re^{\mp i2\pi/7}$, $Re^{\mp i4\pi/7}$ должна была быть особой точкой функции частоты на границе ее круга голоморфности $|z| < R$. Учитывая теперь отмеченную ранее близость аргументов нулей и полюсов ДАП $[n/n]_\nu$ при

$n = 32, \dots, 36$ к величине $4\pi/7 \approx 1.7952$ (см. таблицу 3) можно было бы определенно утверждать, что особые точки ν на границе круга голоморфности это именно точки $Re^{\pm 4\pi i/7}$. Тем самым величина β была бы в точности равна $4\pi/7$. Однако как видно из таблицы 4 (см. строки 5, 33 и 194) закон чередования знаков $+$, $-$ меняется дважды на протяжении 220 коэффициентов. Тем самым, кажется неестественным предполагать, что начиная с некоторого номера фиксируется определенная закономерность в чередовании знаков $+$, $-$ в последовательности коэффициентов ν_k . Поэтому мы в дальнейшем будем исходить из того, что величина β все-таки отличается от $4\pi/7$. Однако проделанный выше анализ асимптотического²³ поведения нулей и полюсов ДАП для функции частоты и анализ чередования знаков ее тейлоровских коэффициентов наводит на мысль, что аргументы особых точек надо искать исходя из предположения, что $\beta = 4\pi/7 + \varphi_2$, где поправка $\varphi_2 \neq 0$, но достаточно мала по абсолютной величине по сравнению с $\varphi_1 = 4\pi/7$. Наша ближайшая цель – в предположении малости φ_2 проанализировать поведение вычисленных коэффициентов ν_k , $k = 0, \dots, 220$, что позволит нам заключить, что искомая поправка φ_2 очень близка к (а возможно, и равна) величине $-\pi/1092$.

3.5. Вернемся к представлению (26), которое запишем в виде

$$\nu(z) \approx \text{const} \cdot c(z) + p(z),$$

где

$$c(z) = e^{i\alpha}(z - Re^{i\beta})^\gamma + e^{-i\alpha}(z - Re^{-i\beta})^\gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \notin \mathbb{Z}. \quad (27)$$

Как уже говорилось, величина постоянной $\text{const} \neq 0$ и полином p (малой степени и с малыми коэффициентами) в наших дальнейших рассуждениях роли не играют, так как при анализе используются лишь отношения ν_{k+1}/ν_k вычисленных коэффициентов функции частоты, которые сравниваются с отношениями c_{k+1}/c_k достаточно далеких тейлоровских коэффициентов c_k функции (27). Для неизвестных коэффициентов c_k функции $c(z)$ из (27) получаем следующее представление:

$$c_k = (-1)^k \frac{\gamma(\gamma-1) \cdots (\gamma-k+1)}{k!} \frac{r}{R^k} \cos(k\beta + \alpha), \quad \text{где } r = \text{const} \neq 0, \quad (28)$$

а для известных коэффициентов ν_k полагаем: $\nu_k \approx \text{const} \cdot c_k$ при $k \geq k_0$. Используя представление (28) в предположении,²⁴ что величина $\cos(k\beta + \alpha)$ ограничена от нуля при всех k легко находим:

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} - \frac{c_{k+2}}{c_{k+1}} = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{\gamma+1}{k+1} \right) \frac{1 - \cos 2\beta}{2 \cos(k\beta + \alpha) \cos((k+1)\beta + \alpha)} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (29)$$

Это соотношение будет в дальнейшем использоваться нами для уточнения величины радиуса R . Отметим, что из представления (28) вытекает также, что

$$\frac{c_{k+2}}{c_k} = \left(1 - 2\frac{\gamma+1}{k+1} \right) R^{-2} \frac{\cos((k+2)\beta + \alpha)}{\cos(k\beta + \alpha)} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (30)$$

²³Как обычно, в пределах найденного 221-го тейлоровского коэффициента.

²⁴Обоснованность такого предположения мы обсудим ниже в п. 4.1

или

$$\frac{c_k}{c_{k+2}} = \left(1 + 2\frac{\gamma+1}{k+1}\right) R^2 \frac{\cos(k\beta + \alpha)}{\cos((k+2)\beta + \alpha)} + O\left(\frac{1}{k^2}\right). \quad (31)$$

Наконец, из представления (27) получаем (при том же предположении, что величина $\cos(k\beta + \alpha)$ отграничена от нуля при всех k) следующее соотношение:

$$\begin{aligned} b_k &:= \frac{c_{k+1}/c_k}{c_{k+2}/c_{k+1}} = \frac{c_{k+1}^2}{c_k c_{k+2}} = \frac{1 - (\gamma+1)/(k+1)}{1 - (\gamma+1)/(k+2)} \frac{\cos^2((k+1)\beta + \alpha)}{\cos(k\beta + \alpha) \cos((k+2)\beta + \alpha)} \\ &= \frac{1 - (\gamma+1)/(k+1)}{1 - (\gamma+1)/(k+2)} \left(1 + \frac{1 - \cos 2\beta}{\cos 2\beta + \cos(2(k+1)\beta + 2\alpha)}\right) \\ &= \frac{1 + \cos(2(k+1)\beta + 2\alpha)}{\cos 2\beta + \cos(2(k+1)\beta + 2\alpha)} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ &= \frac{1 + x_{k+1}}{\cos 2\beta + x_{k+1}} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \end{aligned}$$

где

$$x_k := \cos(2k\beta + 2\alpha).$$

Отсюда уже вытекает нужное нам соотношение:

$$x_k = \frac{1 - b_k \cos 2\beta}{b_k - 1} + O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad \text{где } b_k := \frac{c_{k+1}^2}{c_k c_{k+2}}. \quad (32)$$

Прделаем теперь следующее: подставим в формулу (32) для величин b_k вместо коэффициентов c_k найденные численно коэффициенты ν_k функции частоты (напомним, что $\nu_k \approx \text{const} \cdot c_k$, а $\beta \approx 4\pi/7$), найдем соответствующую величину x_k , а затем вычислим величину

$$\psi_k := \frac{1}{\pi} \arccos x_k \quad \text{при } k = 11, \dots, 217, \quad 0 \leq \psi_k \leq 1. \quad (33)$$

Расположим значения величины ψ_k в таблицу 5, состоящую из 7 столбцов, в каждом из которых индексы двух соседних элементов отличаются на 7. Нетрудно видеть, что в 1-ом, 2-ом, 3-ем и 7-ом столбцах элементы при изменении индекса меняются монотонно. В 4-ом и 6-ом столбцах имеется по одному максимальному элементу, очень близкому к 1, а в 5-ом столбце имеется один минимальный элемент, очень близкий к 0. Соответствующие элементы таблицы – это ψ_{39} , ψ_{117} и ψ_{195} , а разность между их индексами равна $78 = 195 - 117 = 117 - 39$.²⁵ Предположим, что такая закономерность носит не случайный характер, а вызвана как раз той поправкой $\varphi_2 \neq 0$ к $\varphi_1 = 4\pi/7$ в представлении $\beta \approx \varphi_1 + \varphi_2$, величину которой мы хотели бы найти. Значит, подобные максимумы и минимумы будут появляться с определенной периодичностью и в других столбцах таблицы (возможно, мы могли бы заметить это и непосредственно, если бы нам удалось вычислить достаточное количество коэффициентов ν_k). Отсюда уже легко вытекает следующее соотношение на поправку φ_2 : $2|\varphi_2| \cdot 7 \cdot 78 = \pi$, т.е.

$$|\varphi_2| = \frac{\pi}{1092}. \quad (34)$$

²⁵ Отметим, что то же самое число 78 как разница индексов возникает и для функции амплитуды A .

Отметим, что $2|\varphi_2| \cdot 7/\pi = 1/78 \approx 0.0128$, а этой величине с точностью до знака должно быть, если наша гипотеза справедлива, равно приращение элементов таблицы 5 по столбцам. Это хорошо согласуется с реальной ситуацией, представленной в таблице 6.

3.6. Следующий наш шаг – выяснить положительна или отрицательна величина φ_2 , т.е. $\varphi_2 = \pi/1092$ или $\varphi_2 = -\pi/1092$. Ответ на этот вопрос будет дан одновременно с нахождением величины α в “главной” части (26) функции частоты. Подчеркнем еще раз, что мы в своем численном анализе свойств функции ν исходим из того, что справедливо приближенное представление (26) с некоторыми $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \gamma \notin \mathbb{Z}, \text{const} \neq 0$. Тем самым, из двух вариантов выбора знака у поправки φ_2 мы предпочтем тот, который приведет и к вполне определенной величине α , соответствующей приближенному представлению (26). Иной вариант, не позволяющий остановиться на каком-то определенном значении α , нами будет отвергнут.

Для реализации этого подхода обратимся опять к таблице 5. Так как мы считаем теперь, что $\beta \approx \varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_1 = 4\pi/7$, а $|\varphi_2| = \pi/1092$, то тем самым подразумеваем, что поправка φ_2 относительно мала. Напомним, что в таблице 5 величины $\psi_k := \arccos x_k/\pi$, где $x_k = \cos(2k\beta + 2\alpha)$, расположены в виде таблицы, состоящей из 7 столбцов, в которых индексы двух соседних по строкам элементов отличаются на 7. Пусть теперь индекс $k = 0 \pmod{7}$. Для таких k величина $x_k = \cos(2k\varphi_2 + 2\alpha)$ и соответствующая величина $\psi_k = \arccos x_k/\pi$ расположена в 7-м столбце. Как видим, при возрастании k эта величина ψ_k монотонно убывает. Отсюда, с учетом того, что поправка φ_2 мала, легко делаем следующий вывод: $\varphi_2 < 0$, если $2\alpha \in (0, \pi)$, и $\varphi_2 > 0$, если $2\alpha \in (-\pi, 0)$. Следовательно,

$$\psi_k = \frac{1}{\pi} \begin{cases} 2k\varphi_2 + 2\alpha & \text{при } \alpha > 0, \\ -2k\varphi_2 - 2\alpha & \text{при } \alpha < 0. \end{cases}$$

Отсюда уже получаем, что при $k = 0 \pmod{7}$

$$\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2}\psi_k - k\varphi_2 > 0 & \text{при } \varphi_2 < 0, \\ -\frac{\pi}{2}\psi_k - k\varphi_2 < 0 & \text{при } \varphi_2 > 0. \end{cases} \quad (35)$$

Вычислим для таких $k = 7, 14, 21, \dots$ величину $\alpha = \alpha_k$ по формуле (35) в обоих возможных случаях $\varphi_2 < 0$ и $\varphi_2 > 0$ и поступим дальше следующим образом. Если в каком-то из этих случаев при всех таких k величины α_k примерно одинаковы, то мы будем исследовать этот случай и дальше при остальных $k \neq 0 \pmod{7}$. Если же окажется, что величины α_k сильно отличаются друг от друга, то дальше рассматривать этот случай нет смысла. Результаты такого анализа приводят к выводу, что возможен лишь случай с $\varphi_2 < 0$ и $2\alpha \in (0, \pi)$, при этом $\alpha/\pi = \psi_k/2 - k\varphi_2/\pi$ и, следовательно, $\alpha/\pi \approx 0.25$ при всех $k = 0 \pmod{7}$.

Для этого случая, $\varphi_2 = -\pi/1092 < 0$ и $2\alpha \in (0, \pi)$, рассмотрим теперь величину ψ_n при остальных значениях $n \neq k, k = 0 \pmod{7}$. С учетом того, что поправка $\varphi_2 < 0$ и мала, приведем представление для $x_n = \cos(2n\beta + 2\alpha)$

при остальных значениях индекса $n \neq 0 \pmod{7}$ и $k = 0 \pmod{7}$ к виду:

$$\begin{aligned}
 x_{k+1} &= \cos\left(\frac{8\pi}{7} + 2(k+1)\varphi_2 + 2\alpha\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{7} - 2(k+1)\varphi_2 - 2\alpha\right), \\
 x_{k+2} &= \cos\left(\frac{16\pi}{7} + 2(k+1)\varphi_2 + 2\alpha\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{7} + 2(k+2)\varphi_2 + 2\alpha\right), \\
 x_{k+3} &= \cos\left(\frac{24\pi}{7} + 2(k+3)\varphi_2 + 2\alpha\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{7} - 2(k+3)\varphi_2 - 2\alpha\right), \\
 x_{k+4} &= \cos\left(\frac{32\pi}{7} + 2(k+4)\varphi_2 + 2\alpha\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{7} + 2(k+4)\varphi_2 + 2\alpha\right), \\
 x_{k+5} &= \cos\left(\frac{40\pi}{7} + 2(k+5)\varphi_2 + 2\alpha\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{7} - 2(k+5)\varphi_2 - 2\alpha\right), \\
 x_{k+6} &= \cos\left(\frac{48\pi}{7} + 2(k+6)\varphi_2 + 2\alpha\right) = \cos\left(\frac{6\pi}{7} + 2(k+6)\varphi_2 + 2\alpha\right);
 \end{aligned} \tag{36}$$

здесь $k = 0 \pmod{7}$.

Учитывая, что $2\alpha \in (0, \pi)$ и принимая во внимание динамику изменения величин элементов в каждом из 6-ти других столбцов таблицы 6 выводим для каждого из этих столбцов *свою* формулу для вычисления величины α (как и прежде $k = 0 \pmod{7}$):

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha}{\pi} &= -\frac{1}{2}\psi_{k+1} + \frac{3}{7} - (k+1)\frac{\varphi_2}{\pi}, \\
 \frac{\alpha}{\pi} &= \frac{1}{2}\psi_{k+2} - \frac{1}{7} - (k+2)\frac{\varphi_2}{\pi}, \\
 \frac{\alpha}{\pi} &= -\frac{1}{2}\psi_{k+3} + \frac{2}{7} - (k+3)\frac{\varphi_2}{\pi}, \\
 \frac{\alpha}{\pi} &= \begin{cases} -\frac{1}{2}\psi_{k+4} + \frac{5}{7} - (k+4)\frac{\varphi_2}{\pi} & \text{при } k+4 < 39, \\ \frac{1}{2}\psi_{k+4} - \frac{2}{7} - (k+4)\frac{\varphi_2}{\pi} & \text{при } k+4 \geq 39, \end{cases} \\
 \frac{\alpha}{\pi} &= \begin{cases} \frac{1}{2}\psi_{k+5} + \frac{1}{7} - (k+5)\frac{\varphi_2}{\pi} & \text{при } k+5 < 117, \\ -\frac{1}{2}\psi_{k+5} + \frac{1}{7} - (k+5)\frac{\varphi_2}{\pi} & \text{при } k+5 \geq 117, \end{cases} \\
 \frac{\alpha}{\pi} &= \begin{cases} -\frac{1}{2}\psi_{k+6} + \frac{4}{7} - (k+6)\frac{\varphi_2}{\pi} & \text{при } k+6 < 195, \\ \frac{1}{2}\psi_{k+6} - \frac{3}{7} - (k+6)\frac{\varphi_2}{\pi} & \text{при } k+6 \geq 195. \end{cases}
 \end{aligned} \tag{37}$$

Соответствующие этим приближенным²⁶ формулам значения величины α/π представлены в таблице 7. На основании анализа данных этой таблицы естественно заключить, что $\alpha = 0.25\pi = \pi/4$.

²⁶Напомним, что использованные для вычислений приближенные соотношения (29)–(30) и (37) справедливы с точностью до $O(1/k^2)$

Таблица 7'

n	α_n	α_{n+1}	α_{n+2}	α_{n+3}	α_{n+4}	α_{n+5}	α_{n+6}	$n + 6$
106	.2502	.2502	.2502	.2502	.2502	.2502	.2502	112
113	.2502	.2502	.2502	.2502	.2500	.2502	.2502	119
120	.2501	.2502	.2501	.2501	.2501	.2501	.2501	126
127	.2501	.2501	.2501	.2501	.2501	.2501	.2501	133
134	.2501	.2501	.2501	.2501	.2501	.2501	.2501	140
141	.2501	.2501	.2500	.2500	.2500	.2500	.2500	147
148	.2500	.2500	.2500	.2500	.2500	.2500	.2500	154
155	.2500	.2500	.2500	.2500	.2499	.2500	.2500	161

Еще раз отметим, что соответствующие предположению: $\varphi_2 > 0$, $2\alpha \in (-\pi, 0)$, вычисления не приводят к какому-либо конкретному значению α и поэтому нами отвергаются.

Итак, анализ поведения величин ψ_k , определенных формулой (33) через тейлоровские коэффициенты ν_k функции частоты, привел нас к выводу, что в представлении (26) поправка $\varphi_2 = -\pi/1092$, а $\alpha = \pi/4$. В таблице 8 представлены значения $\cos(2k\beta + 2\alpha)$, вычисленные для $k = 1, \dots, 217$ при $\beta = \varphi_1 + \varphi_2 = 89\pi/156$ и $\alpha = \pi/4$, а в таблице 9 – разность между соответствующими значениями в таблицах 5 и 8.

3.7. Дальнейший анализ основан на теореме 1 и теореме 2, обобщающей теорему Фабри “об отношении”²⁷ на случай произвольной m -й строки таблицы Паде. Наша цель – использовать эти результаты при $m = 2$ (т.е. для случая 2-й строки таблицы Паде функции ν) для уточнения расположения пары особых точек функции ν на границе ее круга голоморфности.

Для построения знаменателя $Q_{n,2}(z)$ рациональной функции $[n/2]_\nu$ воспользуемся явной формулой (5) (справедливой в предположении, что соответствующий определитель (4) отличен от нуля). При $m = 2$ непосредственно из (5) получаем

$$Q_{n,2}(z) = \begin{vmatrix} \nu_{n-1} & \nu_n & \nu_{n+1} \\ \nu_n & \nu_{n+1} & \nu_{n+2} \\ z^2 & z & 1 \end{vmatrix}.$$

Тогда полюсы $p_{1,2} = p_{1,2}(n) = R_n^{\pm i\beta_n}$ функции $[n/2]_\nu$ вычисляются по формулам:

$$p_{1,2} = \frac{B_n \pm \sqrt{B_n^2 - 4H_{n,2}H_{n+1,2}}}{2H_{n+1,2}} = \frac{B_n \pm i\sqrt{D_n}}{2H_{n+1,2}}, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} H_{n,2} &= \begin{vmatrix} \nu_{n-1} & \nu_n \\ \nu_n & \nu_{n+1} \end{vmatrix} = \nu_{n-1}\nu_{n+1} - \nu_n^2, \\ H_{n+1,2} &= \begin{vmatrix} \nu_n & \nu_{n+1} \\ \nu_{n+1} & \nu_{n+2} \end{vmatrix} = \nu_n\nu_{n+2} - \nu_{n+1}^2, \end{aligned} \quad (39)$$

$$B_n = \begin{vmatrix} \nu_{n-1} & \nu_{n+1} \\ \nu_n & \nu_{n+2} \end{vmatrix} = \nu_{n-1}\nu_{n+2} - \nu_n\nu_{n+1}, \quad D_n = 4H_{n,2}H_{n+1,2} - B_n^2$$

²⁷Напомним, что соответствующая классической теореме Фабри процедура в вычислительной математике называется методом отношений [5; часть 2, гл. 1, § 1.3, с. 316] или тестом Домба–Сайкса [33; с. 4].

и должно выполняться условие $D_n > 0$. Нетрудно увидеть из (26), что если наше предположение верно (и, тем самым, $\nu_k \approx \text{const} \cdot c_k$), то сходимость полюсов $p_{1,2}(n) = R_n e^{\pm i\beta_n} = u_n \pm v_n$ к точкам $Re^{\pm i\beta}$ должна быть довольно медленной – со скоростью порядка $1/n$. Этот вывод хорошо согласуется с эмпирическими данными, полученными с использованием формулы (38) и приведенными в таблице 10 (см. столбцы 1 и 2). В таком случае применение формулы (6) из теоремы 1 прямо указывает на то, что для функции частоты ν величина $R_2(\nu)$ радиуса 2-мероморфности этой функции равна $R_1(\nu) = R_0(\nu) = R$, а применение (обратной) теоремы 2 – что точки $Re^{\pm i\beta}$ – *особые точки* функции частоты ν на границе круга $|z| < R_2(\nu) = R$.

Таблица 10'

n	u_n	v_n	R_n	β_n	Δv_n	$R_n - R$	$\beta_n - \beta$
201	-.75707	3.36165	3.44585	1.79231	-.0000013	.0258479	.0000119
202	-.75696	3.36143	3.44560	1.79229	.0002274	.0256036	.0000263
203	-.75704	3.36137	3.44556	1.79232	.0000612	.0255618	-.0000007
204	-.75689	3.36124	3.44540	1.79228	.0001297	.0254019	.0000341
205	-.75698	3.36107	3.44526	1.79232	.0001656	.0252595	-.0000011
206	-.75687	3.36104	3.44521	1.79229	.0000298	.0252061	.0000283
207	-.75688	3.36081	3.44498	1.79231	.0002332	.0249807	.0000107
208	-.75687	3.36081	3.44498	1.79231	-.0000019	.0249803	.0000139
209	-.75678	3.36059	3.44475	1.79229	.0002151	.0247504	.0000260
210	-.75685	3.36054	3.44471	1.79232	.0000531	.0247148	.0000017
211	-.75671	3.36042	3.44456	1.79229	.0001259	.0245609	.0000338
212	-.75679	3.36026	3.44443	1.79232	.0001504	.0244324	.0000007
213	-.75669	3.36023	3.44438	1.79229	.0000311	.0243786	.0000289
214	-.75670	3.36002	3.44417	1.79231	.0002166	.0241702	.0000113
215	-.75668	3.36002	3.44417	1.79230	-.0000023	.0241693	.0000156
216	-.75660	3.35982	3.44395	1.79229	.0002037	.0239527	.0000257
217	-.75667	3.35977	3.44392	1.79232	.0000460	.0239225	.0000038

Из (38) для величины R_n имеем:

$$\begin{aligned}
 R_n^2 &= p_1(n) \cdot p_2(n) = \frac{H_{n,2}}{H_{n+1,2}} = \frac{\nu_{n-1}\nu_{n+1} - \nu_n^2}{\nu_n\nu_{n+2} - \nu_{n+1}^2} \\
 &= \frac{\nu_{n+1}/\nu_n - \nu_n/\nu_{n-1}}{\nu_{n+2}/\nu_{n+1} - \nu_{n+1}/\nu_n} \frac{\nu_{n-1}}{\nu_{n+1}}.
 \end{aligned} \tag{40}$$

С другой стороны, пользуясь (29) и (30) получаем следующее представление для R_n^2 :

$$R_n^2 = \left(1 + \frac{\gamma+1}{n}\right)^2 R^2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \left(1 + 2\frac{\gamma+1}{n}\right) R^2 + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Тем самым,

$$R_n = \left(1 + \frac{\gamma+1}{n}\right) R + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{41}$$

Вычисленная с помощью формулы (40) величина R_n для $n = 31, \dots, 217$ представлена в таблице 10 (см. столбец 3), откуда видно, что $R_n \downarrow$ при $n \uparrow$. С

учетом (41) получаем отсюда: $\gamma > -1$ (напомним, что $\gamma \notin \mathbb{Z}$). Аналогичным образом, используя (29)–(30) получаем асимптотические представления для последовательностей $u_n = \operatorname{Re} p_1(n)$, $v_n = \operatorname{Im} p_1(n) > 0$ и $\beta_n = \arg p_1(n) \in (\pi/2, \pi)$:

$$u_n = \left(1 + \frac{\gamma+1}{n}\right) R \cos \beta + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad v_n = \left(1 + \frac{\gamma+1}{n}\right) R \sin \beta + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (42)$$

$$\beta_n = \beta + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Откуда вытекает, что эти последовательности должны вести себя следующим образом: $u_n \uparrow R \cos \beta$ при $n \uparrow \infty$, $v_n \downarrow R \sin \beta$ при $n \uparrow \infty$, а β_n стремится к $\beta = 89\pi/156 \approx 1.7923188857$ со скоростью $O(1/n^2)$. Поведение найденных численно значений β_n достаточно хорошо согласуется с последним условием (см. таблицу 10, столбец 8).

Эмпирические величины u_n и v_n ведут себя следующим более сложным образом. Требуемая монотонность в поведении v_n лишь “слегка” нарушается для четырех значений $n = 194, 201, 208, 215$ (см. таблицу 10, 6 й столбец); величины u_n ведут себя монотонно, если рассматривать отдельно четные и нечетные номера (см. таблицу 11); то же самое справедливо и для v_n .

Заметим теперь, что если мы проведем все предыдущие (см. пп. 3.3–3.6) преобразования с точностью $O(1/n^3)$, а не $O(1/n^2)$, то вместо (41) для величины R_n получим:

$$R_n^2 = R^2 \left(1 + \frac{2(\gamma+1)}{n+1} + \frac{\gamma+1}{(n+1)^2} \left(3(\gamma+1) - \frac{\sin((2n+1)\beta + 2\alpha)}{\sin \beta}\right)\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \quad (43)$$

Непосредственно из (43) вытекает, что для величины

$$\Delta_n := \frac{1}{7} \left((n+8)R_{n+7}^2 - (n+1)R_n^2 \right)$$

имеем

$$\Delta_n = R^2 \left(1 - \frac{2(\gamma+1)}{n+1} \frac{\sin 7\beta \cdot \cos((2n+8)\beta + 2\alpha)}{7 \sin \beta}\right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (44)$$

Так как $\beta \approx \varphi_1 + \varphi_2$, где $\varphi_1 = 4\pi/7$, $\varphi_2 = -\pi/1092$, то $7\beta \approx 4\pi - \pi/156$. Следовательно, величина $|(\sin 7\beta)/7| \approx \pi/1092 \approx 3 \cdot 10^{-3}$, в то время как $\sin \beta \approx 3 \cdot 10^{-2}$. Значит, величина $\sqrt{\Delta_n}$ из формулы (44) должна давать достаточно хорошее приближение для величины R при не очень больших значениях n . Вычисленные таким путем приближенные значения для радиуса $R \approx \sqrt{\Delta_n}$ представлены в таблице 12.

Таблица 12'

n	$\sqrt{\Delta_n}$	$\sqrt{\Delta_{n+1}}$	$\sqrt{\Delta_{n+2}}$	$\sqrt{\Delta_{n+3}}$	$\sqrt{\Delta_{n+4}}$	$\sqrt{\Delta_{n+5}}$	$\sqrt{\Delta_{n+6}}$	$n+6$
183	3.4198	3.4200	3.4197	3.4199	3.4198	3.4199	3.4199	189
190	3.4198	3.4200	3.4198	3.4200	3.4198	3.4199	3.4199	196
197	3.4198	3.4200	3.4198	3.4200	3.4198	3.4199	3.4199	203
204	3.4198	3.4200	3.4198	3.4200	3.4199	3.4199	3.4200	210

Наконец, из (41) и (31) вытекает следующая (довольно грубая) формула для приближенного вычисления величины γ :

$$\gamma = \left(\frac{R_n}{R} - 1 \right) n - 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

при условии, что известна величина R . Найденная отсюда величина γ при $R = 3.42$ представлена в таблице 13.

Соответствующие приближенной формуле (43) значения R при $\gamma = 1/2$ представлены в таблице 14.

Таблица 14'

n								$n + 6$
183	3.42043	3.42024	3.42047	3.42024	3.42042	3.42032	3.42032	189
190	3.42041	3.42024	3.42045	3.42024	3.42040	3.42031	3.42031	196
197	3.42039	3.42024	3.42043	3.42023	3.42039	3.42030	3.42031	203
204	3.42038	3.42024	3.42041	3.42023	3.42038	3.42028	3.42030	210
211	3.42036	3.42024	3.42040	3.42022	3.42037	3.42028	3.42030	217

Проведем теперь основанное на (43) некоторое тестовое вычисление для проверки согласованности найденных численно величин β и α . Положим $d_n = R_n^2$ и пользуясь (29)–(30) найдем следующее приближенное представление для отношения d_n/d_{n+1} :

$$\begin{aligned} r_n &:= \frac{d_n}{d_{n+1}} = 1 + \frac{4 \cos^2((n+1)\beta + \alpha)}{(n+1)^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 + \frac{2}{(n+1)^2} + \frac{2}{(n+1)^2} \cos(2(n+1)\beta + 2\alpha) + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \approx 1. \end{aligned} \quad (45)$$

Найденные по этой приближенной формуле при $\beta \approx \varphi_1 + \varphi_2 = 89\pi/156$ и $\alpha = \pi/4$ значения величины r_n приведены в таблице 15. Там же для сравнения приведены значения величины s_n :

$$\begin{aligned} s_n &:= \frac{d_n}{d_{n+1}} - \frac{2}{(n+1)^2} - \frac{2}{(n+1)^2} \cos(2(n+1)\beta + 2\alpha) \\ &= 1 + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \approx 1, \end{aligned} \quad (46)$$

и

$$w_n := \frac{d_n}{d_{n+1}} - \frac{2}{(n+1)^2} = 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \approx 1, \quad (47)$$

найденные при тех же значениях β и α .

§ 4. Заключительные замечания

4.1. Отметим прежде всего следующее. Ясно, что сделанное нами предположение (26), в соответствии с которым

$$\nu(z) \approx \text{const} \left(e^{i\alpha} (z - Re^{i\beta})^\gamma + e^{-i\alpha} (z - Re^{-i\beta})^\gamma \right) + p(z), \quad \text{при } |z| < \rho, \quad (48)$$

где $\rho \gg R$, является всего лишь весьма приближенным представлением для функции частоты ν . Как уже отмечалось выше, для численного анализа более сложного варианта вида

$$\nu(z) \approx g(z)(e^{i\alpha}(z - Re^{i\beta})^\gamma + e^{-i\alpha}(z - e^{-i\beta})^\gamma) + h(z), \quad (49)$$

найденных тейлоровских коэффициентов функции ν оказывается недостаточным. Тот факт, что представление вида (49) при найденных выше значениях $R = 3.42$, $\beta = \varphi_1 + \varphi_2 = 89\pi/156$ и $\alpha = \pi/4$ вполне может иметь место подкрепляется следующими рассуждениями. Вместо приближенного равенства $g(z) \approx \text{const}$, соответствующего (48), будем считать, что $g(z) \approx C_0 + C_1 z$. Подставим это представление в (49) и (положив $h(z) \equiv 0$) приравняем коэффициенты при степенях z^n в обеих частях равенства. Вытекающая отсюда формула для C_0 зависит от n . Вычисленные для различных n значения C_0 представлены в таблице 16, а их отношения для номеров вида n и $n + 7$ (т.е. соседних по столбцам) – в таблице 17.

Кроме того, численный анализ, проведенный с помощью аппроксимаций Эрмита–Паде I-го рода (см. [27]) для пары функций $f_1 = f$ и $f_2 = f^2$

$$(Q_{n,0} + Q_{n,1}f + Q_{n,2}f^2)(z) = O(z^{3n+2}), \quad z \rightarrow 0,$$

для $f = \nu, A$ показывает, что ближайшие к началу координат особенности функций частоты ν и амплитуды A не могут быть точками квадратичного ветвления, а носят более сложный характер, т.е. $\gamma \neq \pm 1/2$.

Таким образом, скорее всего в представлении (49) g и h – функции со “слабыми” по сравнению со степенными особенностями в точках $Re^{\pm i\beta}$. Например, – особенностями логарифмического типа. Такой результат соответствовал бы известным асимптотическим формулам Дородницына [37] для функций ν и A :

$$\frac{2\pi}{\nu(\varepsilon^2)\varepsilon} = (3 - \log 4) - \frac{3\alpha}{\varepsilon^{4/3}} - \frac{2 \log \varepsilon}{3\varepsilon^2} - \frac{1.3246}{\varepsilon^2} + o(\varepsilon^{-2}), \quad \varepsilon \rightarrow \infty,$$

где $\alpha = -2.33810741$ – некоторый нуль функции Эйри (аналогичное представление справедливо для $A(\varepsilon)$).

Вернемся теперь к тем предположениям, при которых мы проводили свои рассуждения: это отграниченность от нуля величин $\cos(k\beta + \alpha)$. Нетрудно убедиться в том, что при $\beta = \varphi_1 + \varphi_2 = 89\pi/156$ и $\alpha = \pi/4$ эти условия нарушаются: $\cos(k\beta + \alpha) = 0$ для $k = 39m$, где $m = 4\ell + 1$. Однако в целом с учетом тех поправок, которые в соответствии вышесказанным надо внести в представление (26), это обстоятельство представляется несущественным для сделанных в настоящей работе выводов.

4.2. Как отмечалось выше, наличие ложных полюсов у аппроксимаций Паде существенно усложняет вычисления. Для численного построения изображенных на рис. 1–13 предельных циклов уравнения Ван-дер-Поля для значений малого параметра $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = 0.5$, $\varepsilon = 1.3$, $\varepsilon = 1.6$, $\varepsilon = 1.64$, $\varepsilon = 1.65$, $\varepsilon = 1.66$, $\varepsilon = 1.67$, $\varepsilon = 1.7$, $\varepsilon = 2.0$, $\varepsilon = 2.5$, $\varepsilon = 3.0$ и $\varepsilon = 3.4$ на самом деле использовались две соседние аппроксимации вида $[n - 1/n - 1]$ и $[n/n]$. Теоретическое обоснование этой процедуры дано в [38].

k	ν_{2k}
54	+ .1847057865322384172675764387270715456310 D - 32
55	+ .1088493911898937878944772893065734894788 D - 32
56	- .2856086680095023352563225653844908980423 D - 33
57	- .5243304810523538873038072473630953507948 D - 34
58	+ .2972103216290751822643558256647671871080 D - 34
59	+ .5328791288891815701719748028424081135375 D - 36
60	- .2480897831170224122215692088215344710790 D - 35
61	+ .2676478088705932763343292953177896551233 D - 36
62	+ .1682925332119150049070096737456057540688 D - 36
63	- .4290529909805025255961691938962183346828 D - 37
64	- .8330301420308404100058055675833930390013 D - 38
65	+ .4544802440916130649105016124078158665130 D - 38
66	+ .1091274735368986118385456969840603757605 D - 39
67	- .3848836141242738420993518705055740055858 D - 39
68	+ .3944681098552407888022122693097752607013 D - 40
69	+ .2651741804245994349619221019592046267045 D - 40
70	- .6562402131477847486339040831772752754785 D - 41
71	- .1345954326363085353682553281633106020958 D - 41
72	+ .7070302283185938753149235112705705974720 D - 42
73	+ .2136423043561791694415256491863461670668 D - 43
74	- .6068737330033392968020930307238191472535 D - 43
75	+ .5888317450257321802813753264259353778423 D - 44
76	+ .4242051498171681187484014774296535758095 D - 44
77	- .1018251924790547900687980638342730213084 D - 44
78	- .2204089699438375732779083671230494479258 D - 45
79	+ .1115319247557993390797684863557381355291 D - 45
80	+ .4075457480108277709966869661671022274325 D - 47
81	- .9696179207295693273832603432575727180120 D - 47
82	+ .8873544494258371262903178655480942301858 D - 48
83	+ .687054287152806591616243752762223780283 D - 48
84	- .1598542018075816836436656939226858560614 D - 48
85	- .3648953476480708946509270037675199536673 D - 49
86	+ .1779637011716989017278906431299763239001 D - 49
87	+ .7649316337507909875883731436564539411175 D - 51
88	- .1566212180169867598903702302786025021329 D - 50
89	+ .1346476015689433577953292475498847834875 D - 51
90	+ .1124257176055979024480999481106617125766 D - 51
91	- .2533852639105786299496042566427160015760 D - 52
92	- .6095733355735789225297359357056723675725 D - 53
93	+ .28669386283708733284782256969914537380363 D - 53
94	+ .142039925562206609577366369944971542263 D - 54
95	- .2553231967862104249248136851135036935490 D - 54
96	+ .2052752728719811254379917108191224680695 D - 55
97	+ .1855649885928202909335364762351882239980 D - 55
98	- .4048859058535557857541666040258708463550 D - 56
99	- .1026049023555542691179948253251940269817 D - 56
100	+ .4656090906758937935321487321593386502228 D - 57
101	+ .2618106783580055579674096888279100333693 D - 58
102	- .4194925447985196467931988398900893211763 D - 58
103	+ .3137993081450993278585322947272485979995 D - 59
104	+ .3085512780699572125385436196799818972938 D - 59
105	- .6513626640955671581128277337241410347505 D - 60
106	- .1738184337213513484682880945182874445053 D - 60
107	+ .7614321347768019271484400797445747816385 D - 61

k	ν_{2k}
108	+ .4800431756501028014153877912930868343228 D -62
109	- .6938669659363905794805852679111175240295 D -62
110	+ .4800959637198923440372787818933936225088 D -63
111	+ .5163147928537674801616797147969784934383 D -63
112	- .1053900407263927127486594238744966788788 D -63
113	- .2960805849733216367141727868433147771610 D -64
114	+ .1252663797101114029956225240884269395871 D -64
115	+ .8768145270053874796853969889954224886975 D -66
116	- .1154407476930827026635804515314579413462 D -65
117	+ .7337339028539545189538427583626452894260 D -67
118	+ .8687510904885905875427369052570774178010 D -67
119	- .1713513594471782185945187627368501844292 D -67
120	- .5067414054766499681239583537117931129360 D -68
121	+ .2071531091068297502674524178306839077188 D -68
122	+ .1596967380486633815024289306581978652885 D -69
123	- .1930430552873941194614898488789484859581 D -69
124	+ .1117871031539148072572630209967683072238 D -70
125	+ .1468827759854428569849414412146919308937 D -70
126	- .2797501928257292271412268062191068256443 D -71
127	- .8708811504811840373608382329020188080820 D -72
128	+ .3441268626097685548982063187302761269978 D -72
129	+ .2902332051083274133662970563464750420928 D -73
130	- .3242616283856365763297469614069175607608 D -73
131	+ .1693792362145139166610155846426561321903 D -74
132	+ .2493972994786781618742645337164163438835 D -74
133	- .4583286997743555388464482802089313352543 D -75
134	- .1502124978456079976636320710748918496423 D -75
135	+ .5739536899260228087234244843688326420555 D -76
136	+ .5265981901479430133384989752040987550530 D -77
137	- .5468387366821317264334502896411735375493 D -77
138	+ .2544968427970654296803738801405146626640 D -78
139	+ .4250576353786229821364600671477207150420 D -78
140	- .7531331430477796594934880306389640299405 D -79
141	- .2599214402599870920544901729792593801688 D -79
142	+ .9606441673215658440606209000143614741783 D -80
143	+ .9542317847661324555761135670516757941700 D -81
144	- .9254538121197519367968498604526972787745 D -81
145	+ .3777516104594791619312567835470362188528 D -82
146	+ .7268760172742881122460615954256201074468 D -82
147	- .1240641375874042370692585969355157860785 D -82
148	- .4510343549644247739540085304483911459958 D -83
149	+ .1612873557181128259201781063996600825166 D -83
150	+ .1727393214388182552458404396752563409513 D -84
151	- .1571152875940503406658990738032749171659 D -84
152	+ .5509591297446967117298227819947921036300 D -86
153	+ .1246740319140999188739544053742937423567 D -85
154	- .2047923470889466993638915069407232555861 D -86
155	- .7846468869491184130522450257174521413065 D -87
156	+ .2715425474116960304337422307560818704113 D -87
157	+ .3124516385459497130880896321259701164888 D -88
158	- .2674908261838595674727411012784873610018 D -88
159	+ .7833123912925385271903779190912371562525 D -90
160	+ .2144185598627015212498432267950652656043 D -89
161	- .3386131609048147794919280453533377844498 D -90

k	ν_{2k}
162	-.1368108192308800662133947030506600144800 D -90
163	+.4582915797890462037956144910022626803593 D -91
164	+.5648053716701208479725174464897313565410 D -92
165	-.4565652295438556565527605093534819187203 D -92
166	+.1071270464811343605793353936586751568865 D -93
167	+.3696615224511551365341323949690095410113 D -93
168	-.5606072917282340513709428567813721203100 D -94
169	-.2390276456370700099189986991070056702473 D -94
170	+.7751656824006752706146278302991240900243 D -95
171	+.1020454304876849802877431059370507806033 D -95
172	-.7810739610258506346435232242562986710008 D -96
173	+.1374922168802364044386427902154777198225 D -97
174	+.6387056992106677999515580338235221509968 D -97
175	-.9290297056253770567220034094672620887305 D -98
176	-.4183792824163358730529306075959804912503 D -98
177	+.1313684550289863876495820585731174671652 D -98
178	+.1842932505696252720720070172980536403433 D -99
179	-.1339002701079016529585305163823644161043 D -99
180	+.1566248908211254854420668831714023376600 D -101
181	+.1105766027866985159097402957386304493102 D -100
182	-.1540541850617761849569259075762798958511 D -101
183	-.7335170294615343335260173491024681760478 D -102
184	+.2230168166155283700153758074764312741230 D -102
185	+.3327206271272454863017359720869358823430 D -103
186	-.2299778502586528507967082632769282552885 D -103
187	+.1320414690612228805275108651175831851875 D -105
188	+.1917842989200436294391399210892379656498 D -104
189	-.2555351509718785038097791458267676787608 D -105
190	-.1287955874423740681525147462983665247703 D -105
191	+.3791833550061963691013881712882595207705 D -106
192	+.6005245264724698010325810923713341340483 D -107
193	-.3956673583048038358334297674414539222803 D -107
194	-.1063957460130126761144091928002177950000 D -110
195	+.3331810910685255369277026354112505185328 D -108
196	-.4238592255459373151590256630053267525180 D -109
197	-.2264555749022735559843099533433322055238 D -109
198	+.6455782182213236904012328510201153135933 D -110
199	+.1083635822780077751838395286124709883918 D -110
200	-.6817831342574262547959207692898352278333 D -111
201	-.4321984132542371117616245326491900853600 D -113
202	+.5796992112024852606595827509937792678918 D -112
203	-.7028209382201923710413528819933395606393 D -113
204	-.3986606771356045868240715406251114010580 D -113
205	+.1100438271305766507788258187178183373168 D -113
206	+.1955033110362630098363577769722809356603 D -114
207	-.1176448519447103720556636394336019091531 D -114
208	-.1467617838580701053915329370528590280575 D -116
209	+.1010006385825577888747174330254611276479 D -115
210	-.1164589050818348140928259000275694414639 D -116
211	-.7026109409157516960917601882266670332783 D -117
212	+.1877735422645415127982809476160771855052 D -117
213	+.3526600297562085895209548015193598619013 D -118
214	-.2032613562851525698688653944992434502917 D -118
215	-.3797309002265426328811502860894177651425 D -120

k	ν_{2k}
216	+ .1761952096586554912986151200172965242090 D-119
217	- .1927746740238691814927960776272050317450 D-120
218	- .1239581850374531231901376966872704785227 D-120
219	+ .3206965142575915687082176314345218686238 D-121
220	+ .6360631437289028149120026350618360878308 D-122

k	a_{2k}
52	+ .4439444361230797906271570635478979383379 D -32
53	+ .1054517997907321146493843578375426194954 D -31
54	- .1677425201390193357483866976993104389786 D -32
55	- .6433936283225883243769517163301836183096 D -33
56	+ .2163860197796040772637237772114799649906 D -33
57	+ .2506559005864792207738833020097878415665 D -34
58	- .2069859400635281582425807131098188516704 D -34
59	+ .5581840556157548391165401066722517658775 D -36
60	+ .1612553610142348531087269551839455872492 D -35
61	- .2476560226077470646056211616296155807231 D -36
62	- .1002223829326054693887600940688338550243 D -36
63	+ .3275911246439634074240168498792103558454 D -37
64	+ .4059555634623802914420186924441530766671 D -38
65	- .3183189203176288681696765828012271683457 D -38
66	+ .6842563548137113459251875214331517308585 D -40
67	+ .2515275457866014185078014981870735540583 D -39
68	- .3721790228965352699257997159168798518199 D -40
69	- .1590112798765618303169376164892233633987 D -40
70	+ .5047655601240989723342860807245269771395 D -41
71	+ .6675851484227278121373953391243324963278 D -42
72	- .4978196742311767488871680960636170469803 D -42
73	+ .791910224423710419110253714090939798095 D -44
74	+ .3985896276200512036448815234650740142019 D -43
75	- .5671306090537977715711567891777454930342 D -44
76	- .2560181742613880102125763534622239545474 D -44
77	+ .7888575598390648876520048404596016159892 D -45
78	+ .1111119709385713551411470550357459139251 D -45
79	- .7892054316288399503631667475638595133828 D -46
80	+ .8064559432117312305322816576214303424883 D -48
81	+ .6398305168139058535220605716077586199925 D -47
82	- .8737690721328682576407853738269101440915 D -48
83	- .4171789010655168535340851140139161320094 D -48
84	+ .1247218913787539382090857755218337831244 D -48
85	+ .1867339361681106856109869553851538600361 D -49
86	- .1265278575902725772178965781695550968974 D -49
87	+ .5615724878952818680749777942291740957460 D -52
88	+ .1038119600526572072694334585803706544417 D -50
89	- .1358093607340220330308623974865813566098 D -51
90	- .6865911979608013453062628347636625402094 D -52
91	+ .1990993142265987401516892115379347185457 D -52
92	+ .3163250778340462674371936989057325714346 D -53
93	- .2047718753988151660356485365566274106266 D -53
94	- .2924827645471101653302500920691437953806 D -56
95	+ .1699563205470057462806609710717783164138 D -54
96	- .2125758093016793201552936789404927921698 D -55
97	- .1139500848148350526543457061768332448413 D -55
98	+ .3204154302985020657819978132100503043889 D -56
99	+ .5393995665871914203283839358264780634009 D -57
100	- .3340590741512379174987840783370596430578 D -57
101	- .2465226772852667637519449685215329279629 D -59
102	+ .2803855093238900585980192303913024779495 D -58
103	- .3345931632358809795780673312859940809476 D -59

k	a_{2k}
104	−.1904724528391729123849901599351023019531 D −59
105	+.5192085893763180490959719188561343537949 D −60
106	+.9249124458693387654728734709060014920620 D −61
107	−.5487195869995134335666833904849299898901 D −61
108	−.7361536322612256297151352099606738117396 D −63
109	+.4656270241355347735475289887315194217223 D −62
110	−.5289365283623858666784398328444375990302 D −63
111	−.3203450340942552167323607167460670889347 D −63
112	+.8462975867664994603121844662678191741936 D −64
113	+.1593469632680889611882592454354338628407 D −64
114	−.9066724389001867797410332380891167720224 D −65
115	−.1771542144788333005419432289653537856101 D −66
116	+.7776922457096201380344686452332310224051 D −66
117	−.8388895218703596534466334023201827451140 D −67
118	−.5416512316728439536604507358687422530224 D −67
119	+.1386438421132652063077512373312265774333 D −67
120	+.2756450375652299665980180920437430179226 D −68
121	−.1505887797370250185289278703284809229624 D −68
122	−.3877969206652561393778683124671078860020 D −70
123	+.1305428890117305939212002145391033665091 D −69
124	−.1333513356911432752558248029525928259751 D −70
125	−.9201249103312289258608245070360190194099 D −71
126	+.2281265325700536556636394163329700485384 D −71
127	+.4785013620571883003241033607354263609740 D −72
128	−.2512473790305448697228358228463396548546 D −72
129	−.8054807857416368696143405337736237436618 D −74
130	+.2200974494726106199272941393275092776015 D −73
131	−.2122684747142692056632430909249756368200 D −74
132	−.1569483602865135594738230127246766412991 D −74
133	+.3767866222891893562898020786792827344131 D −75
134	+.8331965108886830184428452814457361896751 D −76
135	−.4208670564993533163548125154143137736723 D −76
136	−.1618889178264080717843616895278641966180 D −77
137	+.3725412603598690417826038929324283384680 D −77
138	−.3380533546360151768780897781189437228762 D −78
139	−.2686863068690300591987447925517523582198 D −78
140	+.6243700166847374373116883874025505822325 D −79
141	+.1454721998020250015354807688442729391057 D −79
142	−.7074976825150361286690830350705570851159 D −80
143	−.3182086742615041392081994765144342988471 D −81
144	+.6327689960501127846796248005308463371392 D −81
145	−.5381581193789897213535434966650434950728 D −82
146	−.4614657569907352585021568135095291648820 D −82
147	+.1037591374529648773551092422945550858174 D −82
148	+.2545913522110687686259355196451694429951 D −83
149	−.1193086285593113898958189462600676994209 D −83
150	−.6156187623771894764860771344127340409095 D −85
151	+.1078121539629948340476311079664253232858 D −84
152	−.8555677499060827194939013579457293784246 D −86
153	−.7948586239053734073598195458769153473066 D −86
154	+.1728550539213579950448085072070877763414 D −86
155	+.4465003926260592243443419287511749516889 D −87

k	a_{2k}
156	−.2017614278183905960005446611364516395547 D −87
157	−.1177060518777955657756208533546862506207 D −88
158	+.1842060359375838832746233873687539107709 D −88
159	−.1356992950755323146338941918322590603257 D −89
160	−.1372677067187580964903860995090213052060 D −89
161	+.2885767060157763189600756052607678032722 D −90
162	+.7845396395004785023457386986070198276553 D −91
163	−.3420544505138786479461252265396493780545 D −91
164	−.2230381311800712334224077025702133736026 D −92
165	+.3155246693805735016297354496602523634886 D −92
166	−.2144765341615153987891007929636060723913 D −93
167	−.2376092651086564812774628460020354333721 D −93
168	+.4826483243753363855490685669961408029185 D −94
169	+.1380819363918621580883522106980118255807 D −94
170	−.5812058478539423554523298081206113775886 D −95
171	−.4196645858279128602452485717019199955450 D −96
172	+.5416898509421465788923400892314315392293 D −96
173	−.3373438522059072257751806994434337526586 D −97
174	−.4121708896340308270384433102722624156181 D −97
175	+.8084804193072228663213501771499081981971 D −98
176	+.2433959017916160702996491290870076907867 D −98
177	−.9895598208446828647341980970220171888350 D −99
178	−.7852100390684238690650384153147680424669 D −100
179	+.9318865538835926235722800635533472978890 D −100
180	−.5271534939603153629168258765364978926992 D −101
181	−.7163486249078218872788954394422148826665 D −101
182	+.1356018996045876691996326646861802361336 D −101
183	+.4296146265461050973695903228951730853143 D −102
184	−.1687881865715128034910278079385494204806 D −102
185	−.1462480736668863321217707421234934694658 D −103
186	+.1606156830354876208808273340927302858457 D −103
187	−.8166897091016719163965269766759013381867 D −105
188	−.1247179305304984319930488913520938641478 D −104
189	+.2276750993688553224187797740179378831164 D −105
190	+.7592367622661560248365501526994015897297 D −106
191	−.2883697425497391438393413821191086205479 D −106
192	−.2713726651405250987203903486620907161866 D −107
193	+.2773013326846502167279751693793611831903 D −107
194	−.1250887587360795038217926028728705386679 D −108
195	−.2174820211104381734509011797952868760399 D −108
196	+.3825784557337535861281560010084737275036 D −109
197	+.1343251952078334101717626962197126694932 D −109
198	−.4933924415036131383344027118524580003980 D −110
199	−.5019793837744791545785561078805469038586 D −111
200	+.4795007358643178010979764613469894719455 D −111
201	−.1886833012421342816005843746587733725430 D −112
202	−.3797936782502752796727716665747334128658 D −112
203	+.6432601626070618986683026242511863978088 D −113
204	+.2378894908395870328254574936070116602935 D −113
205	−.8452877837290269845524399626996633192719 D −114
206	−.9261130101469768162417766762676203683738 D −115
207	+.8303108419467441178112812117839520657224 D −115

k	a_{2k}
208	−.2786943304135703472620422911143825893820 D−116
209	−.6641224485021731407330256708869407989689 D−116
210	+.1081988767647838389410974573795734589137 D−116
211	+.4216876688156684281522618472276013364424 D−117
212	−.1449859072718527704407778059973044948843 D−117
213	−.1704793219152184810698821734366542860947 D−118
214	+.1439636123949422066598645642960570085730 D−118
215	−.3995024582576892546007298025135605826833 D−120
216	−.1162722827711520801473315802385269923633 D−119
217	+.1820283618578123488334234973710456356590 D−120
218	+.7481160474330680751132450205398697051948 D−121
219	−.2489434652133152267803399005335730010651 D−121
220	−.3132185502693025926962918836583928042926 D−122

ТАБЛИЦА 3. Ближайшие к предполагаемым особым точкам функции ν полюсы $p_n = R_n e^{i\beta_n}$ и нули $z_n = \rho_n e^{i\alpha_n}$ диагональных аппроксимаций Паде $[n/n]_\nu$, $n = 1, \dots, 40$.

n	R_n	β_n	ρ_n	α_n
1	3.4550243	1.7938894	3.4552688	1.7940291
2	3.4521675	1.7936985	3.4523865	1.7938206
3	3.4500653	1.7936853	3.4502585	1.7937965
4	3.4468921	1.7935683	3.4470537	1.7936626
5	3.4453555	1.7934615	3.4455052	1.7935474
6	3.4433930	1.7934288	3.4435225	1.7935055
7	3.4417592	1.7933893	3.4418732	1.7934584
8	3.4399370	1.7932663	3.4400384	1.7933265
9	3.4388939	1.7931316	3.4389914	1.7931863
10	3.4387261	1.7931670	3.4388203	1.7932213
11	3.4364495	1.7928131	3.4365376	1.7928554
12	3.4360802	1.7928242	3.4361643	1.7928653
13	3.4323405	1.7923941	3.4324074	1.7924192
14	3.4339275	1.7927339	3.4339958	1.7927668
15	3.4337877	1.7927317	3.4338549	1.7927641
16	3.4321687	1.7926442	3.4322256	1.7926706
17	3.4321626	1.7926447	3.4322193	1.7926712
18	3.4313597	1.7924221	3.4314177	1.7924444
19	3.4302957	1.7925072	3.4303425	1.7925271
20	3.4306261	1.7925427	3.4306742	1.7925638
21	3.4305724	1.7925533	3.4306198	1.7925743
22	3.4303199	1.7925261	3.4303662	1.7925462
23	3.4296739	1.7925606	3.4297142	1.7925791
24	3.4289851	1.7925508	3.4290209	1.7925675
25	3.4292065	1.7924698	3.4292464	1.7924865
26	3.4291852	1.7924727	3.4292248	1.7924893
27	3.4290863	1.7923099	3.4291302	1.7923251
28	3.4286169	1.7924212	3.4286540	1.7924360
29	3.4286344	1.7924558	3.4286706	1.7924709
30	3.4285418	1.7924185	3.4285785	1.7924331
31	3.4283194	1.7924123	3.4283546	1.7924263
32	3.4280471	1.7924132	3.4280804	1.7924265
33	3.4280436	1.7924084	3.4280771	1.7924216
34	3.4280437	1.7924104	3.4280771	1.7924237
35	3.4287592	1.7925295	3.4287941	1.7925454
36	3.4274488	1.7923442	3.4274800	1.7923556
37	3.4275936	1.7923759	3.4276250	1.7923879
38	3.4275936	1.7923759	3.4276250	1.7923879
39	3.4272316	1.7923304	3.4272618	1.7923413
40	3.4274442	1.7924210	3.4274733	1.7924329

k	ν_{2k}
54	+ .1847057865322384172675764387270715456310 D -32
55	+ .1088493911898937878944772893065734894788 D -32
56	- .2856086680095023352563225653844908980423 D -33
57	- .5243304810523538873038072473630953507948 D -34
58	+ .2972103216290751822643558256647671871080 D -34
59	+ .5328791288891815701719748028424081135375 D -36
60	- .2480897831170224122215692088215344710790 D -35
61	+ .2676478088705932763343292953177896551233 D -36
62	+ .1682925332119150049070096737456057540688 D -36
63	- .4290529909805025255961691938962183346828 D -37
64	- .8330301420308404100058055675833930390013 D -38
65	+ .4544802440916130649105016124078158665130 D -38
66	+ .1091274735368986118385456969840603757605 D -39
67	- .3848836141242738420993518705055740055858 D -39
68	+ .3944681098552407888022122693097752607013 D -40
69	+ .2651741804245994349619221019592046267045 D -40
70	- .6562402131477847486339040831772752754785 D -41
71	- .1345954326363085353682553281633106020958 D -41
72	+ .7070302283185938753149235112705705974720 D -42
73	+ .2136423043561791694415256491863461670668 D -43
74	- .6068737330033392968020930307238191472535 D -43
75	+ .5888317450257321802813753264259353778423 D -44
76	+ .4242051498171681187484014774296535758095 D -44
77	- .1018251924790547900687980638342730213084 D -44
78	- .2204089699438375732779083671230494479258 D -45
79	+ .1115319247557993390797684863557381355291 D -45
80	+ .4075457480108277709966869661671022274325 D -47
81	- .9696179207295693273832603432575727180120 D -47
82	+ .8873544494258371262903178655480942301858 D -48
83	+ .6870542871528065916162437527622237380283 D -48
84	- .1598542018075816836436656939226858560614 D -48
85	- .3648953476480708946509270037675199536673 D -49
86	+ .1779637011716989017278906431299763239001 D -49
87	+ .7649316337507909875883731436564539411175 D -51
88	- .1566212180169867598903702302786025021329 D -50
89	+ .1346476015689433577953292475498847834875 D -51
90	+ .1124257176055979024480999481106617125766 D -51
91	- .2533852639105786299496042566427160015760 D -52
92	- .6095733355735789225297359357056723675725 D -53
93	+ .2866938628370873328478225696991453787363 D -53
94	+ .1420399255622066095777366369944971542263 D -54
95	- .2553231967862104249248136851135036935490 D -54
96	+ .2052752728719811254379917108191224680695 D -55
97	+ .1855649885928202909335364762351882239980 D -55
98	- .4048859058535557857541666040258708463550 D -56
99	- .1026049023555542691179948253251940269817 D -56
100	+ .4656090906758937935321487321593386502228 D -57
101	+ .2618106783580055579674096888279100333693 D -58
102	- .4194925447985196467931988398900893211763 D -58
103	+ .3137993081450993278585322947272485979995 D -59
104	+ .3085512780699572125385436196799818972938 D -59
105	- .6513626640955671581128277337241410347505 D -60
106	- .1738184337213513484682880945182874445053 D -60
107	+ .7614321347768019271484400797445747816385 D -61

k	ν_{2k}
108	+ .4800431756501028014153877912930868343228 D -62
109	- .6938669659363905794805852679111175240295 D -62
110	+ .4800959637198923440372787818933936225088 D -63
111	+ .5163147928537674801616797147969784934383 D -63
112	- .1053900407263927127486594238744966788788 D -63
113	- .2960805849733216367141727868433147771610 D -64
114	+ .1252663797101114029956225240884269395871 D -64
115	+ .8768145270053874796853969889954224886975 D -66
116	- .1154407476930827026635804515314579413462 D -65
117	+ .7337339028539545189538427583626452894260 D -67
118	+ .8687510904885905875427369052570774178010 D -67
119	- .1713513594471782185945187627368501844292 D -67
120	- .5067414054766499681239583537117931129360 D -68
121	+ .2071531091068297502674524178306839077188 D -68
122	+ .1596967380486633815024289306581978652885 D -69
123	- .1930430552873941194614898488789484859581 D -69
124	+ .1117871031539148072572630209967683072238 D -70
125	+ .1468827759854428569849414412146919308937 D -70
126	- .2797501928257292271412268062191068256443 D -71
127	- .8708811504811840373608382329020188080820 D -72
128	+ .3441268626097685548982063187302761269978 D -72
129	+ .2902332051083274133662970563464750420928 D -73
130	- .3242616283856365763297469614069175607608 D -73
131	+ .1693792362145139166610155846426561321903 D -74
132	+ .2493972994786781618742645337164163438835 D -74
133	- .4583286997743555388464482802089313352543 D -75
134	- .1502124978456079976636320710748918496423 D -75
135	+ .5739536899260228087234244843688326420555 D -76
136	+ .5265981901479430133384989752040987550530 D -77
137	- .5468387366821317264334502896411735375493 D -77
138	+ .2544968427970654296803738801405146626640 D -78
139	+ .4250576353786229821364600671477207150420 D -78
140	- .7531331430477796594934880306389640299405 D -79
141	- .2599214402599870920544901729792593801688 D -79
142	+ .9606441673215658440606209000143614741783 D -80
143	+ .9542317847661324555761135670516757941700 D -81
144	- .9254538121197519367968498604526972787745 D -81
145	+ .3777516104594791619312567835470362188528 D -82
146	+ .7268760172742881122460615954256201074468 D -82
147	- .1240641375874042370692585969355157860785 D -82
148	- .4510343549644247739540085304483911459958 D -83
149	+ .1612873557181128259201781063996600825166 D -83
150	+ .1727393214388182552458404396752563409513 D -84
151	- .1571152875940503406658990738032749171659 D -84
152	+ .5509591297446967117298227819947921036300 D -86
153	+ .1246740319140999188739544053742937423567 D -85
154	- .2047923470889466993638915069407232555861 D -86
155	- .7846468869491184130522450257174521413065 D -87
156	+ .2715425474116960304337422307560818704113 D -87
157	+ .3124516385459497130880896321259701164888 D -88
158	- .2674908261838595674727411012784873610018 D -88
159	+ .7833123912925385271903779190912371562525 D -90
160	+ .2144185598627015212498432267950652656043 D -89
161	- .3386131609048147794919280453533377844498 D -90

k	ν_{2k}
162	−.1368108192308800662133947030506600144800 D −90
163	+.4582915797890462037956144910022626803593 D −91
164	+.5648053716701208479725174464897313565410 D −92
165	−.4565652295438556565527605093534819187203 D −92
166	+.1071270464811343605793353936586751568865 D −93
167	+.3696615224511551365341323949690095410113 D −93
168	−.5606072917282340513709428567813721203100 D −94
169	−.2390276456370700099189986991070056702473 D −94
170	+.7751656824006752706146278302991240900243 D −95
171	+.1020454304876849802877431059370507806033 D −95
172	−.7810739610258506346435232242562986710008 D −96
173	+.1374922168802364044386427902154777198225 D −97
174	+.6387056992106677999515580338235221509968 D −97
175	−.9290297056253770567220034094672620887305 D −98
176	−.4183792824163358730529306075959804912503 D −98
177	+.1313684550289863876495820585731174671652 D −98
178	+.1842932505696252720720070172980536403433 D −99
179	−.1339002701079016529585305163823644161043 D −99
180	+.1566248908211254854420668831714023376600 D −101
181	+.1105766027866985159097402957386304493102 D −100
182	−.1540541850617761849569259075762798958511 D −101
183	−.7335170294615343335260173491024681760478 D −102
184	+.2230168166155283700153758074764312741230 D −102
185	+.3327206271272454863017359720869358823430 D −103
186	−.2299778502586528507967082632769282552885 D −103
187	+.1320414690612228805275108651175831851875 D −105
188	+.1917842989200436294391399210892379656498 D −104
189	−.2555351509718785038097791458267676787608 D −105
190	−.1287955874423740681525147462983665247703 D −105
191	+.3791833550061963691013881712882595207705 D −106
192	+.6005245264724698010325810923713341340483 D −107
193	−.3956673583048038358334297674414539222803 D −107
194	−.1063957460130126761144091928002177950000 D −110
195	+.3331810910685255369277026354112505185328 D −108
196	−.4238592255459373151590256630053267525180 D −109
197	−.2264555749022735559843099533433322055238 D −109
198	+.6455782182213236904012328510201153135933 D −110
199	+.1083635822780077751838395286124709883918 D −110
200	−.6817831342574262547959207692898352278333 D −111
201	−.4321984132542371117616245326491900853600 D −113
202	+.5796992112024852606595827509937792678918 D −112
203	−.7028209382201923710413528819933395606393 D −113
204	−.3986606771356045868240715406251114010580 D −113
205	+.1100438271305766507788258187178183373168 D −113
206	+.1955033110362630098363577769722809356603 D −114
207	−.1176448519447103720556636394336019091531 D −114
208	−.1467617838580701053915329370528590280575 D −116
209	+.1010006385825577888747174330254611276479 D −115
210	−.1164589050818348140928259000275694414639 D −116
211	−.7026109409157516960917601882266670332783 D −117
212	+.1877735422645415127982809476160771855052 D −117
213	+.3526600297562085895209548015193598619013 D −118
214	−.2032613562851525698688653944992434502917 D −118

k	ν_{2k}
215	$-.3797309002265426328811502860894177651425$ D-120
216	$+.1761952096586554912986151200172965242090$ D-119
217	$-.1927746740238691814927960776272050317450$ D-120
218	$-.1239581850374531231901376966872704785227$ D-120
219	$+.3206965142575915687082176314345218686238$ D-121
220	$+.6360631437289028149120026350618360878308$ D-122

ТАБЛИЦА 5. Эмпирические значения для величины ψ_k , $k = 1, \dots, 217$, вычисленные по формуле (32) (ср. табл. 8).

n	ψ_n	ψ_{n+1}	ψ_{n+2}	ψ_{n+3}	ψ_{n+4}	ψ_{n+5}	ψ_{n+6}	$n + 6$
1	.0000	.0000	.2257	.9714	.0964	.7127	.4532	7
8	.4058	.7476	.1072	.9660	.1776	.6810	.4645	14
15	.3961	.7482	.1118	.9690	.1739	.6863	.4569	21
22	.4035	.7394	.1214	.9784	.1643	.6962	.4463	28
29	.4139	.7285	.1325	.9895	.1533	.7075	.4347	35
36	.4254	.7167	.1442	.9987	.1415	.7194	.4227	42
43	.4375	.7046	.1562	.9865	.1295	.7316	.4104	49
50	.4497	.6922	.1685	.9741	.1173	.7440	.3979	56
57	.4622	.6797	.1810	.9615	.1050	.7566	.3853	63
64	.4748	.6671	.1935	.9489	.0927	.7692	.3727	70
71	.4874	.6544	.2061	.9362	.0805	.7819	.3600	77
78	.5001	.6416	.2188	.9235	.0684	.7947	.3472	84
85	.5129	.6289	.2315	.9107	.0565	.8074	.3345	91
92	.5257	.6161	.2442	.8979	.0451	.8202	.3217	98
99	.5385	.6033	.2570	.8851	.0347	.8331	.3089	105
106	.5513	.5905	.2698	.8723	.0265	.8459	.2961	112
113	.5641	.5776	.2826	.8594	.0000	.8588	.2833	119
120	.5770	.5648	.2954	.8466	.0262	.8716	.2704	126
127	.5898	.5519	.3083	.8337	.0343	.8845	.2576	133
134	.6027	.5390	.3211	.8208	.0447	.8974	.2448	140
141	.6156	.5261	.3340	.8079	.0561	.9103	.2319	147
148	.6284	.5133	.3468	.7950	.0681	.9231	.2191	154
155	.6413	.5004	.3597	.7821	.0804	.9360	.2063	161
162	.6542	.4875	.3726	.7692	.0928	.9489	.1934	168
169	.6671	.4746	.3855	.7563	.1054	.9618	.1806	175
176	.6800	.4617	.3984	.7434	.1180	.9748	.1678	182
183	.6929	.4488	.4112	.7305	.1307	.9877	.1551	189
190	.7058	.4359	.4241	.7176	.1434	.9994	.1423	196
197	.7188	.4230	.4370	.7047	.1562	.9865	.1296	203
204	.7317	.4101	.4500	.6918	.1690	.9736	.1169	210
211	.7446	.3972	.4629	.6789	.1818	.9607	.1042	217

ТАБЛИЦА 6. Приращение элементов таблицы 5 по столбцам, $k = 15, \dots, 217$.

n	$\Delta\psi_n$	$\Delta\psi_{n+1}$	$\Delta\psi_{n+2}$	$\Delta\psi_{n+3}$	$\Delta\psi_{n+4}$	$\Delta\psi_{n+5}$	$\Delta\psi_{n+6}$	$n+6$
15	-.0097	.0006	.0047	.0030	-.0037	.0053	-.0076	21
22	.0074	-.0089	.0098	.0094	-.0096	.0099	-.0106	28
29	.0105	-.0109	.0112	.0111	-.0112	.0113	-.0116	35
36	.0115	-.0118	.0119	.0092	-.0119	.0119	-.0121	42
43	.0120	-.0122	.0122	-.0122	-.0122	.0122	-.0123	49
50	.0123	-.0124	.0124	-.0124	-.0124	.0124	-.0125	56
57	.0125	-.0125	.0125	-.0125	-.0126	.0126	-.0126	63
64	.0126	-.0126	.0126	-.0126	-.0126	.0126	-.0127	70
71	.0127	-.0127	.0127	-.0127	-.0127	.0127	-.0127	77
78	.0127	-.0127	.0127	-.0127	-.0127	.0128	-.0128	84
85	.0128	-.0128	.0128	-.0128	-.0128	.0128	-.0128	91
92	.0128	-.0128	.0128	-.0128	-.0128	.0128	-.0128	98
99	.0128	-.0128	.0128	-.0128	-.0128	.0128	-.0128	105
106	.0128	-.0128	.0128	-.0128	-.0129	.0128	-.0129	112
113	.0128	-.0129	.0129	-.0129	-.0131	.0129	-.0129	119
120	.0129	-.0129	.0129	-.0129	.0125	.0129	-.0129	126
127	.0129	-.0129	.0129	-.0129	.0129	.0129	-.0129	133
134	.0129	-.0129	.0129	-.0129	.0129	.0129	-.0129	140
141	.0129	-.0129	.0129	-.0129	.0129	.0129	-.0129	147
148	.0129	-.0129	.0129	-.0129	.0129	.0129	-.0129	154
155	.0129	-.0129	.0129	-.0129	.0129	.0129	-.0129	161
162	.0129	-.0129	.0129	-.0129	.0129	.0129	-.0129	168
169	.0129	-.0129	.0129	-.0129	.0129	.0129	-.0129	175
176	.0129	-.0129	.0129	-.0129	.0129	.0129	-.0129	182
183	.0129	-.0129	.0129	-.0129	.0129	.0129	-.0129	189
190	.0129	-.0129	.0129	-.0129	.0129	.0118	-.0129	196
197	.0129	-.0129	.0129	-.0129	.0129	-.0129	-.0129	203
204	.0129	-.0129	.0129	-.0129	.0129	-.0129	-.0129	210
211	.0129	-.0129	.0129	-.0129	.0129	-.0129	-.0129	217

ТАБЛИЦА 8. В таблице представлены значения $\cos(2k\beta + 2\alpha)$, вычисленные для $k = 1, \dots, 217$ при $\beta = \varphi_1 + \varphi_2 = 89\pi/156$ и $\alpha = \pi/4$, а в следующей таблице 9 – разность между соответствующими значениями ψ_k и $\cos(2k\beta + 2\alpha)$ из таблиц 5 и 8.

n								$n + 6$
1	.3590	.7821	.0769	.9359	.2051	.6538	.4872	7
8	.3718	.7692	.0897	.9487	.1923	.6667	.4744	14
15	.3846	.7564	.1026	.9615	.1795	.6795	.4615	21
22	.3974	.7436	.1154	.9744	.1667	.6923	.4487	28
29	.4103	.7308	.1282	.9872	.1538	.7051	.4359	35
36	.4231	.7179	.1410	1.0000	.1410	.7179	.4231	42
43	.4359	.7051	.1538	.9872	.1282	.7308	.4103	49
50	.4487	.6923	.1667	.9744	.1154	.7436	.3974	56
57	.4615	.6795	.1795	.9615	.1026	.7564	.3846	63
64	.4744	.6667	.1923	.9487	.0897	.7692	.3718	70
71	.4872	.6538	.2051	.9359	.0769	.7821	.3590	77
78	.5000	.6410	.2179	.9231	.0641	.7949	.3462	84
85	.5128	.6282	.2308	.9103	.0513	.8077	.3333	91
92	.5256	.6154	.2436	.8974	.0385	.8205	.3205	98
99	.5385	.6026	.2564	.8846	.0256	.8333	.3077	105
106	.5513	.5897	.2692	.8718	.0128	.8462	.2949	112
113	.5641	.5769	.2821	.8590	.0000	.8590	.2821	119
120	.5769	.5641	.2949	.8462	.0128	.8718	.2692	126
127	.5897	.5513	.3077	.8333	.0256	.8846	.2564	133
134	.6026	.5385	.3205	.8205	.0385	.8974	.2436	140
141	.6154	.5256	.3333	.8077	.0513	.9103	.2308	147
148	.6282	.5128	.3462	.7949	.0641	.9231	.2179	154
155	.6410	.5000	.3590	.7821	.0769	.9359	.2051	161
162	.6538	.4872	.3718	.7692	.0897	.9487	.1923	168
169	.6667	.4744	.3846	.7564	.1026	.9615	.1795	175
176	.6795	.4615	.3974	.7436	.1154	.9744	.1667	182
183	.6923	.4487	.4103	.7308	.1282	.9872	.1538	189
190	.7051	.4359	.4231	.7179	.1410	1.0000	.1410	196
197	.7179	.4231	.4359	.7051	.1538	.9872	.1282	203
204	.7308	.4103	.4487	.6923	.1667	.9744	.1154	210
211	.7436	.3974	.4615	.6795	.1795	.9615	.1026	217

ТАБЛИЦА 9. В таблице представлены разности между соответствующими значениями ψ_k и $\cos(2k\beta + 2\alpha)$ из таблиц 5 и 8.

1	-.35897	-.78205	.14879	.03553	-.10870	.05882	-.03398	7
8	.03399	-.02164	.01748	.01732	-.01475	.01436	-.00990	14
15	.01145	-.00818	.00927	.00746	-.00562	.00683	-.00468	21
22	.00605	-.00420	.00603	.00403	-.00232	.00388	-.00242	28
29	.00367	-.00231	.00426	.00233	-.00058	.00235	-.00118	35
36	.00236	-.00124	.00315	-.00133	.00051	.00143	-.00041	42
43	.00156	-.00057	.00240	-.00070	.00129	.00085	.00010	49
50	.00103	-.00012	.00187	-.00029	.00191	.00045	.00045	56
57	.00067	.00018	.00149	.00000	.00246	.00019	.00069	63
64	.00042	.00039	.00120	.00019	.00299	.00000	.00087	70
71	.00025	.00053	.00099	.00032	.00357	-.00012	.00099	77
78	.00013	.00062	.00084	.00040	.00428	-.00020	.00108	84
85	.00006	.00068	.00072	.00045	.00523	-.00025	.00113	91
92	.00001	.00071	.00064	.00048	.00665	-.00027	.00117	98
99	-.00001	.00072	.00059	.00048	.00906	-.00027	.00119	105
106	-.00001	.00071	.00056	.00047	.01366	-.00025	.00120	112
113	.00001	.00069	.00055	.00044	.00000	-.00022	.00120	119
120	.00003	.00066	.00055	.00040	.01337	-.00018	.00120	126
127	.00007	.00061	.00057	.00035	.00864	-.00013	.00119	133
134	.00012	.00056	.00059	.00029	.00622	-.00007	.00117	140
141	.00018	.00051	.00063	.00023	.00485	-.00001	.00116	147
148	.00024	.00045	.00068	.00016	.00400	.00006	.00115	154
155	.00031	.00038	.00073	.00008	.00344	.00014	.00114	161
162	.00038	.00031	.00079	.00000	.00306	.00022	.00114	168
169	.00046	.00024	.00085	-.00008	.00280	.00030	.00115	175
176	.00054	.00016	.00092	-.00016	.00261	.00039	.00117	182
183	.00063	.00008	.00099	-.00025	.00248	.00048	.00121	189
190	.00072	.00000	.00107	-.00034	.00240	-.00058	.00126	196
197	.00081	-.00008	.00115	-.00044	.00235	-.00067	.00135	203
204	.00090	-.00016	.00124	-.00053	.00232	-.00077	.00148	210
211	.00100	-.00024	.00132	-.00063	.00231	-.00087	.00166	217

ТАБЛИЦА 10. В таблице представлены координаты лежащего во втором квадранте полюса $p(n) = u_n + iv_n = R_n e^{i\beta_n}$ аппроксимаций Паде $\{[n/2]_\nu\}$ – второй строки таблицы Паде функции частоты ν , для $n = 171, \dots, 217$. Точнее, 1-й столбец – это x -координата u_n этого полюса, 2-й столбец – его y -координата v_n , 3-й столбец – величина радиуса R_n , 4-й столбец – аргумент β_n , $\pi/2 < \beta_n < \pi$. Кроме этого в таблице представлены: разность $R_n - R$ (5-й столбец) и разность $\beta_n - \beta$ (6-й столбец) при $R = 3.42$, $\beta = 1.79232$.

n	u_n	v_n	R_n	β_n	Δy_n	$R_n - R$	$\beta_n - \beta$
171	-.75802	3.36607	3.45037	1.79230	.0000216	.0303661	.0000232
172	-.75800	3.36573	3.45002	1.79231	.0003457	.0300243	.0000071
173	-.75802	3.36572	3.45002	1.79232	.0000053	.0300231	.0000015
174	-.75786	3.36543	3.44971	1.79229	.0002892	.0297061	.0000281
175	-.75798	3.36532	3.44963	1.79233	.0001074	.0296280	-.0000131
176	-.75778	3.36518	3.44944	1.79228	.0001475	.0294392	.0000354
177	-.75788	3.36493	3.44922	1.79233	.0002465	.0292218	-.0000101
178	-.75775	3.36491	3.44917	1.79229	.0000235	.0291708	.0000246
179	-.75774	3.36459	3.44886	1.79231	.0003182	.0288576	.0000079
180	-.75775	3.36458	3.44886	1.79231	.0000029	.0288571	.0000046
181	-.75761	3.36431	3.44856	1.79229	.0002715	.0285610	.0000276
182	-.75772	3.36422	3.44849	1.79233	.0000934	.0284940	-.0000095
183	-.75753	3.36408	3.44831	1.79228	.0001426	.0283133	.0000350
184	-.75763	3.36385	3.44812	1.79233	.0002226	.0281182	-.0000075
185	-.75751	3.36383	3.44807	1.79229	.0000253	.0280665	.0000257
186	-.75750	3.36354	3.44778	1.79231	.0002936	.0277788	.0000087
187	-.75750	3.36353	3.44778	1.79231	.0000011	.0277787	.0000074
188	-.75738	3.36328	3.44750	1.79229	.0002555	.0275015	.0000271
189	-.75748	3.36320	3.44744	1.79233	.0000812	.0274442	-.0000062
190	-.75730	3.36306	3.44727	1.79228	.0001380	.0272709	.0000347
191	-.75740	3.36286	3.44710	1.79232	.0002014	.0270955	-.0000052
192	-.75728	3.36283	3.44704	1.79229	.0000269	.0270431	.0000267
193	-.75728	3.36256	3.44678	1.79231	.0002714	.0267784	.0000094
194	-.75728	3.36256	3.44678	1.79231	-.0000003	.0267784	.0000098
195	-.75716	3.36232	3.44652	1.79229	.0002408	.0265184	.0000267
196	-.75725	3.36225	3.44647	1.79232	.0000705	.0264694	-.0000033
197	-.75709	3.36212	3.44630	1.79228	.0001338	.0263030	.0000344
198	-.75718	3.36193	3.44615	1.79232	.0001825	.0261450	-.0000031
199	-.75707	3.36190	3.44609	1.79229	.0000284	.0260921	.0000276
200	-.75707	3.36165	3.44585	1.79231	.0002514	.0258480	.0000101
201	-.75707	3.36165	3.44585	1.79231	-.0000013	.0258479	.0000119
202	-.75696	3.36143	3.44560	1.79229	.0002274	.0256036	.0000263
203	-.75704	3.36137	3.44556	1.79232	.0000612	.0255618	-.0000007
204	-.75689	3.36124	3.44540	1.79228	.0001297	.0254019	.0000341
205	-.75698	3.36107	3.44526	1.79232	.0001656	.0252595	-.0000011
206	-.75687	3.36104	3.44521	1.79229	.0000298	.0252061	.0000283
207	-.75688	3.36081	3.44498	1.79231	.0002332	.0249807	.0000107
208	-.75687	3.36081	3.44498	1.79231	-.0000019	.0249803	.0000139
209	-.75678	3.36059	3.44475	1.79229	.0002151	.0247504	.0000260
210	-.75685	3.36054	3.44471	1.79232	.0000531	.0247148	.0000017
211	-.75671	3.36042	3.44456	1.79229	.0001259	.0245609	.0000338
212	-.75679	3.36026	3.44443	1.79232	.0001504	.0244324	.0000007
213	-.75669	3.36023	3.44438	1.79229	.0000311	.0243786	.0000289
214	-.75670	3.36002	3.44417	1.79231	.0002166	.0241702	.0000113
215	-.75668	3.36002	3.44417	1.79230	-.0000023	.0241693	.0000156
216	-.75660	3.35982	3.44395	1.79229	.0002037	.0239527	.0000257
217	-.75667	3.35977	3.44392	1.79232	.0000460	.0239225	.0000038

Таблица 11. Приращение x -координаты полюса $\Delta u_n = u_n - u_{n+2}$.

n	Δu_n	Δu_{n+1}	Δu_{n+2}	Δu_{n+3}	Δu_{n+4}	Δu_{n+5}	Δu_{n+6}	$n + 6$
8	.035872	.131113	.017434	.059615	.024858	.021639	.029304	14
15	.005113	.025795	.002520	.017023	.006298	.007822	.010161	21
22	.002021	.010806	.000776	.008144	.002640	.004149	.005019	28
29	.001136	.005901	.000327	.004798	.001378	.002611	.002939	35
36	.000754	.003700	.000165	.003173	.000813	.001815	.001904	42
43	.000551	.002526	.000095	.002259	.000519	.001346	.001317	49
50	.000429	.001828	.000060	.001693	.000349	.001045	.000955	56
57	.000349	.001379	.000042	.001317	.000244	.000840	.000717	63
64	.000294	.001073	.000032	.001055	.000175	.000693	.000553	70
71	.000253	.000856	.000026	.000864	.000128	.000583	.000435	77
78	.000222	.000697	.000023	.000721	.000095	.000500	.000348	84
85	.000198	.000576	.000021	.000611	.000071	.000434	.000282	91
92	.000178	.000483	.000020	.000524	.000054	.000381	.000232	98
99	.000162	.000409	.000020	.000454	.000041	.000338	.000192	105
106	.000149	.000350	.000020	.000397	.000031	.000302	.000160	112
113	.000138	.000302	.000020	.000350	.000024	.000273	.000134	119
120	.000128	.000262	.000020	.000310	.000018	.000247	.000113	126
127	.000120	.000229	.000020	.000277	.000014	.000225	.000096	133
134	.000113	.000201	.000021	.000249	.000010	.000206	.000082	140
141	.000107	.000177	.000021	.000224	.000008	.000190	.000070	147
148	.000101	.000157	.000021	.000203	.000006	.000175	.000060	154
155	.000096	.000139	.000022	.000184	.000004	.000162	.000051	161
162	.000091	.000124	.000022	.000168	.000003	.000151	.000044	168
169	.000087	.000111	.000022	.000153	.000002	.000141	.000038	175
176	.000083	.000099	.000023	.000141	.000002	.000131	.000032	182
183	.000080	.000089	.000023	.000129	.000001	.000123	.000028	189
190	.000076	.000080	.000023	.000119	.000001	.000115	.000024	196
197	.000073	.000072	.000023	.000109	.000001	.000108	.000020	203
204	.000070	.000065	.000024	.000101	.000001	.000102	.000017	210
211	.000068	.000059	.000024	.000093	.000001	.000096	.000015	217

ТАБЛИЦА 12. Приближенные значения для величины радиуса R , вычисленные по уточняющей формуле (43): $R \approx \sqrt{\Delta_n}$,

$$\Delta_n = R^2 \left(1 - \frac{2(\gamma + 1)}{n + 1} \frac{\sin 7\beta \cdot \cos((2n + 8)\beta + 2\alpha)}{7 \sin \beta} \right) + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

n	$\sqrt{\Delta_n}$	$\sqrt{\Delta_{n+1}}$	$\sqrt{\Delta_{n+2}}$	$\sqrt{\Delta_{n+3}}$	$\sqrt{\Delta_{n+4}}$	$\sqrt{\Delta_{n+5}}$	$\sqrt{\Delta_{n+6}}$	$n + 6$
8	3.2520	3.3476	3.3047	3.3644	3.3497	3.3652	3.3795	14
15	3.3684	3.3934	3.3780	3.3962	3.3905	3.3948	3.4009	21
22	3.3948	3.4062	3.3982	3.4069	3.4038	3.4056	3.4089	28
29	3.4051	3.4116	3.4067	3.4117	3.4098	3.4107	3.4128	35
36	3.4102	3.4144	3.4111	3.4144	3.4130	3.4135	3.4150	42
43	3.4131	3.4160	3.4136	3.4159	3.4149	3.4153	3.4163	49
50	3.4149	3.4170	3.4152	3.4169	3.4162	3.4164	3.4172	56
57	3.4161	3.4177	3.4163	3.4176	3.4170	3.4172	3.4178	63
64	3.4169	3.4182	3.4170	3.4181	3.4176	3.4177	3.4182	70
71	3.4175	3.4186	3.4176	3.4185	3.4180	3.4182	3.4186	77
78	3.4179	3.4188	3.4180	3.4188	3.4184	3.4185	3.4188	84
85	3.4183	3.4191	3.4183	3.4190	3.4186	3.4187	3.4190	91
92	3.4185	3.4192	3.4186	3.4192	3.4189	3.4189	3.4192	98
99	3.4188	3.4194	3.4188	3.4193	3.4190	3.4191	3.4193	105
106	3.4189	3.4195	3.4190	3.4194	3.4192	3.4192	3.4194	112
113	3.4191	3.4195	3.4191	3.4195	3.4193	3.4193	3.4195	119
120	3.4192	3.4196	3.4192	3.4196	3.4194	3.4194	3.4196	126
127	3.4193	3.4197	3.4193	3.4197	3.4195	3.4195	3.4196	133
134	3.4194	3.4197	3.4194	3.4197	3.4195	3.4196	3.4197	140
141	3.4195	3.4198	3.4195	3.4198	3.4196	3.4196	3.4197	147
148	3.4195	3.4198	3.4195	3.4198	3.4196	3.4197	3.4198	154
155	3.4196	3.4199	3.4196	3.4198	3.4197	3.4197	3.4198	161
162	3.4196	3.4199	3.4196	3.4199	3.4197	3.4198	3.4198	168
169	3.4197	3.4199	3.4197	3.4199	3.4197	3.4198	3.4199	175
176	3.4197	3.4199	3.4197	3.4199	3.4198	3.4198	3.4199	182
183	3.4198	3.4200	3.4197	3.4199	3.4198	3.4199	3.4199	189
190	3.4198	3.4200	3.4198	3.4200	3.4198	3.4199	3.4199	196
197	3.4198	3.4200	3.4198	3.4200	3.4198	3.4199	3.4199	203
204	3.4198	3.4200	3.4198	3.4200	3.4199	3.4199	3.4200	210

ТАБЛИЦА 13. Приближенные значения для величины γ , вычисленные по формуле

$$\gamma = \left(\frac{R_n}{R} - 1 \right) n - 1 + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

n								$n + 6$
8	.719403	.513776	.683371	.527613	.607517	.575816	.538322	14
15	.607774	.507196	.601474	.517440	.565448	.548362	.525624	21
22	.571959	.505649	.571128	.512589	.548256	.535232	.520233	28
29	.554082	.505093	.555283	.509946	.538988	.527682	.517382	35
36	.543460	.504952	.545622	.508388	.533267	.522859	.515708	42
43	.536479	.505018	.539164	.507434	.529437	.519567	.514675	49
50	.531582	.505203	.534578	.506849	.526732	.517218	.514027	56
57	.527988	.505462	.531180	.506506	.524750	.515492	.513628	63
64	.525265	.505768	.528584	.506330	.523261	.514200	.513400	70
71	.523150	.506108	.526554	.506276	.522123	.513222	.513293	77
78	.521479	.506471	.524938	.506310	.521241	.512479	.513275	84
85	.520142	.506854	.523637	.506414	.520554	.511914	.513324	91
92	.519061	.507246	.522575	.506571	.520018	.511493	.513425	98
99	.518183	.507650	.521704	.506771	.519601	.511183	.513567	105
106	.517468	.508062	.520987	.507005	.519279	.510966	.513739	112
113	.516882	.508482	.520397	.507269	.519035	.510825	.513939	119
120	.516407	.508903	.519906	.507556	.518855	.510748	.514159	126
127	.516023	.509329	.519503	.507863	.518729	.510724	.514397	133
134	.515717	.509758	.519174	.508188	.518647	.510747	.514649	140
141	.515477	.510188	.518906	.508527	.518604	.510809	.514913	147
148	.515293	.510621	.518692	.508878	.518593	.510906	.515186	154
155	.515159	.511054	.518524	.509241	.518610	.511032	.515468	161
162	.515069	.511488	.518397	.509613	.518652	.511186	.515756	168
169	.515016	.511923	.518306	.509994	.518715	.511363	.516050	175
176	.514998	.512358	.518247	.510382	.518797	.511561	.516349	182
183	.515011	.512792	.518215	.510776	.518894	.511778	.516653	189
190	.515050	.513226	.518208	.511176	.519006	.512012	.516958	196
197	.515113	.513659	.518224	.511582	.519132	.512262	.517267	203
204	.515199	.514092	.518261	.511992	.519269	.512525	.517578	210
211	.515305	.514523	.518316	.512406	.519416	.512802	.517891	217

ТАБЛИЦА 14. Приближенные значения для величины R , вычисленные по формуле (e41) при $\gamma = 1/2$.

n								$n + 6$
1	.00000	4.51777	4.76839	3.71311	3.73244	3.62835	3.50939	7
8	3.56646	3.46164	3.50638	3.46229	3.46108	3.46712	3.43728	14
15	3.46222	3.43187	3.44919	3.43595	3.43537	3.44032	3.42689	21
22	3.43986	3.42534	3.43464	3.42817	3.42806	3.43121	3.42369	28
29	3.43153	3.42299	3.42886	3.42491	3.42504	3.42707	3.42233	35
36	3.42755	3.42191	3.42599	3.42326	3.42350	3.42487	3.42165	42
43	3.42535	3.42134	3.42436	3.42232	3.42261	3.42355	3.42125	49
50	3.42400	3.42100	3.42334	3.42174	3.42205	3.42271	3.42100	56
57	3.42312	3.42078	3.42266	3.42135	3.42168	3.42214	3.42084	63
64	3.42251	3.42064	3.42218	3.42109	3.42141	3.42174	3.42072	70
71	3.42206	3.42054	3.42183	3.42090	3.42121	3.42144	3.42064	77
78	3.42174	3.42047	3.42157	3.42076	3.42106	3.42122	3.42058	84
85	3.42149	3.42042	3.42137	3.42065	3.42095	3.42104	3.42053	91
92	3.42129	3.42038	3.42121	3.42057	3.42086	3.42091	3.42049	98
99	3.42113	3.42035	3.42108	3.42050	3.42078	3.42080	3.42046	105
106	3.42101	3.42033	3.42097	3.42045	3.42072	3.42071	3.42044	112
113	3.42090	3.42031	3.42088	3.42041	3.42067	3.42064	3.42042	119
120	3.42082	3.42030	3.42081	3.42038	3.42063	3.42058	3.42040	126
127	3.42075	3.42029	3.42075	3.42035	3.42059	3.42053	3.42038	133
134	3.42068	3.42028	3.42069	3.42033	3.42056	3.42049	3.42037	140
141	3.42063	3.42027	3.42065	3.42031	3.42053	3.42045	3.42036	147
148	3.42059	3.42026	3.42061	3.42029	3.42050	3.42042	3.42035	154
155	3.42055	3.42026	3.42057	3.42028	3.42048	3.42040	3.42034	161
162	3.42051	3.42025	3.42054	3.42027	3.42046	3.42037	3.42033	168
169	3.42048	3.42025	3.42051	3.42026	3.42045	3.42035	3.42033	175
176	3.42046	3.42025	3.42049	3.42025	3.42043	3.42034	3.42032	182
183	3.42043	3.42024	3.42047	3.42024	3.42042	3.42032	3.42032	189
190	3.42041	3.42024	3.42045	3.42024	3.42040	3.42031	3.42031	196
197	3.42039	3.42024	3.42043	3.42023	3.42039	3.42030	3.42031	203
204	3.42038	3.42024	3.42041	3.42023	3.42038	3.42028	3.42030	210
211	3.42036	3.42024	3.42040	3.42022	3.42037	3.42028	3.42030	217

ТАБЛИЦА 15. В таблице представлены величины r_n , v_n и w_n , вычисленные соответственно по формулам (45), (46) и (47). Сравнение численных значений, найденные для s_n по “уточняющей” формуле (46), в которой участвует величина $\cos(2(n+1)\beta + \alpha)$ при $\beta = \varphi_1 + \varphi_2$, $\alpha = \pi/4$, и w_n по формуле (47), показывает следующее. Уточнение найденной по формуле (45) величины $r_n \approx 1$ с помощью формулы (46) для s_n всегда приводит к более точному результату, чем использование более грубой формулы (47) для w_n .

n	r_n	s_n	w_n
171	1.00002911	1.00001026	.99996150
172	1.00019817	1.00006796	1.00013134
173	1.00000067	1.00000018	.99993461
174	1.00018382	1.00006332	1.00011851
175	1.00004531	1.00001525	.99998074
176	1.00010946	1.00003793	1.00004562
177	1.00012602	1.00004291	1.00006290
178	1.00002959	1.00001041	.99996717
179	1.00018165	1.00006220	1.00011992
180	1.00000026	1.00000006	.99993921
181	1.00017176	1.00005909	1.00011138
182	1.00003883	1.00001303	.99997911
183	1.00010482	1.00003627	1.00004575
184	1.00011318	1.00003848	1.00005474
185	1.00003001	1.00001054	.99997220
186	1.00016688	1.00005707	1.00010968
187	1.00000005	1.00000000	.99994346
188	1.00016082	1.00005526	1.00010483
189	1.00003325	1.00001113	.99997784
190	1.00010054	1.00003475	1.00004571
191	1.00010179	1.00003456	1.00004754
192	1.00003039	1.00001066	.99997670
193	1.00015361	1.00005246	1.00010047
194	1.00000000	1.00000000	.99994740
195	1.00015088	1.00005178	1.00009882
196	1.00002843	1.00000949	.99997690
197	1.00009657	1.00003335	1.00004556
198	1.00009167	1.00003106	1.00004117
199	1.00003072	1.00001075	.99998072
200	1.00014165	1.00004832	1.00009215
201	1.00000008	1.00000004	.99995106
202	1.00014179	1.00004861	1.00009326
203	1.00002426	1.00000807	.99997620
204	1.00009287	1.00003204	1.00004528
205	1.00008265	1.00002796	1.00003552
206	1.00003100	1.00001084	.99998432
207	1.00013083	1.00004457	1.00008460
208	1.00000026	1.00000011	.99995448
209	1.00013346	1.00004571	1.00008811
210	1.00002065	1.00000685	.99997573
211	1.00008941	1.00003082	1.00004491
212	1.00007459	1.00002519	1.00003051
213	1.00003124	1.00001091	.99998757
214	1.00012101	1.00004117	1.00007774
215	1.00000053	1.00000021	.99995766
216	1.00012580	1.00004304	1.00008333
217	1.00001752	1.00000579	.99997544

Таблица 16.

8	-.966156	-.933664	-.927752	-.898338	-.898277	-.879511	-.875425	14
15	-.867394	-.858877	-.857330	-.847824	-.847788	-.840666	-.838992	21
22	-.835525	-.831684	-.830933	-.826260	-.826247	-.822474	-.821595	28
29	-.819628	-.817463	-.817002	-.814221	-.814217	-.811862	-.811330	35
36	-.810044	-.808658	-.808338	-.806486	-.806486	-.804863	-.804511	42
43	-.803593	-.802630	-.802390	-.801062	-.801063	-.799867	-.799619	49
50	-.798923	-.798214	-.798024	-.797020	-.797022	-.796096	-.795914	56
57	-.795362	-.794817	-.794661	-.793871	-.793874	-.793130	-.792991	63
64	-.792539	-.792106	-.791974	-.791332	-.791335	-.790721	-.790612	70
71	-.790231	-.789877	-.789763	-.789228	-.789231	-.788712	-.788625	77
78	-.788297	-.788002	-.787901	-.787446	-.787450	-.787001	-.786930	84
85	-.786643	-.786393	-.786302	-.785908	-.785912	-.785519	-.785460	91
92	-.785205	-.784988	-.784906	-.784561	-.784564	-.784214	-.784166	98
99	-.783935	-.783746	-.783670	-.783363	-.783367	-.783052	-.783011	105
106	-.782800	-.782634	-.782563	-.782287	-.782291	-.782004	-.781970	112
113	-.781776	-.781627	-.781560	-.781310	-.781314	-.781051	-.781022	119
120	-.780841	-.780708	-.780645	-.780416	-.780419	-.780175	-.780151	126
127	-.779982	-.779861	-.779801	-.779590	-.779594	-.779366	-.779346	133
134	-.779186	-.779076	-.779018	-.778823	-.778826	-.778613	-.778596	140
141	-.778444	-.778344	-.778287	-.778105	-.778108	-.777907	-.777893	147
148	-.777748	-.777656	-.777601	-.777431	-.777433	-.777242	-.777231	154
155	-.777091	-.777007	-.776953	-.776793	-.776796	-.776613	-.776605	161
162	-.776470	-.776392	-.776339	-.776188	-.776190	-.776016	-.776009	168
169	-.775878	-.775807	-.775754	-.775611	-.775613	-.775446	-.775441	175
176	-.775314	-.775247	-.775195	-.775059	-.775061	-.774900	-.774897	182
183	-.774772	-.774711	-.774658	-.774530	-.774531	-.774375	-.774374	189
190	-.774252	-.774195	-.774143	-.774020	-.774020	-.773870	-.773870	196
197	-.773751	-.773698	-.773645	-.773528	-.773528	-.773382	-.773383	203
204	-.773266	-.773217	-.773164	-.773052	-.773051	-.772910	-.772912	210
211	-.772796	-.772751	-.772698	-.772590	-.772589	-.772451	-.772455	217

$$\gamma = .50, \alpha = .25$$

Таблица 17.

8	-4.188171	2.377533	2.042038	1.317599	1.319774	1.167973	1.150337	14
15	1.113861	1.087074	1.082141	1.059580	1.059554	1.046208	1.043425	21
22	1.038142	1.032697	1.031768	1.026099	1.026071	1.022118	1.021175	28
29	1.019395	1.017396	1.017051	1.014787	1.014775	1.013072	1.012652	35
36	1.011832	1.010887	1.010718	1.009590	1.009585	1.008696	1.008476	42
43	1.008028	1.007511	1.007413	1.006772	1.006769	1.006246	1.006118	49
50	1.005845	1.005532	1.005471	1.005071	1.005070	1.004736	1.004655	56
57	1.004477	1.004274	1.004232	1.003967	1.003966	1.003740	1.003686	63
64	1.003562	1.003423	1.003393	1.003208	1.003208	1.003047	1.003010	70
71	1.002921	1.002821	1.002799	1.002665	1.002665	1.002547	1.002520	77
78	1.002453	1.002380	1.002363	1.002263	1.002263	1.002174	1.002153	84
85	1.002102	1.002047	1.002034	1.001957	1.001957	1.001887	1.001872	91
92	1.001832	1.001789	1.001778	1.001718	1.001718	1.001663	1.001651	98
99	1.001619	1.001585	1.001577	1.001528	1.001528	1.001485	1.001475	105
106	1.001449	1.001421	1.001415	1.001375	1.001375	1.001340	1.001332	112
113	1.001311	1.001288	1.001283	1.001250	1.001250	1.001221	1.001214	119
120	1.001197	1.001178	1.001173	1.001146	1.001146	1.001122	1.001116	126
127	1.001102	1.001085	1.001082	1.001059	1.001059	1.001038	1.001033	133
134	1.001022	1.001008	1.001005	1.000985	1.000985	1.000968	1.000963	140
141	1.000953	1.000941	1.000939	1.000922	1.000922	1.000907	1.000903	147
148	1.000895	1.000884	1.000883	1.000868	1.000868	1.000855	1.000852	154
155	1.000845	1.000835	1.000834	1.000821	1.000821	1.000810	1.000807	161
162	1.000801	1.000792	1.000791	1.000780	1.000780	1.000770	1.000767	168
169	1.000762	1.000755	1.000754	1.000744	1.000744	1.000735	1.000733	175
176	1.000728	1.000722	1.000721	1.000712	1.000712	1.000705	1.000702	182
183	1.000698	1.000692	1.000692	1.000684	1.000684	1.000677	1.000675	189
190	1.000672	1.000666	1.000666	1.000658	1.000659	1.000653	1.000651	196
197	1.000648	1.000643	1.000643	1.000636	1.000637	1.000631	1.000629	203
204	1.000627	1.000622	1.000622	1.000616	1.000617	1.000611	1.000610	210
211	1.000608	1.000603	1.000604	1.000597	1.000598	1.000594	1.000592	217

$$\gamma = .50, \alpha = .25$$

k	a_{2k}
52	+ .4439444361230797906271570635478979383379 D -32
53	+ .1054517997907321146493843578375426194954 D -31
54	- .1677425201390193357483866976993104389786 D -32
55	- .6433936283225883243769517163301836183096 D -33
56	+ .2163860197796040772637237772114799649906 D -33
57	+ .2506559005864792207738833020097878415665 D -34
58	- .2069859400635281582425807131098188516704 D -34
59	+ .5581840556157548391165401066722517658775 D -36
60	+ .1612553610142348531087269551839455872492 D -35
61	- .2476560226077470646056211616296155807231 D -36
62	- .1002223829326054693887600940688338550243 D -36
63	+ .3275911246439634074240168498792103558454 D -37
64	+ .4059555634623802914420186924441530766671 D -38
65	- .3183189203176288681696765828012271683457 D -38
66	+ .6842563548137113459251875214331517308585 D -40
67	+ .2515275457866014185078014981870735540583 D -39
68	- .3721790228965352699257997159168798518199 D -40
69	- .1590112798765618303169376164892233633987 D -40
70	+ .5047655601240989723342860807245269771395 D -41
71	+ .6675851484227278121373953391243324963278 D -42
72	- .4978196742311767488871680960636170469803 D -42
73	+ .7919102224423710419110253714090939798095 D -44
74	+ .3985896276200512036448815234650740142019 D -43
75	- .5671306090537977715711567891777454930342 D -44
76	- .2560181742613880102125763534622239545474 D -44
77	+ .7888575598390648876520048404596016159892 D -45
78	+ .1111119709385713551411470550357459139251 D -45
79	- .7892054316288399503631667475638595133828 D -46
80	+ .8064559432117312305322816576214303424883 D -48
81	+ .6398305168139058535220605716077586199925 D -47
82	- .8737690721328682576407853738269101440915 D -48
83	- .4171789010655168535340851140139161320094 D -48
84	+ .1247218913787539382090857755218337831244 D -48
85	+ .1867339361681106856109869553851538600361 D -49
86	- .1265278575902725772178965781695550968974 D -49
87	+ .5615724878952818680749777942291740957460 D -52
88	+ .1038119600526572072694334585803706544417 D -50
89	- .1358093607340220330308623974865813566098 D -51
90	- .6865911979608013453062628347636625402094 D -52
91	+ .1990993142265987401516892115379347185457 D -52
92	+ .3163250778340462674371936989057325714346 D -53
93	- .2047718753988151660356485365566274106266 D -53
94	- .2924827645471101653302500920691437953806 D -56
95	+ .1699563205470057462806609710717783164138 D -54
96	- .2125758093016793201552936789404927921698 D -55
97	- .1139500848148350526543457061768332448413 D -55
98	+ .3204154302985020657819978132100503043889 D -56
99	+ .5393995665871914203283839358264780634009 D -57
100	- .3340590741512379174987840783370596430578 D -57
101	- .2465226772852667637519449685215329279629 D -59
102	+ .2803855093238900585980192303913024779495 D -58
103	- .3345931632358809795780673312859940809476 D -59

k	a_{2k}
104	−.1904724528391729123849901599351023019531 D −59
105	+.5192085893763180490959719188561343537949 D −60
106	+.9249124458693387654728734709060014920620 D −61
107	−.5487195869995134335666833904849299898901 D −61
108	−.7361536322612256297151352099606738117396 D −63
109	+.4656270241355347735475289887315194217223 D −62
110	−.5289365283623858666784398328444375990302 D −63
111	−.3203450340942552167323607167460670889347 D −63
112	+.8462975867664994603121844662678191741936 D −64
113	+.1593469632680889611882592454354338628407 D −64
114	−.9066724389001867797410332380891167720224 D −65
115	−.1771542144788333005419432289653537856101 D −66
116	+.7776922457096201380344686452332310224051 D −66
117	−.8388895218703596534466334023201827451140 D −67
118	−.5416512316728439536604507358687422530224 D −67
119	+.1386438421132652063077512373312265774333 D −67
120	+.2756450375652299665980180920437430179226 D −68
121	−.1505887797370250185289278703284809229624 D −68
122	−.3877969206652561393778683124671078860020 D −70
123	+.1305428890117305939212002145391033665091 D −69
124	−.1333513356911432752558248029525928259751 D −70
125	−.9201249103312289258608245070360190194099 D −71
126	+.2281265325700536556636394163329700485384 D −71
127	+.4785013620571883003241033607354263609740 D −72
128	−.2512473790305448697228358228463396548546 D −72
129	−.8054807857416368696143405337736237436618 D −74
130	+.2200974494726106199272941393275092776015 D −73
131	−.2122684747142692056632430909249756368200 D −74
132	−.1569483602865135594738230127246766412991 D −74
133	+.3767866222891893562898020786792827344131 D −75
134	+.8331965108886830184428452814457361896751 D −76
135	−.4208670564993533163548125154143137736723 D −76
136	−.1618889178264080717843616895278641966180 D −77
137	+.3725412603598690417826038929324283384680 D −77
138	−.3380533546360151768780897781189437228762 D −78
139	−.2686863068690300591987447925517523582198 D −78
140	+.6243700166847374373116883874025505822325 D −79
141	+.1454721998020250015354807688442729391057 D −79
142	−.7074976825150361286690830350705570851159 D −80
143	−.3182086742615041392081994765144342988471 D −81
144	+.6327689960501127846796248005308463371392 D −81
145	−.5381581193789897213535434966650434950728 D −82
146	−.4614657569907352585021568135095291648820 D −82
147	+.1037591374529648773551092422945550858174 D −82
148	+.2545913522110687686259355196451694429951 D −83
149	−.1193086285593113898958189462600676994209 D −83
150	−.6156187623771894764860771344127340409095 D −85
151	+.10781215396299483404763110796642533232858 D −84
152	−.8555677499060827194939013579457293784246 D −86
153	−.7948586239053734073598195458769153473066 D −86
154	+.1728550539213579950448085072070877763414 D −86
155	+.4465003926260592243443419287511749516889 D −87

k	a_{2k}
156	−.2017614278183905960005446611364516395547 D −87
157	−.1177060518777955657756208533546862506207 D −88
158	+.1842060359375838832746233873687539107709 D −88
159	−.1356992950755323146338941918322590603257 D −89
160	−.1372677067187580964903860995090213052060 D −89
161	+.2885767060157763189600756052607678032722 D −90
162	+.7845396395004785023457386986070198276553 D −91
163	−.3420544505138786479461252265396493780545 D −91
164	−.2230381311800712334224077025702133736026 D −92
165	+.3155246693805735016297354496602523634886 D −92
166	−.2144765341615153987891007929636060723913 D −93
167	−.2376092651086564812774628460020354333721 D −93
168	+.4826483243753363855490685669961408029185 D −94
169	+.1380819363918621580883522106980118255807 D −94
170	−.5812058478539423554523298081206113775886 D −95
171	−.4196645858279128602452485717019199955450 D −96
172	+.5416898509421465788923400892314315392293 D −96
173	−.3373438522059072257751806994434337526586 D −97
174	−.4121708896340308270384433102722624156181 D −97
175	+.8084804193072228663213501771499081981971 D −98
176	+.2433959017916160702996491290870076907867 D −98
177	−.9895598208446828647341980970220171888350 D −99
178	−.7852100390684238690650384153147680424669 D −100
179	+.9318865538835926235722800635533472978890 D −100
180	−.5271534939603153629168258765364978926992 D −101
181	−.7163486249078218872788954394422148826665 D −101
182	+.1356018996045876691996326646861802361336 D −101
183	+.4296146265461050973695903228951730853143 D −102
184	−.1687881865715128034910278079385494204806 D −102
185	−.1462480736668863321217707421234934694658 D −103
186	+.1606156830354876208808273340927302858457 D −103
187	−.8166897091016719163965269766759013381867 D −105
188	−.1247179305304984319930488913520938641478 D −104
189	+.2276750993688553224187797740179378831164 D −105
190	+.7592367622661560248365501526994015897297 D −106
191	−.2883697425497391438393413821191086205479 D −106
192	−.2713726651405250987203903486620907161866 D −107
193	+.2773013326846502167279751693793611831903 D −107
194	−.1250887587360795038217926028728705386679 D −108
195	−.2174820211104381734509011797952868760399 D −108
196	+.3825784557337535861281560010084737275036 D −109
197	+.1343251952078334101717626962197126694932 D −109
198	−.4933924415036131383344027118524580003980 D −110
199	−.5019793837744791545785561078805469038586 D −111
200	+.4795007358643178010979764613469894719455 D −111
201	−.1886833012421342816005843746587733725430 D −112
202	−.3797936782502752796727716665747334128658 D −112
203	+.6432601626070618986683026242511863978088 D −113
204	+.2378894908395870328254574936070116602935 D −113
205	−.8452877837290269845524399626996633192719 D −114
206	−.9261130101469768162417766762676203683738 D −115
207	+.8303108419467441178112812117839520657224 D −115

k	a_{2k}
208	−.2786943304135703472620422911143825893820 D−116
209	−.6641224485021731407330256708869407989689 D−116
210	+.1081988767647838389410974573795734589137 D−116
211	+.4216876688156684281522618472276013364424 D−117
212	−.1449859072718527704407778059973044948843 D−117
213	−.1704793219152184810698821734366542860947 D−118
214	+.1439636123949422066598645642960570085730 D−118
215	−.3995024582576892546007298025135605826833 D−120
216	−.1162722827711520801473315802385269923633 D−119
217	+.1820283618578123488334234973710456356590 D−120
218	+.7481160474330680751132450205398697051948 D−121
219	−.2489434652133152267803399005335730010651 D−121
220	−.3132185502693025926962918836583928042926 D−122

§ 6. Рисунки

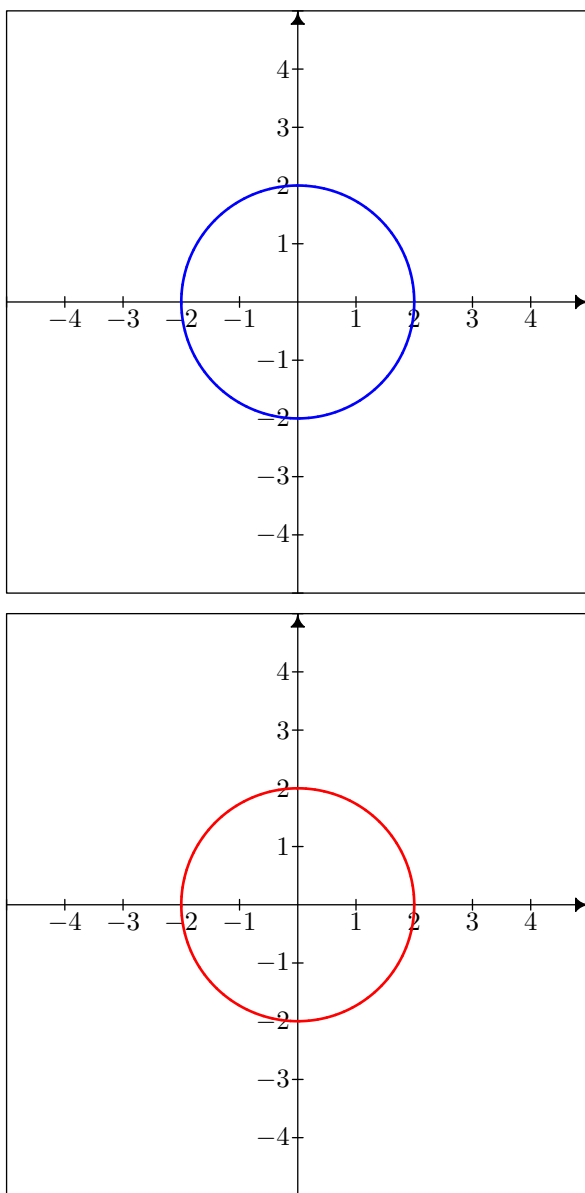


Рис. 1. а, б. Верхний рисунок – предельный цикл для свободного уравнения ван дер Поля $\frac{d^2U}{dt^2} + \varepsilon(U^2 - 1)\frac{dU}{dt} + U = 0$, $U = U(t; \varepsilon)$, в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 0$, построенный с помощью частичных сумм S_{80} ряда 18; Нижний рисунок – предельный цикл для уравнения ван дер Поля в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 0$, построенный с помощью диагональной аппроксимации Паде $[40/40]$ ряда 18.

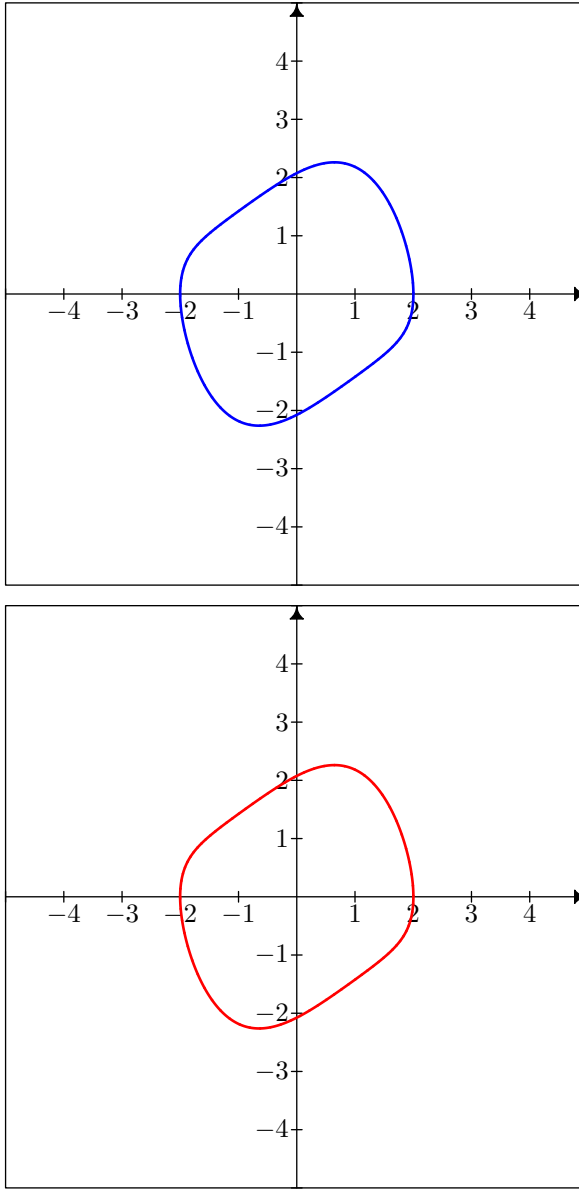


РИС. 2. а, б. Верхний рисунок – предельный цикл для свободного уравнения ван дер Поля $\frac{d^2U}{dt^2} + \varepsilon(U^2 - 1)\frac{dU}{dt} + U = 0$, $U = U(t; \varepsilon)$, в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 0.5$, построенный с помощью частичных сумм S_{80} ряда 18. Нижний рисунок – предельный цикл для уравнения ван дер Поля в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 1.66$, построенный с помощью диагональной аппроксимации Паде $[40/40]$ ряда 18.

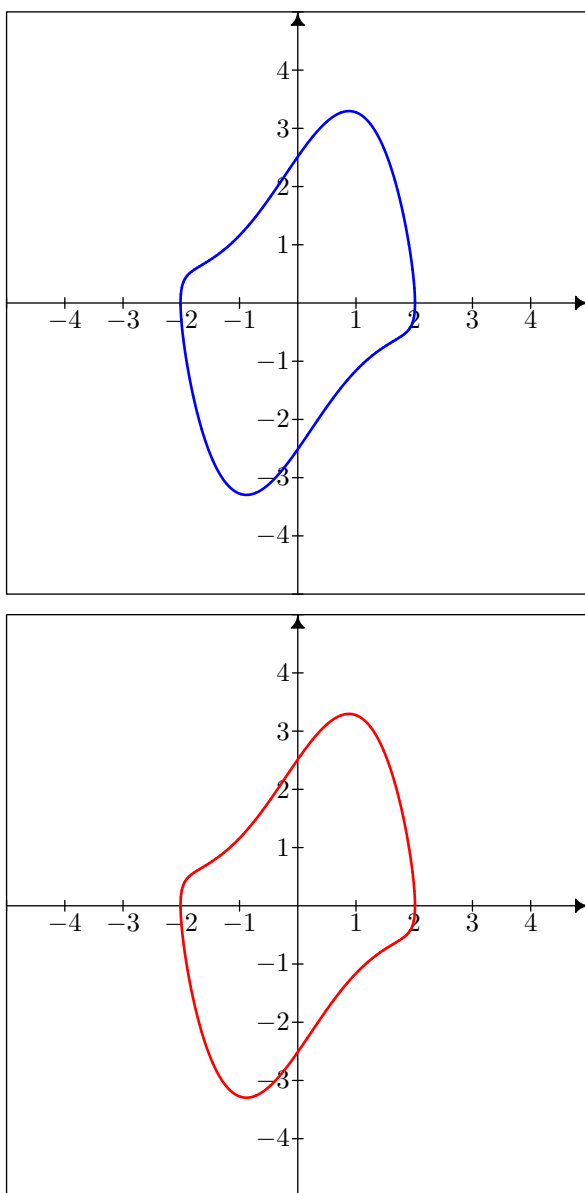


РИС. 3. а, б. Верхний рисунок – предельный цикл для свободного уравнения ван дер Поля $\frac{d^2U}{dt^2} + \varepsilon(U^2 - 1)\frac{dU}{dt} + U = 0$, $U = U(t; \varepsilon)$, в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 1.3$, построенный с помощью частичных сумм S_{80} ряда 18. Нижний рисунок – предельный цикл для уравнения ван дер Поля в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 1.3$, построенный с помощью диагональной аппроксимации Паде $[40/40]$ ряда 18.

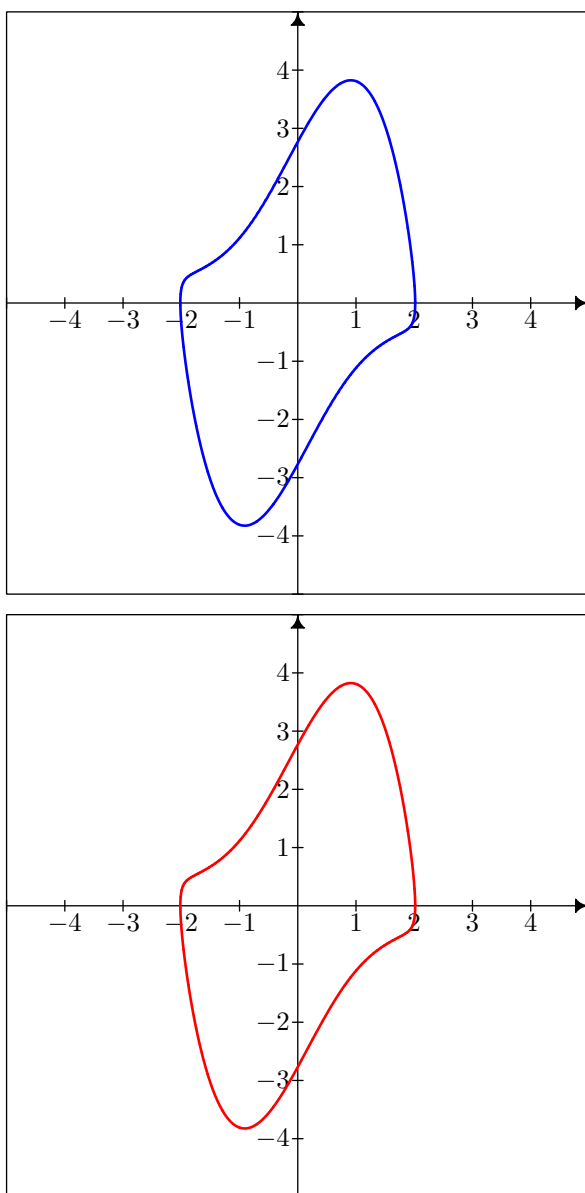


РИС. 4. а, б. Верхний рисунок – предельный цикл для свободного уравнения ван дер Поля $\frac{d^2U}{dt^2} + \varepsilon(U^2 - 1)\frac{dU}{dt} + U = 0$, $U = U(t; \varepsilon)$, в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 1.4$, построенный с помощью частичных сумм S_{80} ряда 18. Нижний рисунок – предельный цикл для уравнения ван дер Поля в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 1.4$, построенный с помощью диагональной аппроксимации Паде $[40/40]$ ряда 18.

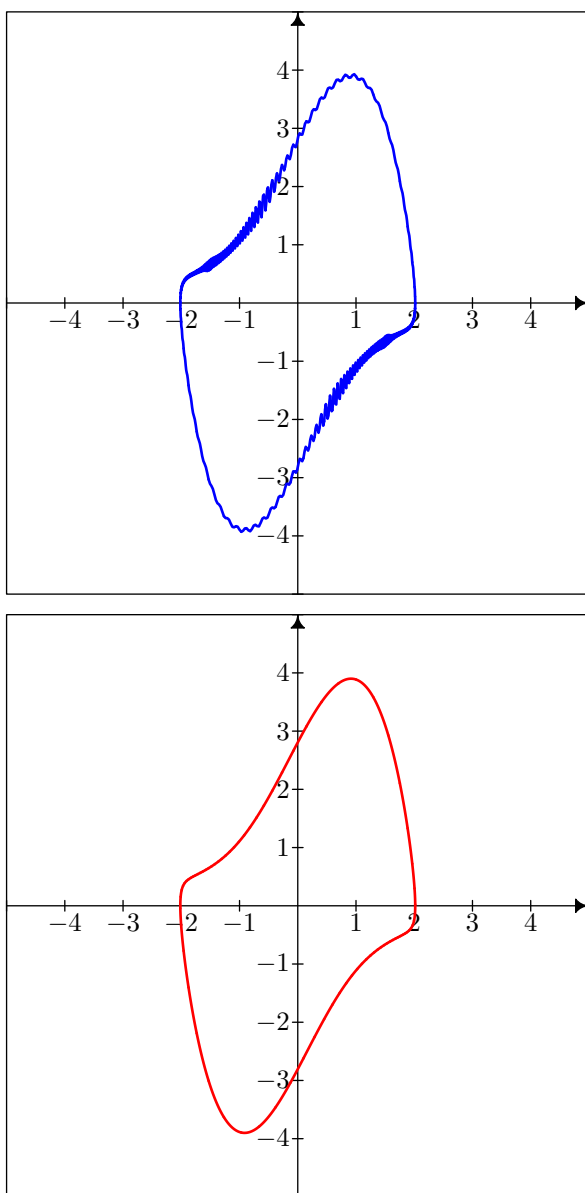


РИС. 5. а, б. Верхний рисунок – предельный цикл для свободного уравнения ван дер Поля $\frac{d^2U}{dt^2} + \varepsilon(U^2 - 1)\frac{dU}{dt} + U = 0$, $U = U(t; \varepsilon)$, в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 1.64$, построенный с помощью частичных сумм S_{80} ряда 18; отчетливо видно возникновение “хаотичности” на двух участках траектории. Нижний рисунок – предельный цикл для уравнения ван дер Поля в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 1.64$, построенный с помощью диагональной аппроксимации Паде [40/40] ряда 18.

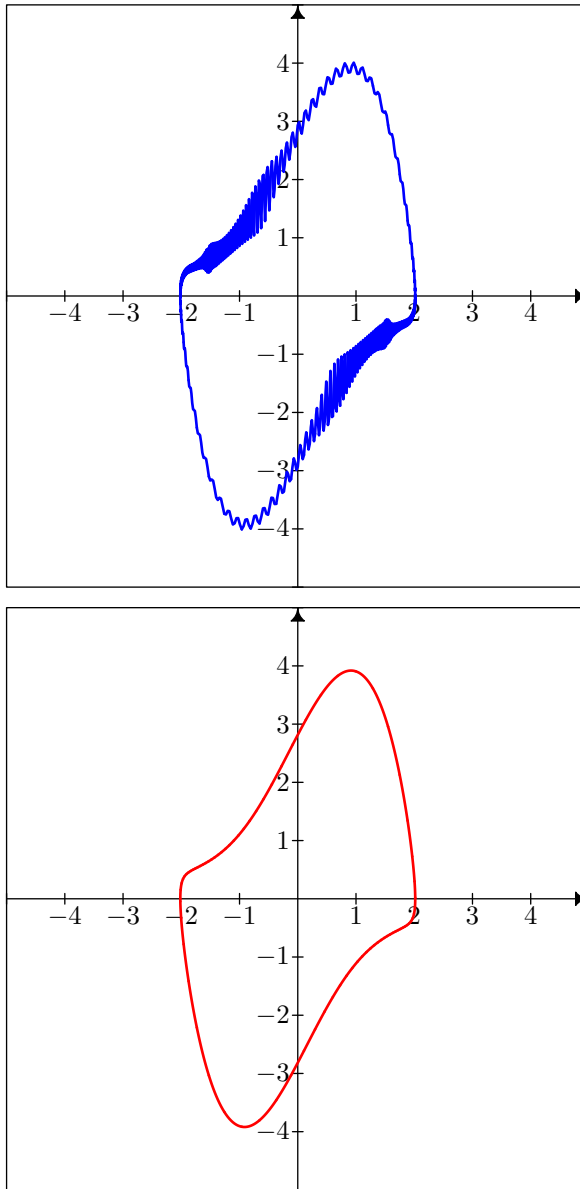


РИС. 6. а, б. Верхний рисунок – предельный цикл для свободного уравнения ван дер Поля $\frac{d^2U}{dt^2} + \varepsilon(U^2 - 1)\frac{dU}{dt} + U = 0$, $U = U(t; \varepsilon)$, в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 1.65$, построенный с помощью частичных сумм S_{80} ряда 18; “хаотичность” траектория усиливается. Нижний рисунок – предельный цикл для уравнения ван дер Поля в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 1.65$, построенный с помощью диагональной аппроксимации Паде [40/40] ряда 18.

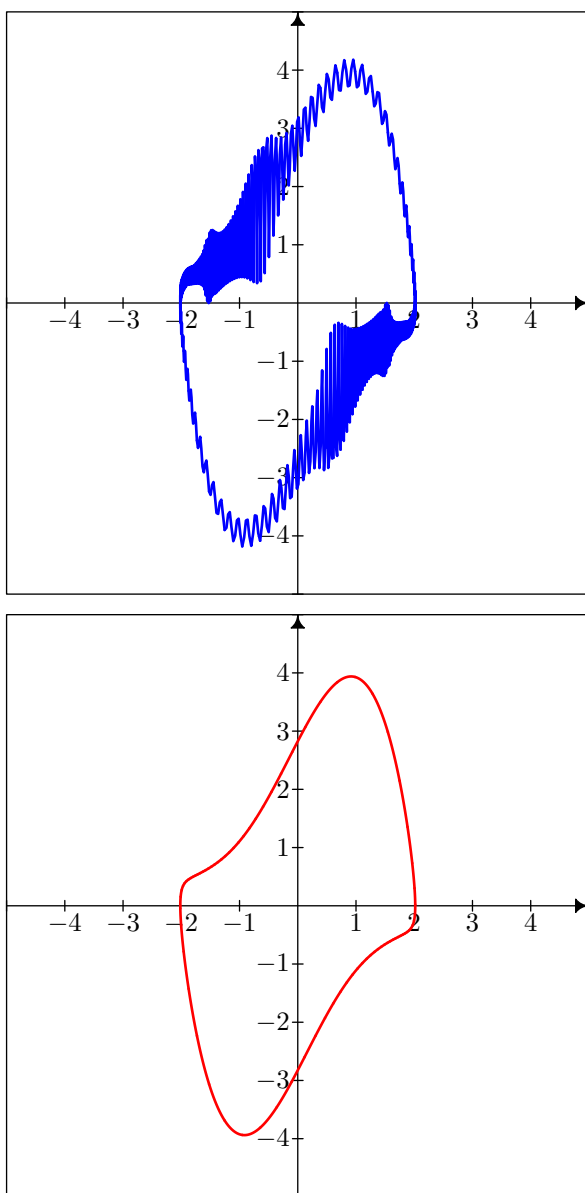


РИС. 7. а, б. Верхний рисунок – предельный цикл для свободного уравнения ван дер Поля $\frac{d^2U}{dt^2} + \varepsilon(U^2 - 1)\frac{dU}{dt} + U = 0$, $U = U(t; \varepsilon)$, в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 1.66$, построенный с помощью частичных сумм S_{80} ряда 18; траектория становится “хаотической” на всем участке. Нижний рисунок – предельный цикл для уравнения ван дер Поля в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 1.66$, построенный с помощью диагональной аппроксимации Паде [40/40] ряда 18.

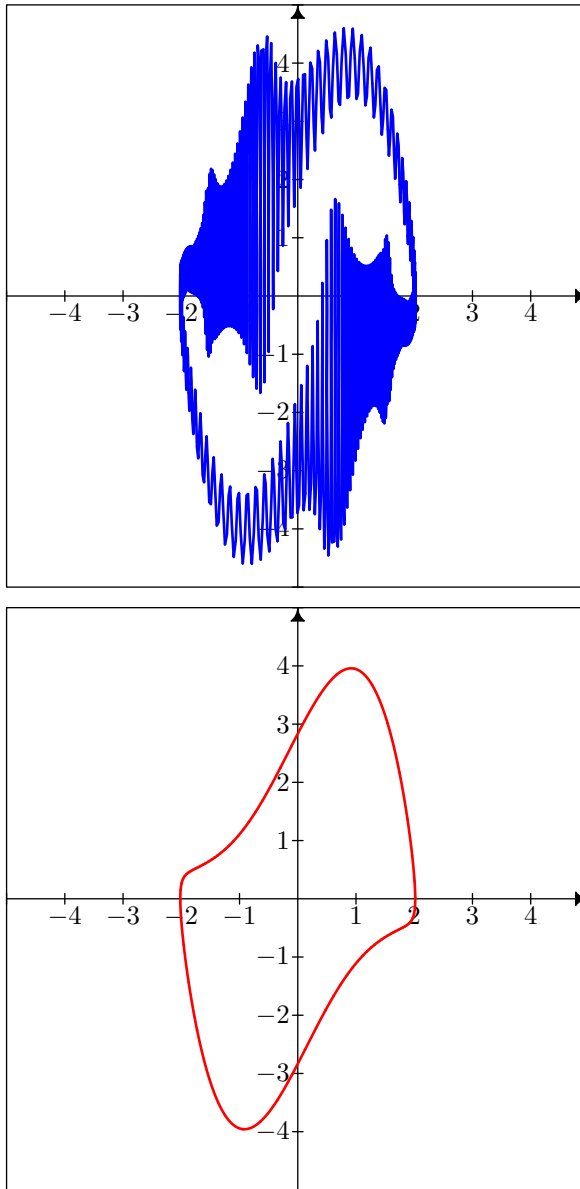


РИС. 8. а, б. Верхний рисунок – предельный цикл для свободного уравнения ван дер Поля $\frac{d^2 U}{dt^2} + \varepsilon(U^2 - 1)\frac{dU}{dt} + U = 0$, $U = U(t; \varepsilon)$, в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 1.67$, построенный с помощью частичных сумм S_{80} ряда 18. Нижний рисунок – предельный цикл для уравнения ван дер Поля в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 1.67$, построенный с помощью диагональной аппроксимации Паде $[40/40]$ ряда 18.

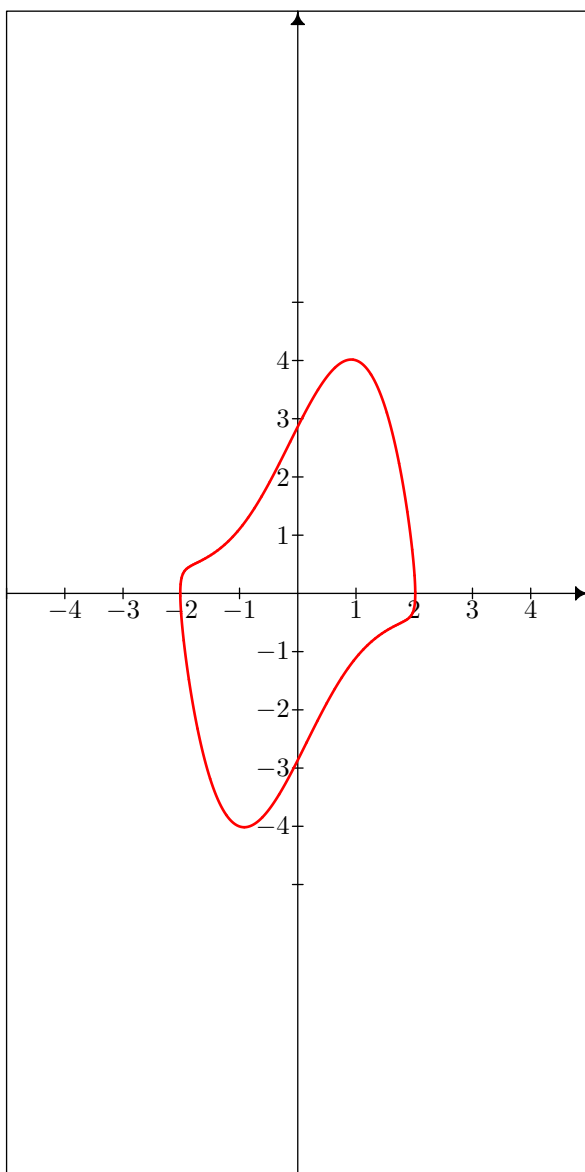


Рис. 9. а, б. Предельный цикл для свободного уравнения ван дер Поля $\frac{d^2U}{dt^2} + \varepsilon(U^2 - 1)\frac{dU}{dt} + U = 0$, $U = U(t; \varepsilon)$, в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 1.7$, построенный с помощью диагональной аппроксимации Паде [\[40/40\]](#) ряда [18](#).

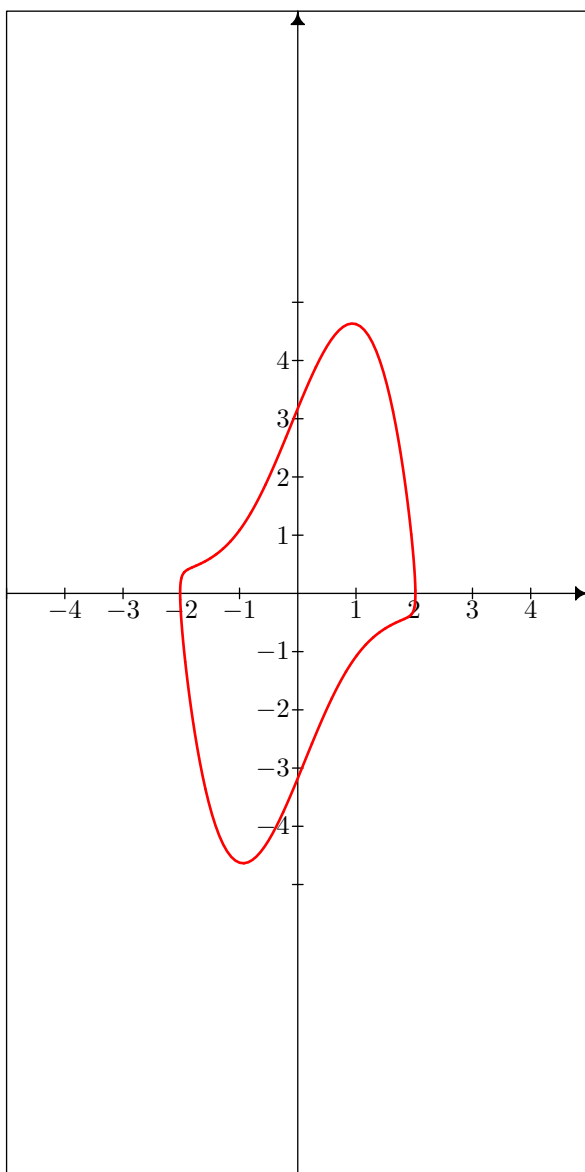


Рис. 10. а, б. Предельный цикл для свободного уравнения ван дер Поля $\frac{d^2U}{dt^2} + \varepsilon(U^2 - 1)\frac{dU}{dt} + U = 0$, $U = U(t; \varepsilon)$, в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 2.0$, построенный с помощью диагональной аппроксимации Паде [\[40/40\]](#) ряда [18](#).

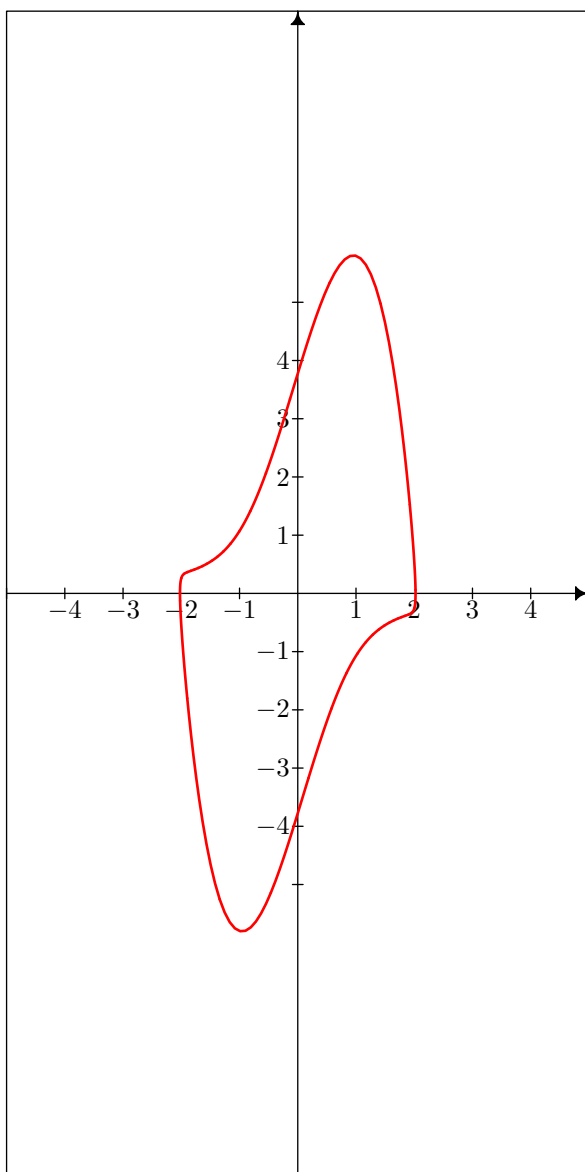


Рис. 11. а, б. Предельный цикл для свободного уравнения ван дер Поля $\frac{d^2U}{dt^2} + \varepsilon(U^2 - 1)\frac{dU}{dt} + U = 0$, $U = U(t; \varepsilon)$, в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 2.5$, построенный с помощью диагональной аппроксимации Паде [\[40/40\]](#) ряда [18](#).

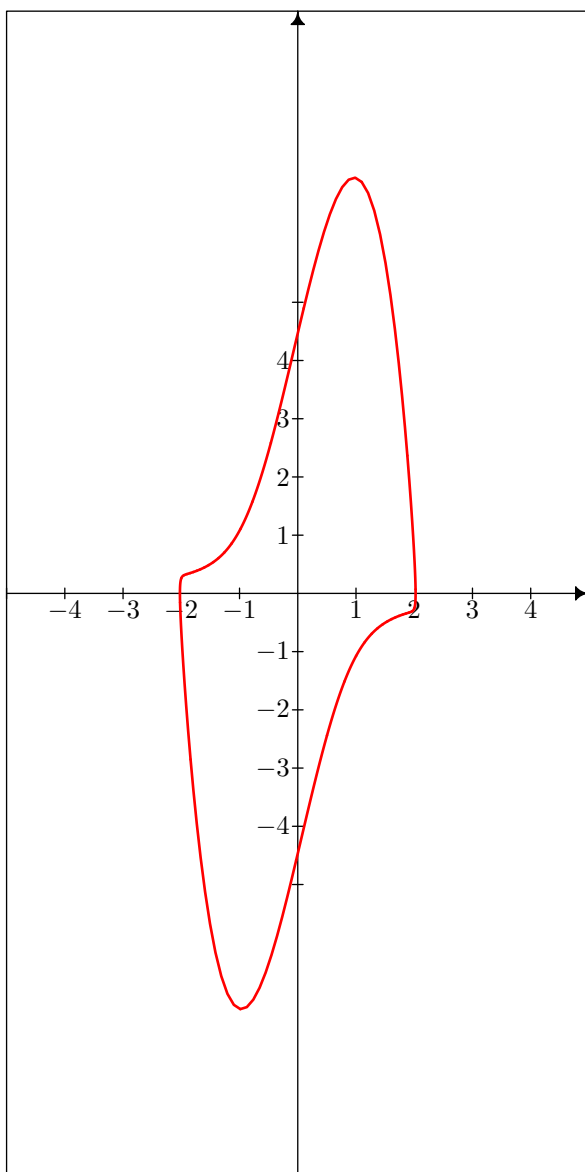


Рис. 12. а, б. Предельный цикл для свободного уравнения ван дер Поля $\frac{d^2U}{dt^2} + \varepsilon(U^2 - 1)\frac{dU}{dt} + U = 0$, $U = U(t; \varepsilon)$, в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 3.0$, построенный с помощью диагональной аппроксимации Паде [\[40/40\]](#) ряда [18](#).

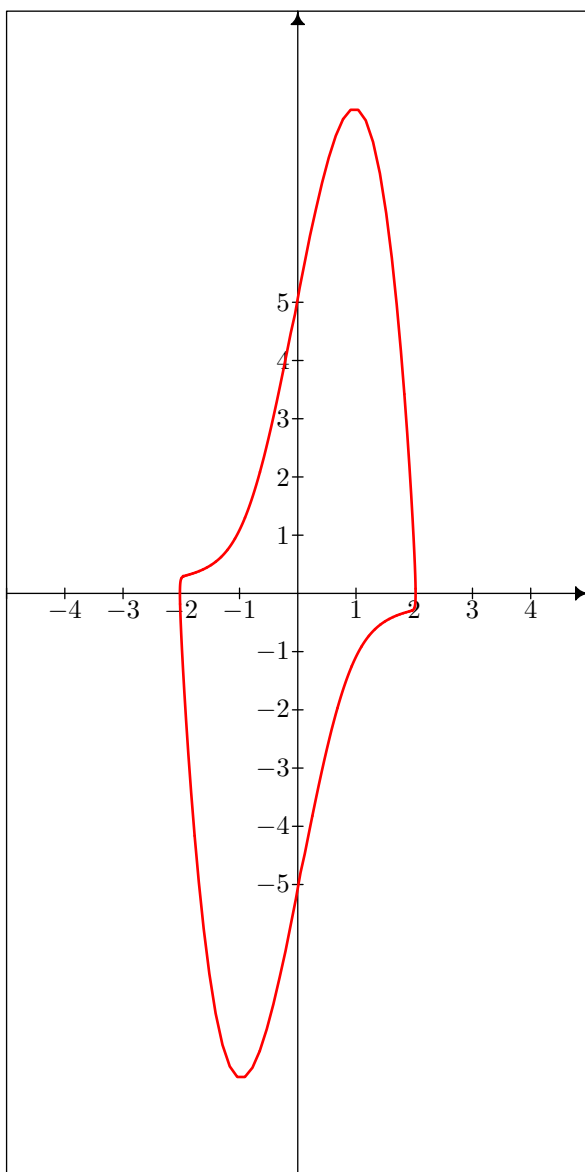


Рис. 13. а, б. Предельный цикл для свободного уравнения ван дер Поля $\frac{d^2U}{dt^2} + \varepsilon(U^2 - 1)\frac{dU}{dt} + U = 0$, $U = U(t; \varepsilon)$, в фазовой плоскости (U, \dot{U}) при $\varepsilon = 3.4$, построенный с помощью диагональной аппроксимации Паде [40/40] ряда. 18

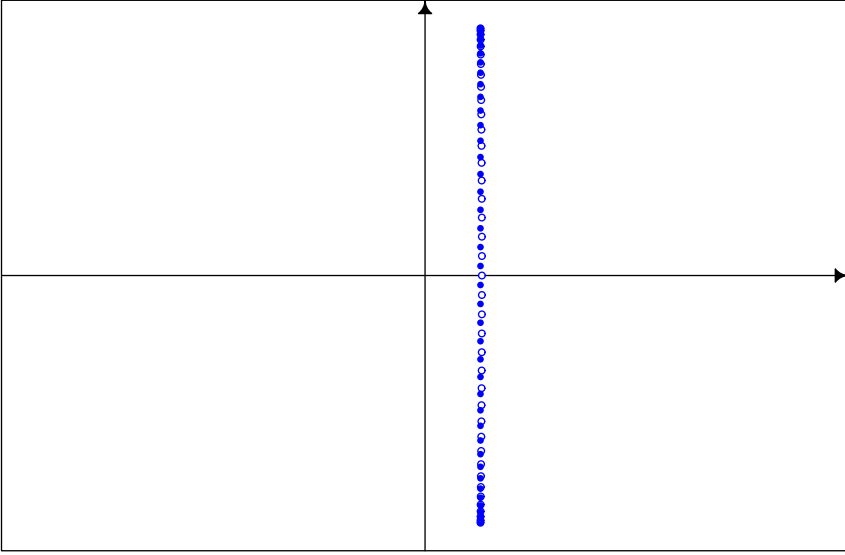


Рис. 14. а. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[40/40]_f$ для функции $f(z) = \sqrt{(z - e_1)(z - e_2)} - z \in H(\infty)$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, где $R = 1.1$, $\varphi = 2\pi/5$. Расположение полюсов и нулей соответствует отрезку, соединяющему точки $z = e_1$ и $z = e_2$ и являющемуся компактом минимальной емкости.

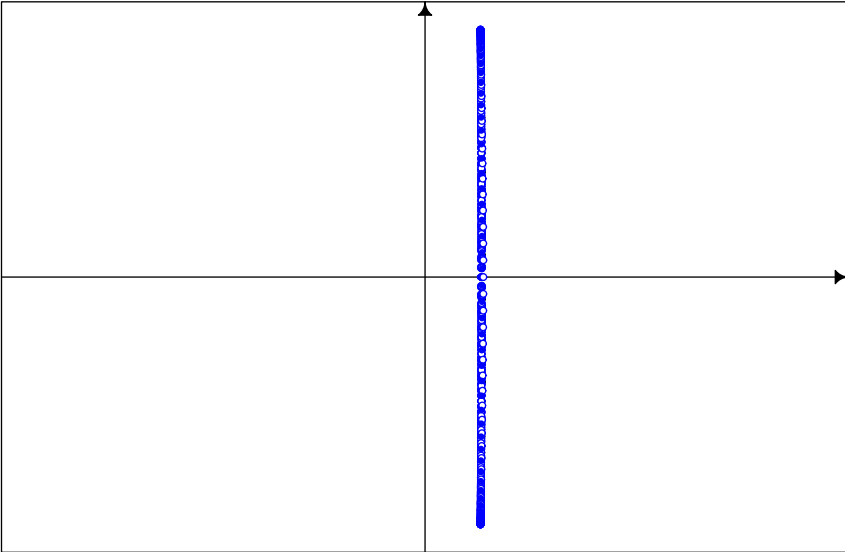


Рис. 14б. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[35/35]_f, \dots, [50/50]_f$ для функции $f(z) = \sqrt{(z - e_1)(z - e_2)} - z \in H(\infty)$ для $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, где $R = 1.1$, $\varphi = 2\pi/5$. Расположение полюсов и нулей соответствует отрезку, соединяющему точки $z = e_1$ и $z = e_2$ и являющемуся в этом случае компактом минимальной емкости. Хорошо видно, что эти полюсы и нули лежат на отрезке и перемежаются.

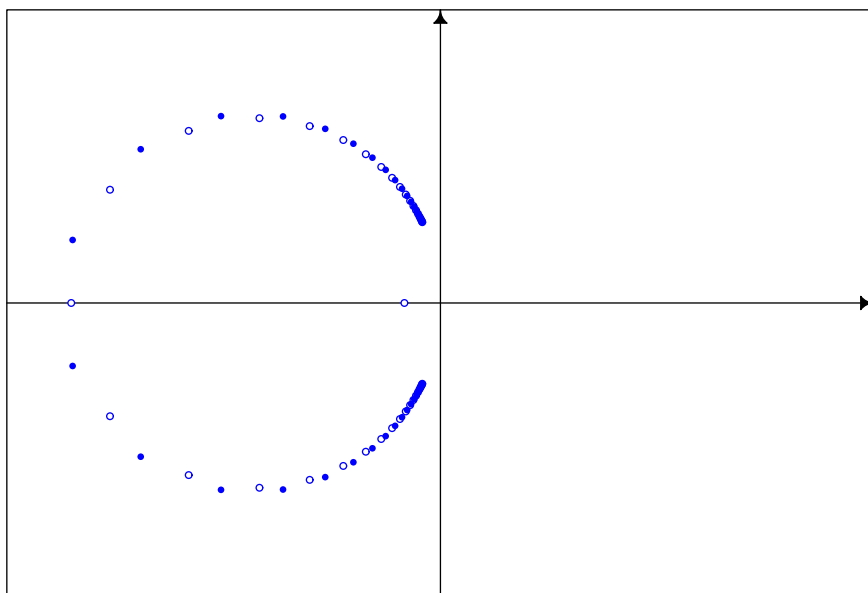


Рис. 14в. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[40/40]_f$ для функции $f(z) = \sqrt{(z - e_1)(z - e_2)} - z \in H(\infty)$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, где $R = 1.1$, $\varphi = 2\pi/5$ в плоскости переменного $\zeta = 1/z$. Расположение полюсов и нулей соответствует окружности, проходящей через обе точки ветвления и начало координат.

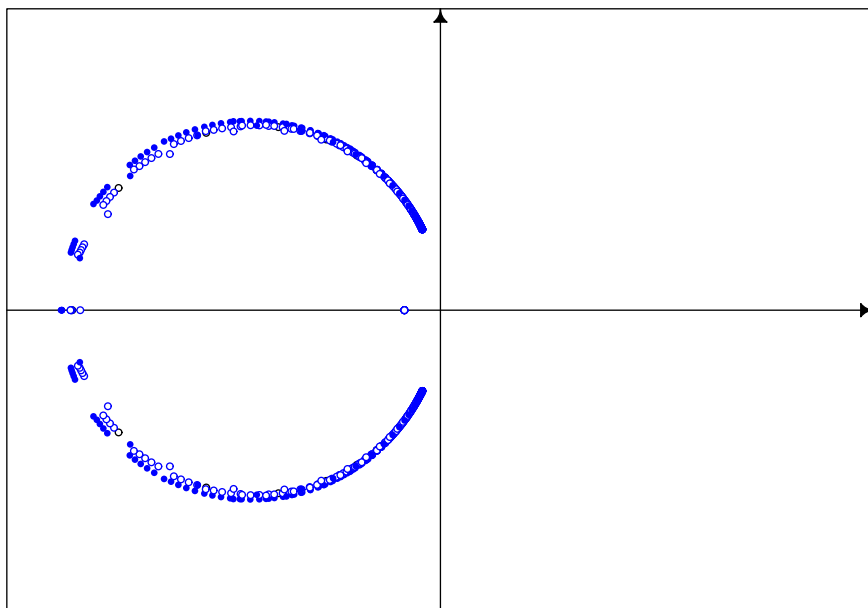


Рис. 14г. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[36/36]_f, \dots, [50/50]_f$ для функции $f(z) = \sqrt{(z - e_1)(z - e_2)} - z \in H(\infty)$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, где $R = 1.1$, $\varphi = 2\pi/5$ в плоскости переменного $\zeta = 1/z$.

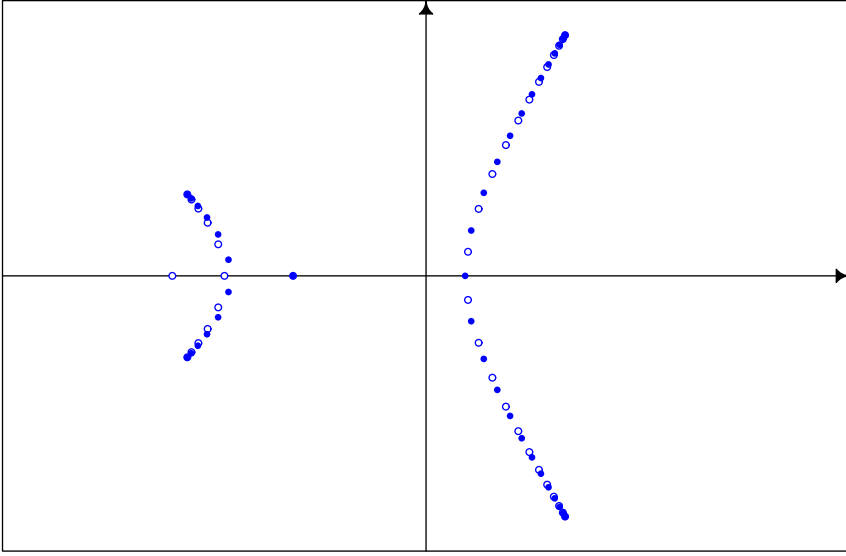


Рис. 15. а. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[38/38]_f$ для эллиптической функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi \approx 0.35\pi$, $\psi \approx 0.9\pi$. Расположение полюсов и нулей соответствует дугам S_1 и S_2 , образующим компакт минимальной емкости; при этом полюсы и нули фактически перемежаются.

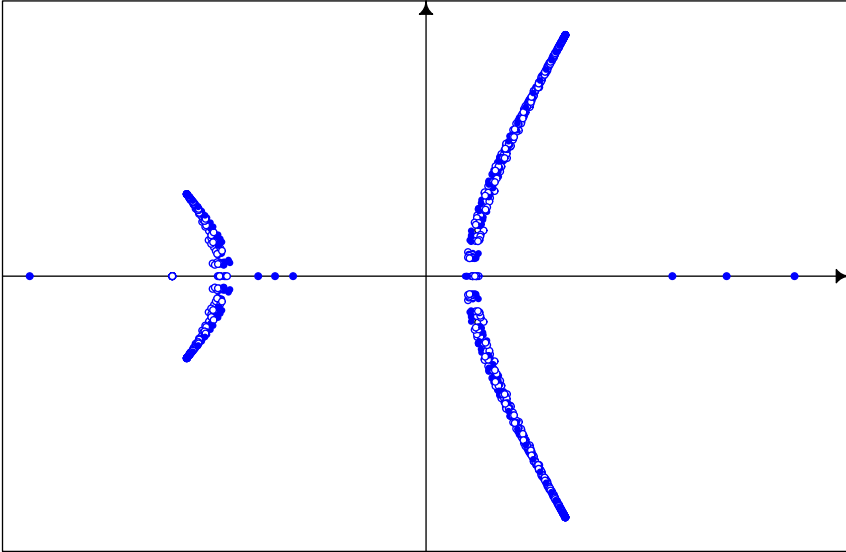


Рис. 15 б. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) ДАП $[35/35]_f, \dots, [50/50]_f$ для функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi \approx 0.35\pi$, $\psi \approx 0.9\pi$. На вещественной оси расположены ложные полюсы ДАП, соответствующих $n = 36, 38, 40, 42, 44, 48, 50$.

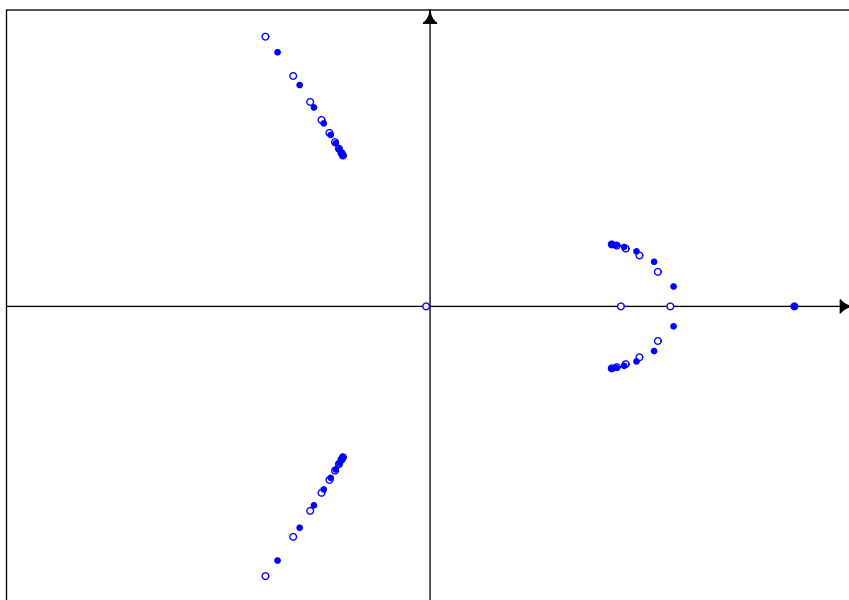


Рис. 15в. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[38/38]_f$ для эллиптической функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ при $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi \approx 0.35\pi$, $\psi \approx 0.9\pi$, в плоскости переменного $z = 1/\zeta$.

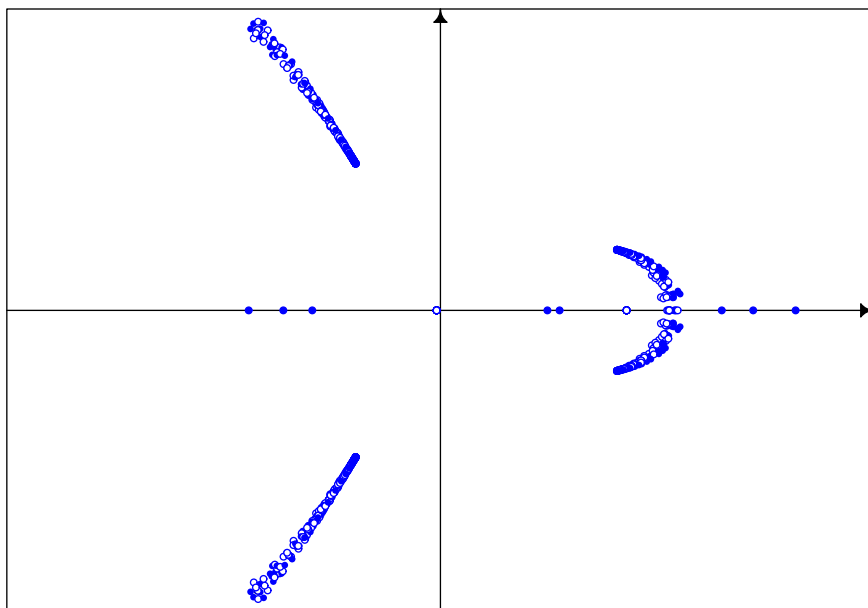


Рис. 15г. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[36/36]_f, \dots, [50/50]_f$ для функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ при $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi \approx 0.35\pi$, $\psi \approx 0.9\pi$, в плоскости переменного $z = 1/\zeta$. На вещественной оси расположены ложные полюсы аппроксимаций Паде, соответствующих $n = 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48$.

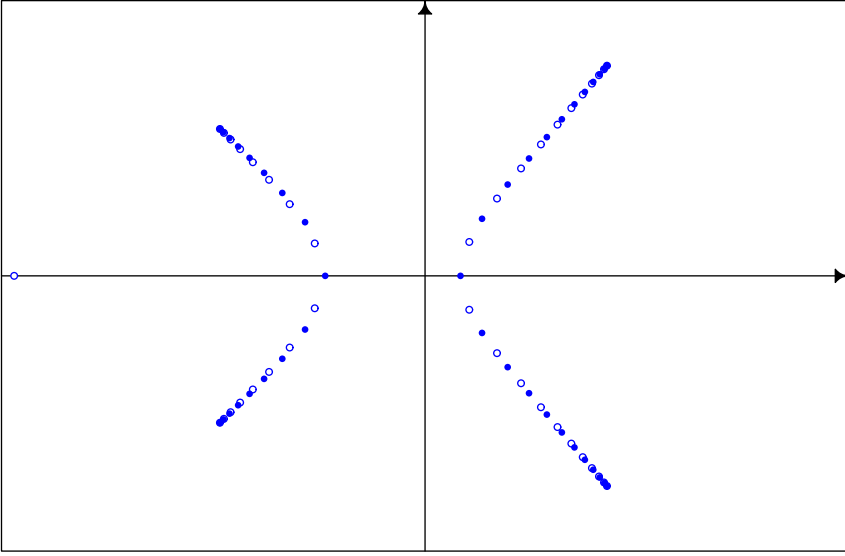


Рис. 16. а. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[38/38]_f$ для эллиптической функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi \approx 0.3\pi$, $\psi \approx 0.8\pi$. Расположение полюсов и нулей соответствует дугам S_1 и S_2 , образующим компакт минимальной емкости; при этом полюсы и нули фактически перемежаются.

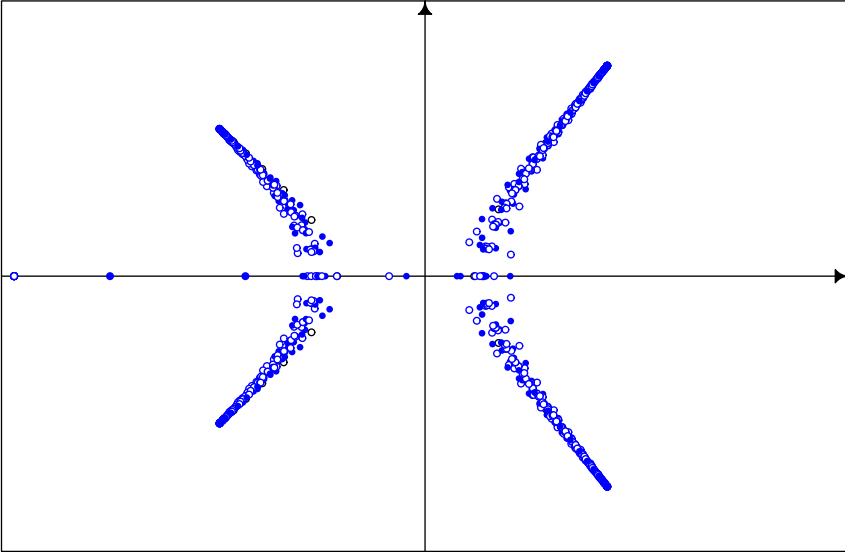


Рис. 16б. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) ДАП $[35/35]_f, \dots, [50/50]_f$ для функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi \approx 0.3\pi$, $\psi \approx 0.8\pi$. На вещественной оси расположены ложные полюсы ДАП, соответствующих $n = 36, 38, 40, 42, 44, 48, 50$.

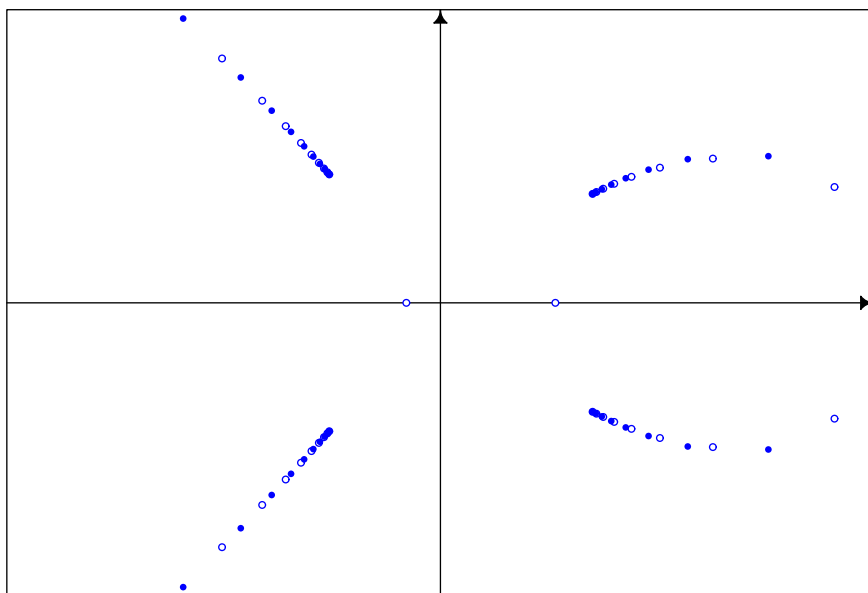


Рис. 16в. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[38/38]_f$ для эллиптической функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ при $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi \approx 0.3\pi$, $\psi \approx 0.8\pi$, в плоскости переменного $z = 1/\zeta$.

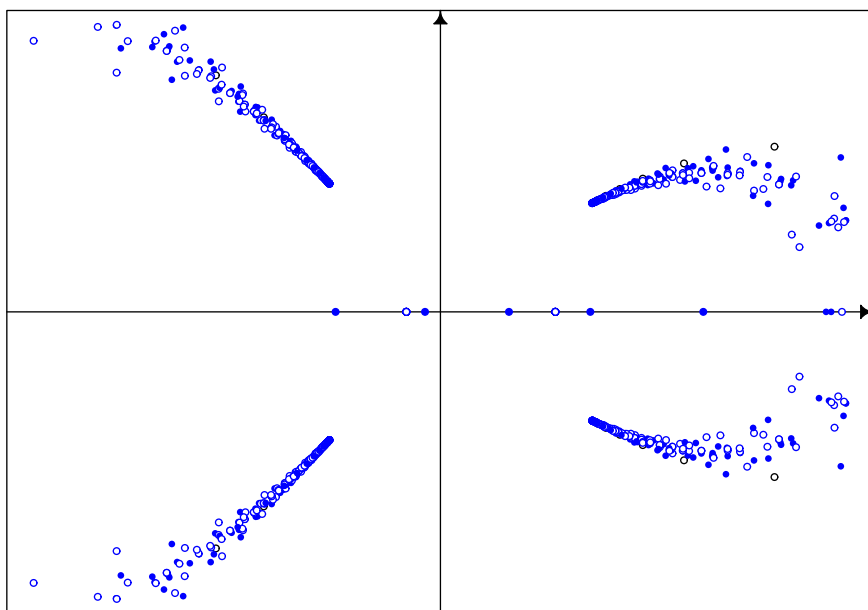


Рис. 16г. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[36/36]_f, \dots, [50/50]_f$ для функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ при $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi \approx 0.3\pi$, $\psi \approx 0.8\pi$, в плоскости переменного $z = 1/\zeta$. На вещественной оси расположены ложные полюсы аппроксимаций Паде, соответствующих $n = 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48$.

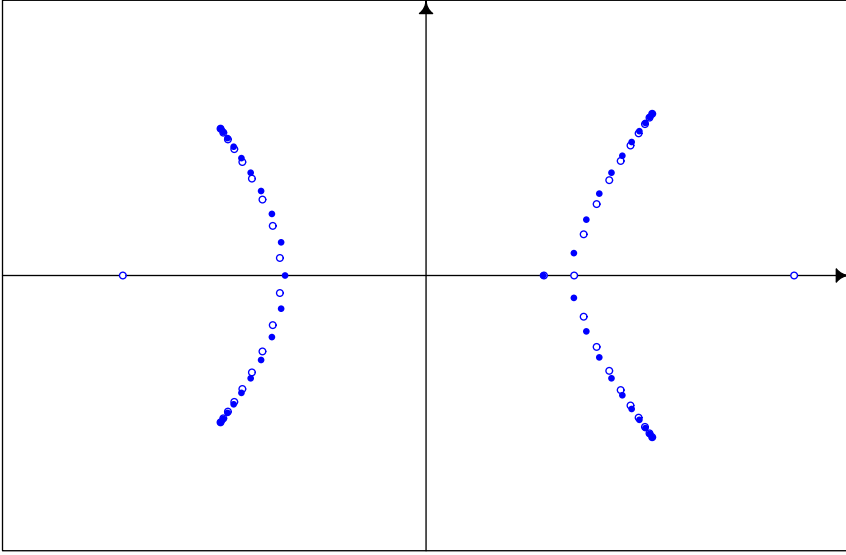


Рис. 17. а. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[38/38]_f$ для эллиптической функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = \pi/5$, $\psi = 4\pi/5$. Расположение полюсов и нулей соответствует дугам S_1 и S_2 , образующим компакт минимальной емкости.

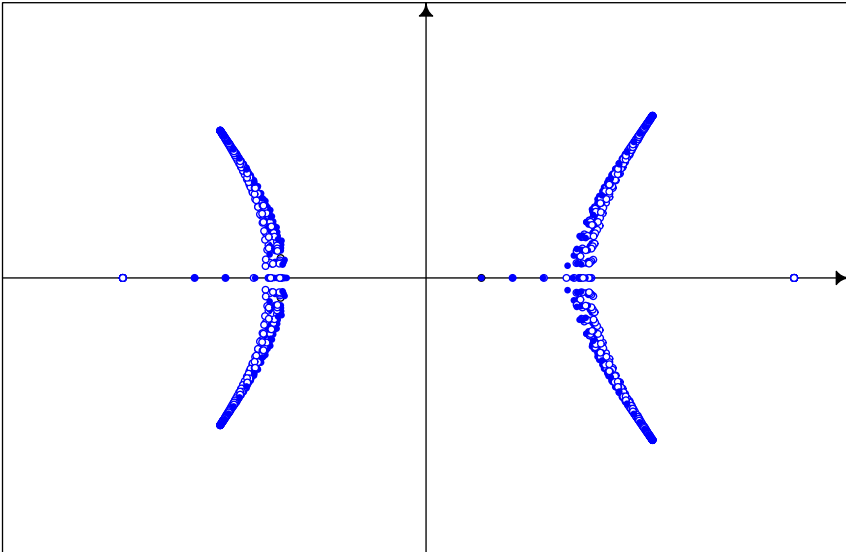


Рис. 17б. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[35/35]_f, \dots, [50/50]_f$ для функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = \pi/5$, $\psi = 4\pi/5$. На вещественной оси расположены ложные полюсы аппроксимаций Паде, соответствующих $n = 36, 38, 40, 42, 44, 48, 50$.

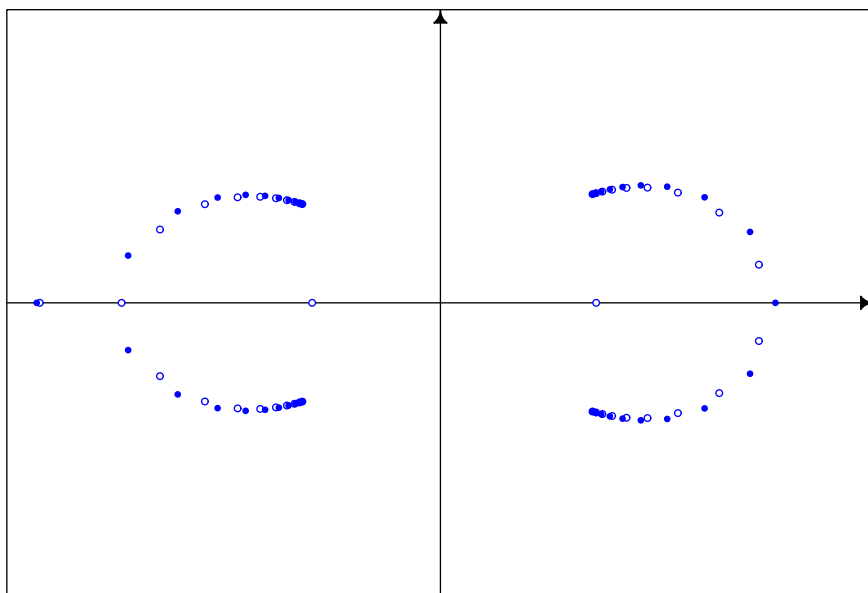


Рис. 17в. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[38/38]_f$ для эллиптической функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ при $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = \pi/5$, $\psi = 4\pi/5$, в плоскости переменного $z = 1/\zeta$.

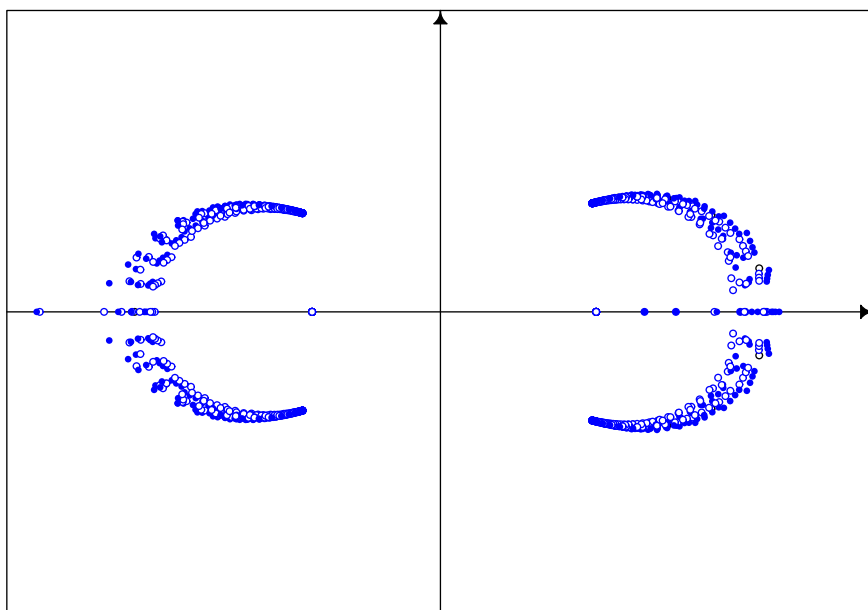


Рис. 17г. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[36/36]_f, \dots, [50/50]_f$ для функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ при $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = \pi/5$, $\psi = 4\pi/5$, в плоскости переменного $z = 1/\zeta$. На вещественной оси расположены ложные полюсы аппроксимаций Паде, соответствующих $n = 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48$.

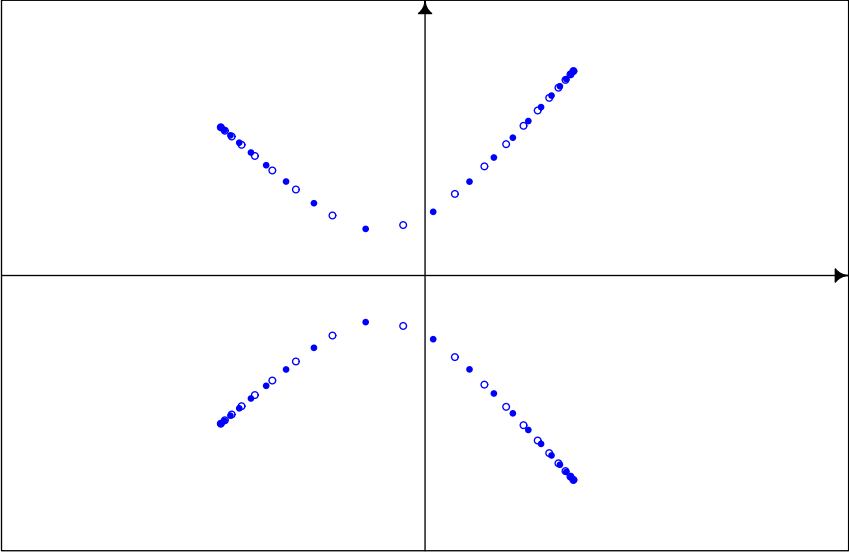


Рис. 18. а. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[38/38]_f$ для эллиптической функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = 0.3\pi$, $\psi = 4\pi/5$. Расположение полюсов и нулей соответствует дугам S_1 и S_2 , образующим компакт минимальной емкости.

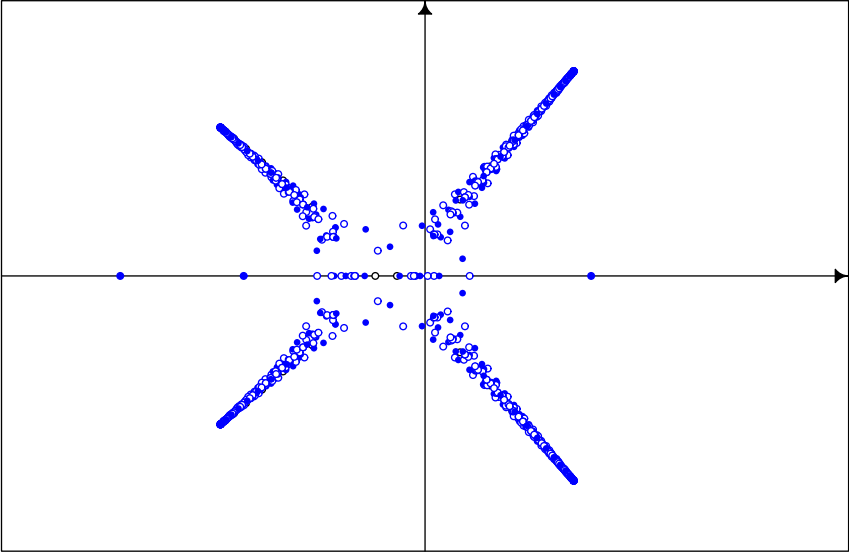


Рис. 18б. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[35/35]_f, \dots, [50/50]_f$ для функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = 0.3\pi$, $\psi = 4\pi/5$. На вещественной оси расположены ложные полюсы аппроксимаций Паде, соответствующих $n = 36, 38, 40, 42, 44, 48, 50$.

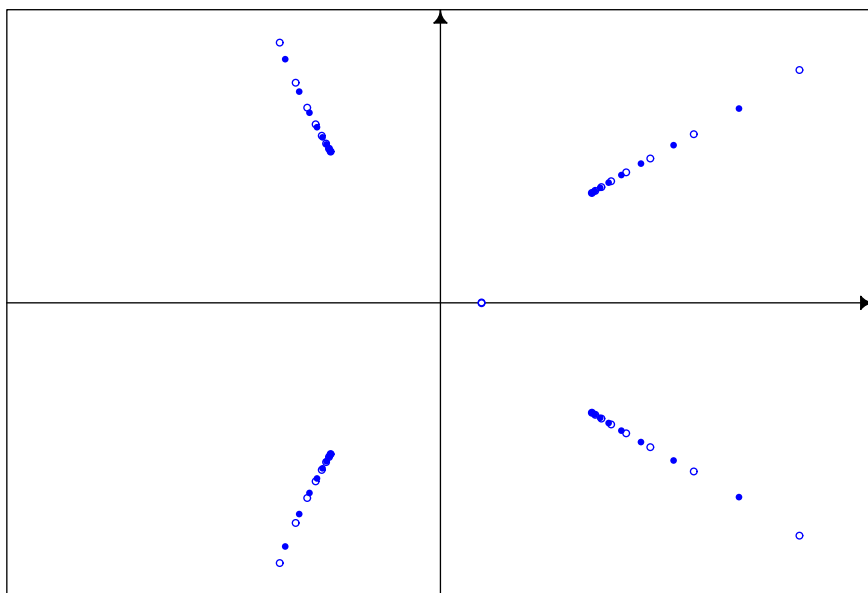


Рис. 18в. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[38/38]_f$ для эллиптической функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ при $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = 0.3\pi$, $\psi = 4\pi/5$, в плоскости переменного $z = 1/\zeta$.

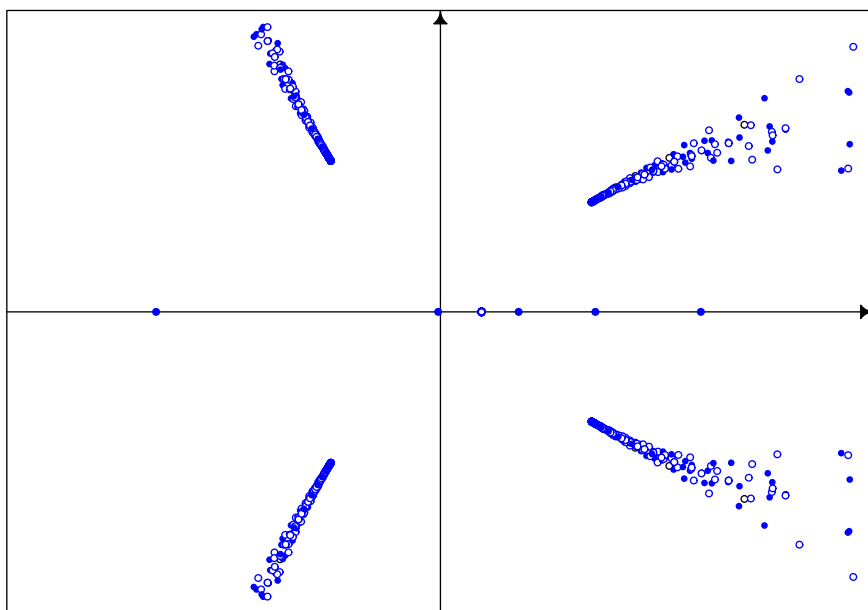


Рис. 18г. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[36/36]_f, \dots, [50/50]_f$ для функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ при $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = \pi/5$, $\psi = 4\pi/5$, в плоскости переменного $z = 1/\zeta$. На вещественной оси расположены ложные полюсы аппроксимаций Паде, соответствующих $n = 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48$.

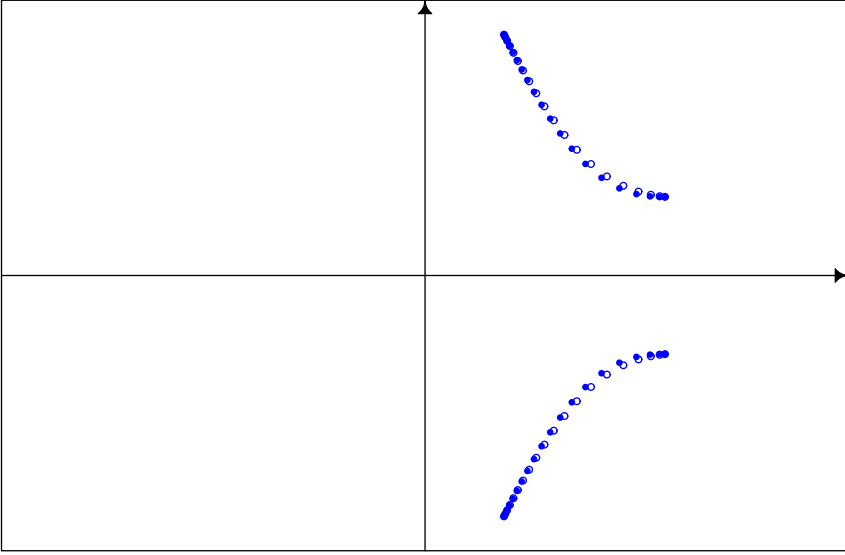


Рис. 19. а. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[38/38]_f$ для эллиптической функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = 0.1\pi$, $\psi = 2\pi/5$. Расположение полюсов и нулей соответствует дугам S_1 и S_2 , образующим компакт минимальной емкости.

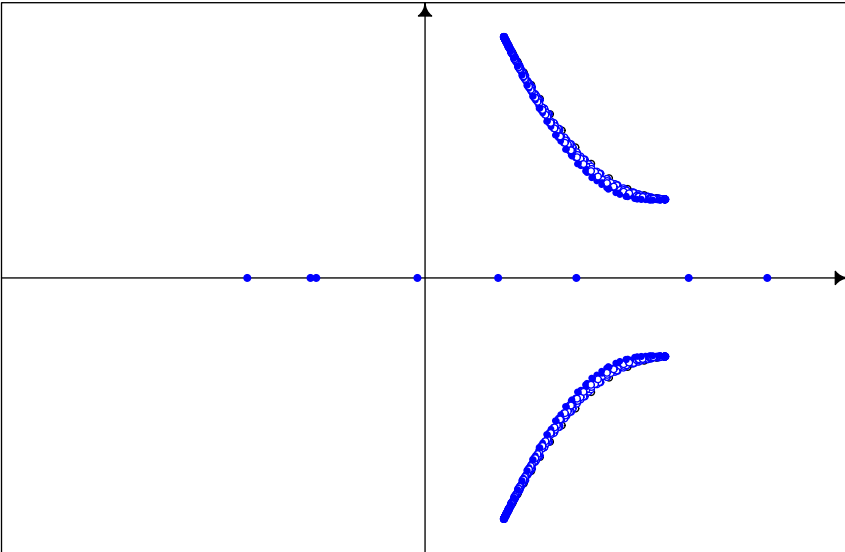


Рис. 19б. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[35/35]_f, \dots, [50/50]_f$ для функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = 0.1\pi$, $\psi = 2\pi/5$. На вещественной оси расположены ложные полюсы аппроксимаций Паде, соответствующих $n = 36, 38, 40, 42, 44, 48, 50$.

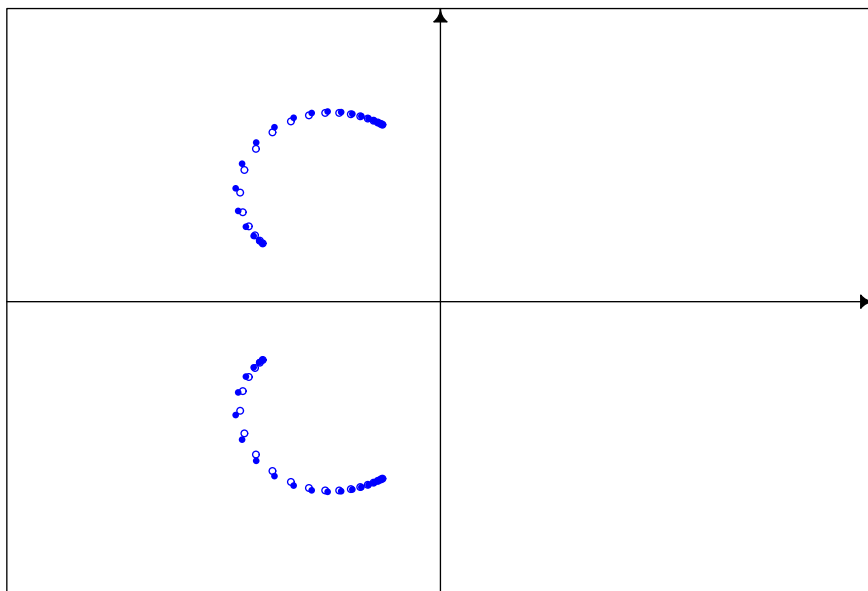


Рис. 19в. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) ДАП $[38/38]_f$ для эллиптической функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ при $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = 0.1\pi$, $\psi = 2\pi/5$, в плоскости переменного $z = 1/\zeta$.

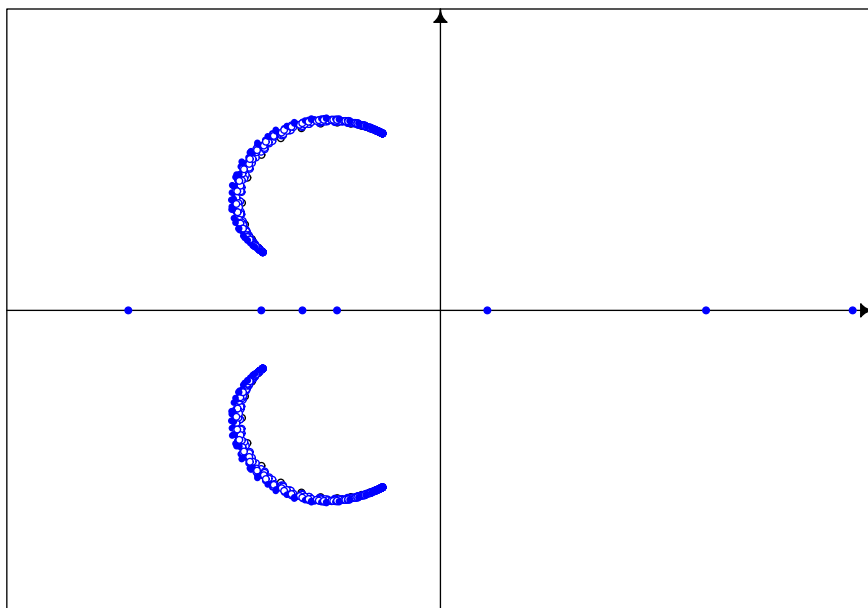


Рис. 19г. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[36/36]_f, \dots, [50/50]_f$ для функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ при $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = 0.1\pi$, $\psi = 2\pi/5$, в плоскости переменного $z = 1/\zeta$. На вещественной оси расположены ложные полюсы аппроксимаций Паде, соответствующих $n = 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48$.

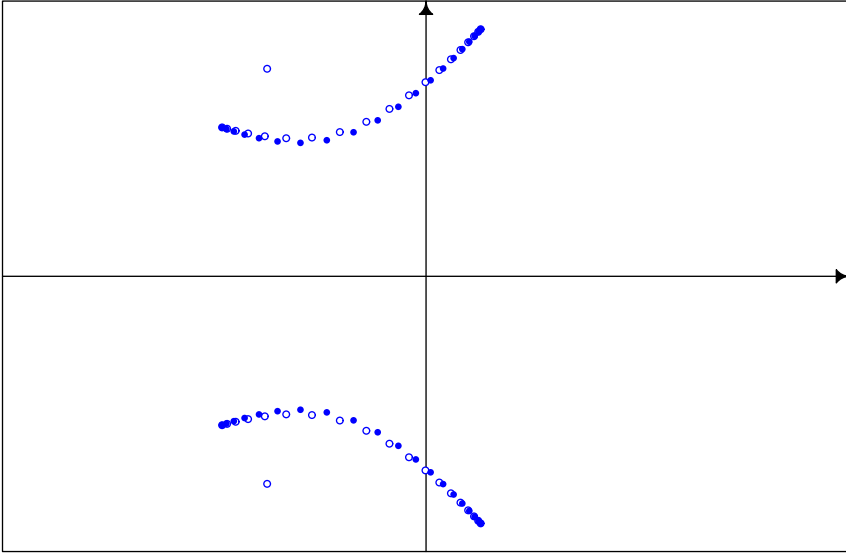


Рис. 20. а. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[38/38]_f$ для эллиптической функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = 2\pi/5$, $\psi = 4\pi/5$. Расположение полюсов и нулей соответствует дугам S_1 и S_2 , образующим компакт минимальной емкости.

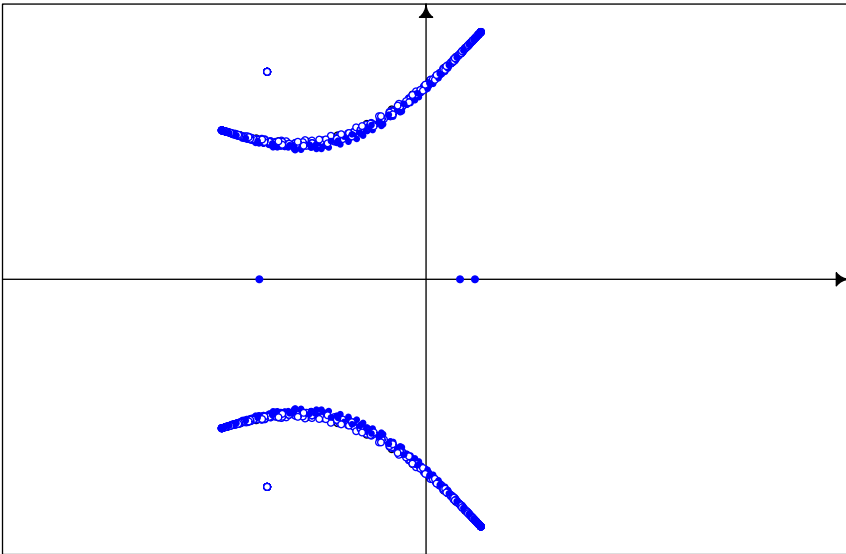


Рис. 20б. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) ДАП $[35/35]_f, \dots, [50/50]_f$ для функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ в случае $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = 2\pi/5$, $\psi = 4\pi/5$. На вещественной оси расположены ложные полюсы ДАП, соответствующих $n = 36, 38, 40, 42, 44, 48, 50$.

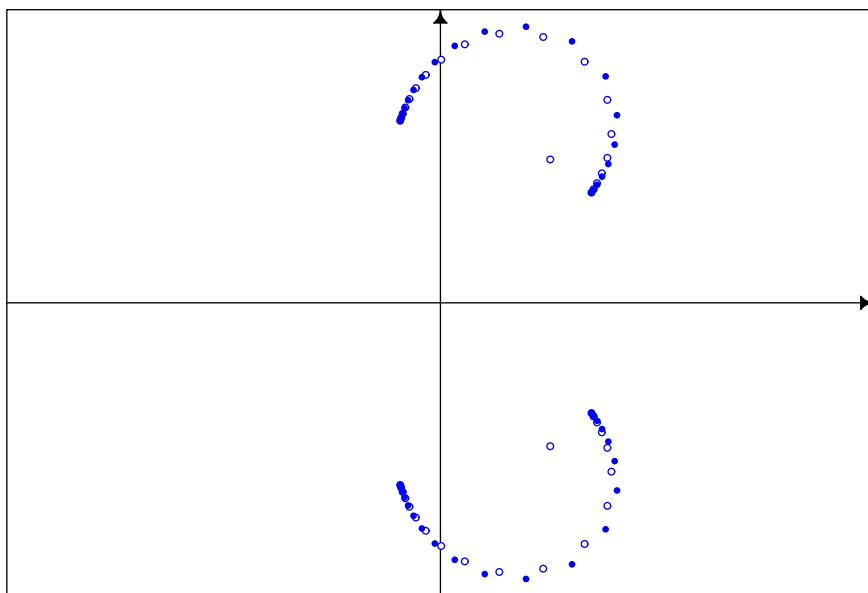


Рис. 20в. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[38/38]_f$ для эллиптической функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ при $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = 2\pi/5$, $\psi = 4\pi/5$, в плоскости переменного $z = 1/\zeta$.

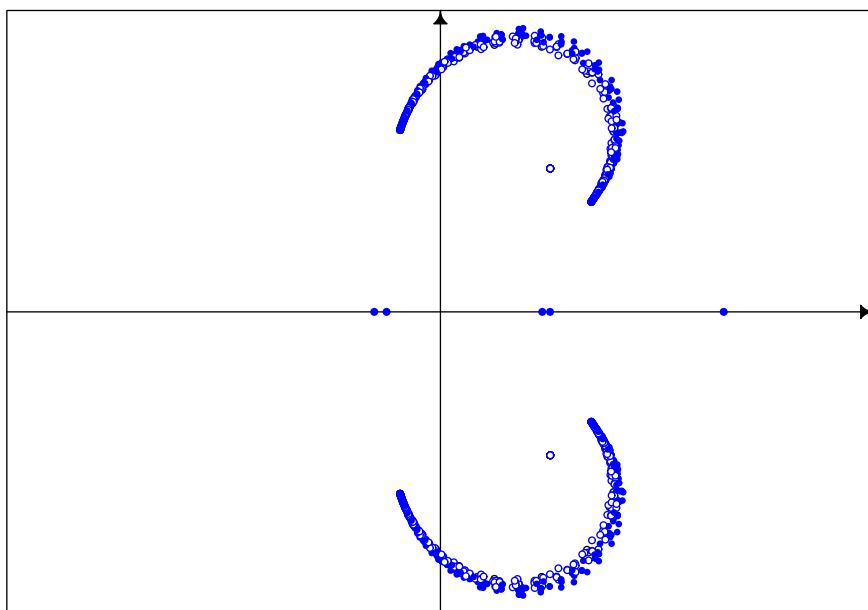


Рис. 20г. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[36/36]_f, \dots, [50/50]_f$ для функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_4)} - \zeta^2 + \zeta(e_1 + \cdots + e_4)/2$ при $e_{1,2} = Re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = re^{\pm i\psi}$, где $R = 1.1$, $r = 1$, $\varphi = 2\pi/5$, $\psi = 4\pi/5$, в плоскости переменного $z = 1/\zeta$. На вещественной оси расположены ложные полюсы аппроксимаций Паде, соответствующих $n = 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48$.

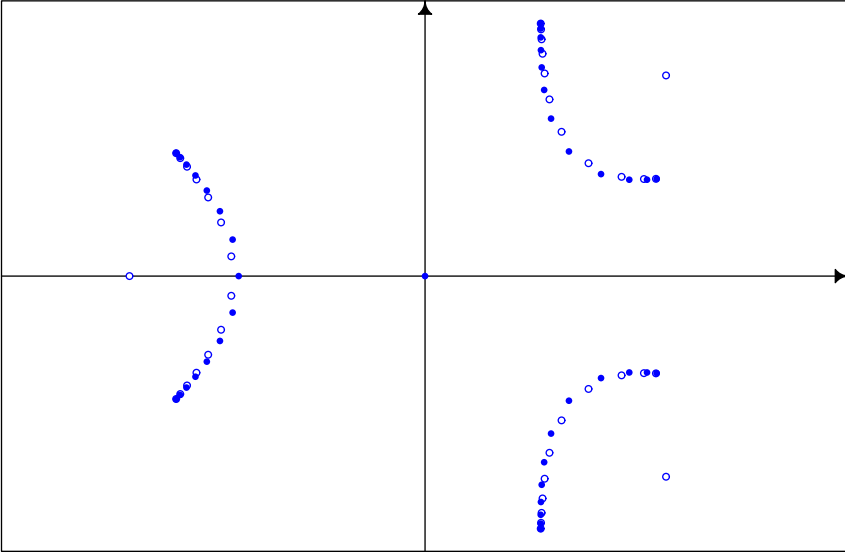


Рис. 21. а. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[40/40]_f$ для гиперэллиптической функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_6)} - \zeta^3 - \alpha\zeta^2 - \beta\zeta$ в случае $e_{1,2} = re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = Re^{\pm i\psi}$, $e_{5,6} = \rho e^{\pm i\theta}$, где $r = 0.9$, $R = 1.1$, $\rho = 1.0$. Расположение полюсов и нулей соответствует трем дугам S_1 , S_2 и S_3 , образующим компакт минимальной емкости.

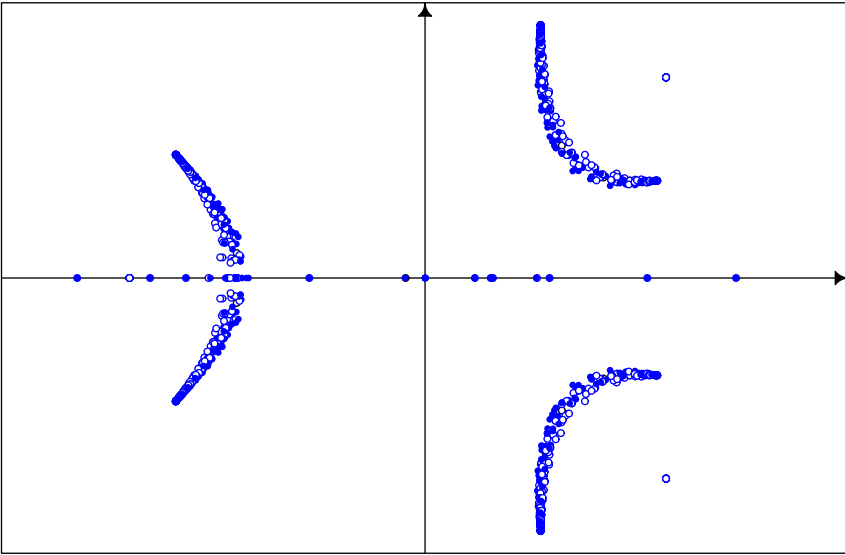


Рис. 21б. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[35/35]_f, \dots, [50/50]_f$ для функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_6)} - \zeta^3 - \alpha\zeta^2 - \beta\zeta$ в случае $e_{1,2} = re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = Re^{\pm i\psi}$, $e_{5,6} = \rho e^{\pm i\theta}$, где $r = 0.9$, $R = 1.1$, $\rho = 1.0$. На вещественной оси расположены ложные полюсы аппроксимаций Паде, соответствующих $n = 36, 38, 40, 42, 44, 48, 50$.

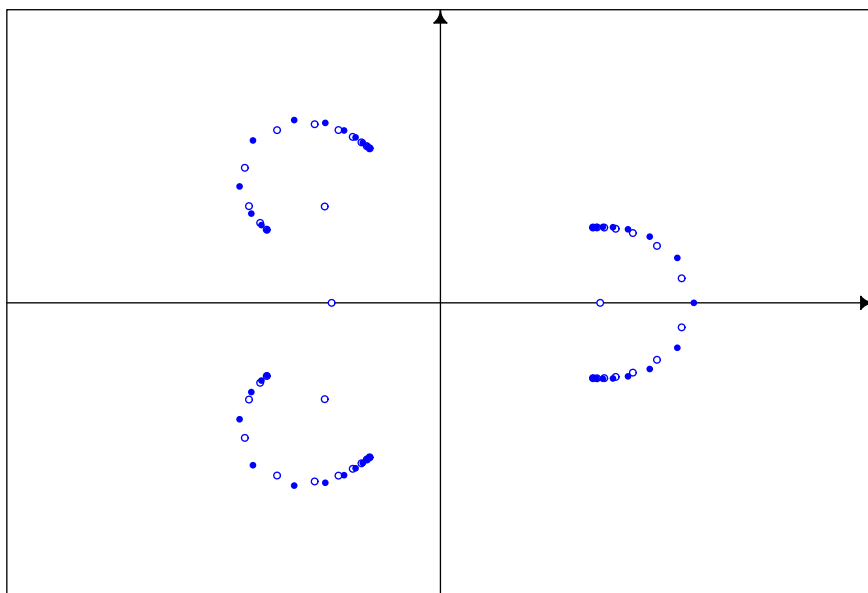


Рис. 21в. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[40/40]_f$ для гиперэллиптической функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_6)} - \zeta^3 - \alpha\zeta^2 - \beta\zeta$ в случае $e_{1,2} = re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = Re^{\pm i\psi}$, $e_{5,6} = \rho e^{\pm i\theta}$, где $r = 0.9$, $R = 1.1$, $\rho = 1.0$, в плоскости переменного $z = 1/\zeta$.

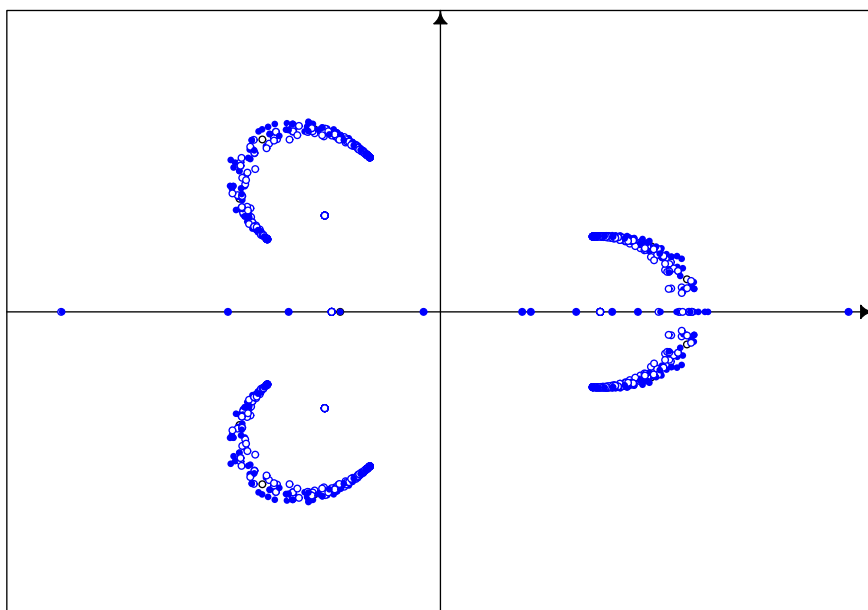


Рис. 21г. Полюсы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[35/35]_f, \dots, [50/50]_f$ для функции $f(\zeta) = \sqrt{(\zeta - e_1) \cdots (\zeta - e_6)} - \zeta^3 - \alpha\zeta^2 - \beta\zeta$ в случае $e_{1,2} = re^{\pm i\varphi}$, $e_{3,4} = Re^{\pm i\psi}$, $e_{5,6} = \rho e^{\pm i\theta}$, где $r = 0.9$, $R = 1.1$, $\rho = 1.0$, в плоскости переменного $z = 1/\zeta$. На вещественной оси расположены ложные полюсы аппроксимаций Паде, соответствующих $n = 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48$.

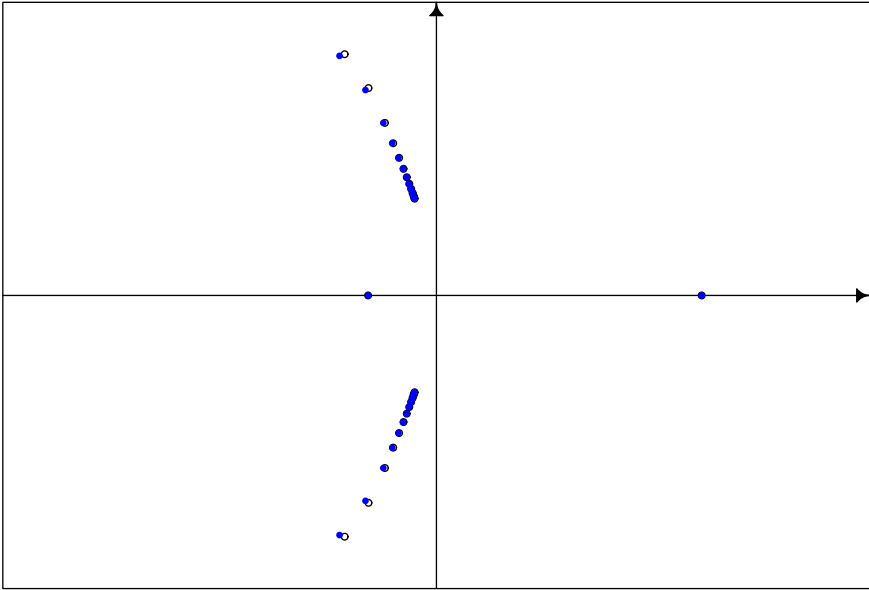


Рис. 22. а. Полосы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[34/34]_\nu$ для функции частоты ν в плоскости переменного $z = \varepsilon^2$.

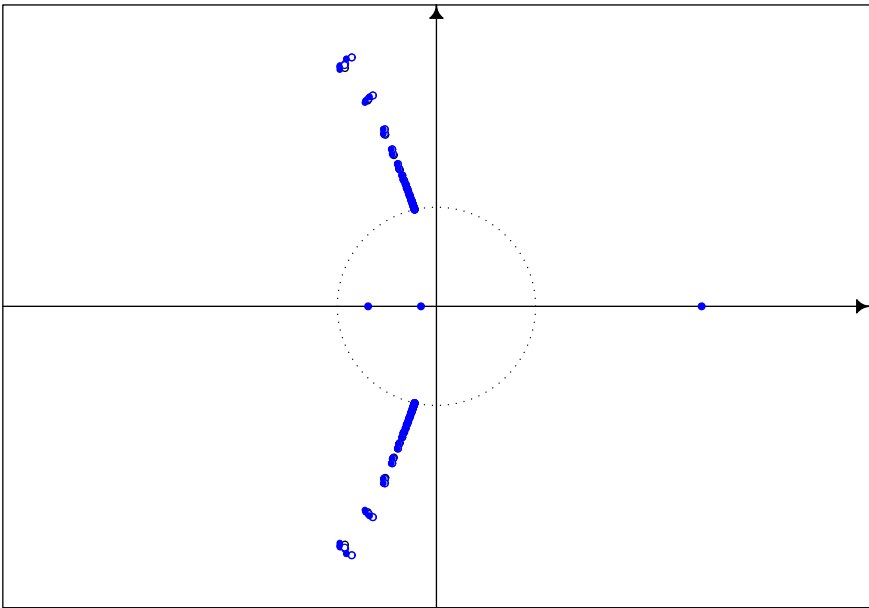


Рис. 22б. Полосы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[32/32]_\nu, \dots, [36/36]_\nu$ для функции частоты ν в плоскости переменного $z = \varepsilon^2$.

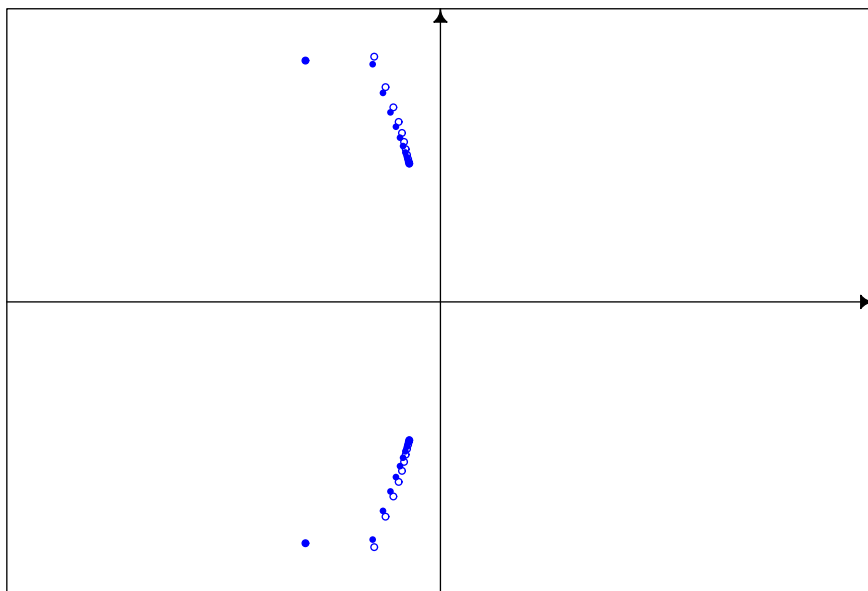


Рис. 23. а. Полосы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[34/34]_f$ для функции $f = \nu'/\nu$ в плоскости переменного $z = \varepsilon^2$.

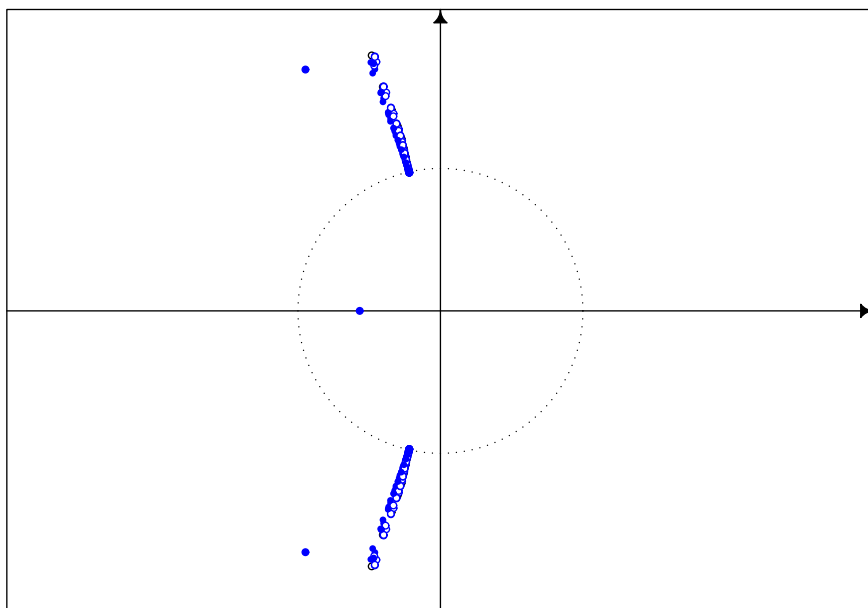


Рис. 23б. Полосы (“синие” кружки) и нули (“белые” кружки) диагональных аппроксимаций Паде $[32/32]_f, \dots, [36/36]_f$ для функции $f = \nu'/\nu$ в плоскости переменного $z = \varepsilon^2$.

Список литературы

- [1] Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов, *Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания*, Наука, М., 1975; E. F. Mishchenko, N. Kh. Rozov, *Differential equations with small parameters and relaxation oscillations*, Mathematical Concepts and Methods in Science and Engineering, **13**, Plenum Press, New York, 1980.
- [2] Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Колесов, А. Ю. Колесов, Н. Х. Розов, *Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах*, Физ.-мат. литература, М., 1995; E. F. Mishchenko, Yu. S. Kolesov, A. Yu. Kolesov, N. Kh. Rozov, *Periodicheskie dvizheniya i bifurkatsionnye protsessy v singulyarno vozmushchennykh sistemakh* (Periodic motions and bifurcation processes in singularly perturbed systems), Fizmatlit "Nauka", Moscow, 1995 (Russian).
- [3] M. B. Dadfar, J. F. Geer, C. M. Andersen, "Perturbation analysis of the limit cycle of the free van der Pol equation", *SIAM J. Appl. Math.*, **42**:3 (1982), 678–693.
- [4] C. M. Andersen, J. F. Geer, "Power series expansions for the frequency and period of the limit cycle of the van der Pol equation", *SIAM J. Appl. Math.*, **44**:5 (1984), 881–895.
- [5] G. A. Baker Jr., P. Graves-Morris, *Padé approximants*. Part I. *Basic theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **13**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1981; G. A. Baker Jr., P. Graves-Morris, *Padé approximants*. Part II. *Extensions and applications*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, **14**, Addison-Wesley, Reading, MA, 1981; Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде*, Мир, М., 1986.
- [6] R. de Montessus, "Sur les fractions continues algébriques", *Bull. Soc. Math. France*, **30** (1902), 28–36.
- [7] А. А. Гончар, "О сходимости обобщенных аппроксимаций Паде мероморфных функций", *Матем. сб.*, **98(140)**:4(12) (1975), 564–577; A. A. Gončar, "On the convergence of generalized Padé approximants of meromorphic functions", *Math. USSR-Sb.*, **27**:4 (1975), 503–514.
- [8] J. Hadamard, "Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor", *J. Math. Pures et Appl.*, **VIII**:4 (1892), 101–186; These, Gauthier-Villars et Fils., Paris, 1892.
- [9] А. А. Гончар, "О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде", *Матем. сб.*, **118(160)**:4 (1982), 535–556; A. A. Gonchar, "On uniform convergence of diagonal Padé approximants", *Math. USSR Sb.*, **46**:4 (1983), 539–559.
- [10] А. А. Гончар, "О сходимости диагональных аппроксимаций Паде в сферической метрике", *Математические структуры. Вычислительная математика. Математическое моделирование*, Труды, посвященные семидесятилетию академика Л. Ильева, **2**, София, 1984, 29–35.
- [11] А. А. Гончар, "Полюсы строк таблицы Паде и мероморфное продолжение функций", *Матем. сб.*, **115(157)**:4 (1981), 590–613; A. A. Gončar, "Poles of rows of the Padé table and meromorphic continuation of functions", *Math. USSR-Sb.*, **43**:4 (1982), 527–546.
- [12] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966; G. M. Goluzin, *Geometric theory of functions of a complex variable*, Translations of Mathematical Monographs, **26**, AMS, Providence, R.I., 1969.
- [13] С. П. Суетин, "О полюсах m -й строки таблицы Паде", *Матем. сб.*, **120(162)**:4 (1983), 500–504; S. P. Suetin, "On poles of the m th row of a Pade table", *Math. USSR Sb.*, **48** (1984), 493–497.
- [14] E. Fabry, "Sur les points singuliers d'une fonction donnée par son développement de Taylor", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (3)*, **13**:3 (1896), 367–399.

- [15] L. Bieberbach, *Analytische Fortsetzung*, Springer-Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg, 1955; Л. Бибербах, *Аналитическое продолжение*, Наука, М., 1967.
- [16] С. П. Суетин, “Об одной обратной задаче для m -й строки таблицы Паде”, *Матем. сб.*, **124(166)**:2 (1984), 238–250; S. P. Suetin, “On an inverse problem for the m th row of the Padé table”, *Math. USSR-Sb.*, **52**:1 (1985), 231–244.
- [17] П. Л. Чебышёв, “О непрерывных дробях”, *Ученые зап. Имп. акад. наук*, **III** (1855), 636–664; P. Tchëbycheff, “Sur les fractions continues”, *Journ. de Math. Pures et Appl. Sér. 2.*, **3** (1858), 289–323; *Полное собрание сочинений*, Т. II, Изд-во АН СССР, М.–Л., 1948, 103–126.
- [18] A. Markoff, “Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues”, *Acta Math.*, **19** (1895), 93–104; А. А. Марков, “Два доказательства сходимости некоторых непрерывных дробей”, *Избранные труды по теории непрерывных дробей и теории функций, наименее уклоняющиеся от нуля*, Гостехиздат, М., 1948, 106–119.
- [19] Г. Сегё, *Ортогональные многочлены*, Физматгиз, М., 1962; G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., **23**, AMS, Providence, RI, 1959.
- [20] А. А. Гончар, “О сходимости аппроксимаций Паде для некоторых классов мероморфных функций”, *Матем. сб.*, **97(139)**:4(8) (1975), 607–629; A. A. Gončar, “On convergence of Padé approximants for some classes of meromorphic functions”, *Math. USSR-Sb.*, **26**:4 (1975), 555–575.
- [21] Е. А. Рахманов, “О сходимости диагональных аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **104(146)**:2 (1977), 271–291; E. A. Rahmanov, “Convergence of diagonal Padé approximants”, *Math. USSR-Sb.*, **33**:2 (1977), 243–260.
- [22] С. П. Суетин, “Аппроксимации Паде и эффективное аналитическое продолжение степенного ряда”, *УМН*, **57**:1 (2002), 45–142; S. P. Suetin, “Padé approximants and efficient analytic continuation of a power series”, *Russ. Math. Surv.*, **57**:1 (2002), 43–141.
- [23] S. Dumas, *Sur le développement des fonctions elliptiques en fractions continues*, These, Zürich, 1908.
- [24] В. И. Буслаев, “О гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса в теории аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 25–38; V. I. Buslaev, “On the Baker–Gammel–Wills conjecture in the theory of Padé approximants”, *Sb. Math.*, **193**:6 (2002), 811–823.
- [25] С. П. Суетин, “Об асимптотических свойствах полюсов диагональных аппроксимаций Паде для некоторых обобщений марковских функций”, *Матем. сб.*, **193**:12 (2002), 105–133; S. P. Suetin, “Approximation properties of the poles of diagonal Padé approximants for certain generalizations of Markov functions”, *Sb. Math.*, **193** (2002), 1837–1866.
- [26] С. П. Суетин, “Об интерполяционных свойствах диагональных аппроксимаций Паде эллиптических функций”, *УМН*, **59**:4 (2004), 201–202; S. P. Suetin, “On interpolation properties of diagonal Padé approximants of elliptic functions”, *Russ. Math. Surv.*, **59** (2004), 800–802.
- [27] J. Nuttall, “Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials”, *J. Approx. Theory*, **42** (1984), 299–386.
- [28] H. Stahl, “Orthogonal polynomials with complex valued weight function, I, II”, *Constr. Approx.*, **2** (1986), 225–240; 241–251.
- [29] С. П. Суетин, “О сходимости чебышёвских непрерывных дробей для эллиптических функций”, *Матем. сб.*, **194**:12 (2003), 63–92; S. P. Suetin, “Convergence of Chebyshev continued fractions for elliptic functions”, *Sb. Math.*, **194**:12 (2003), 1807–1835.
- [30] А. А. Гончар, “Аналитическая функция”, *Математическая энциклопедия*, Изд-во “Советская энциклопедия”, Москва, 1977, 261–268.

- [31] Е. М. Чирка, “Аналитическое продолжение”, *Математическая энциклопедия*, Изд-во “Советская энциклопедия”, Москва, 1977, 283–285.
- [32] J. Nuttall, “Sets of minimal capacity, Padé approximations and the bubble problem”, *Bifurcation phenomena in mathematical physics and related topics*, Proceedings of the NATO Advanced Study Institute held at Cargese, June 24–July 7, 1979, NATO Advanced Study Institute Series. Ser. C: Mathematical and Physical Sciences, **54**, eds. C. Bardos, D. Bessis, Reidel, Dordrecht-Boston, Mass., 1980, 185–201.
- [33] I. V. Andrianov, “Application of Padé-approximants in perturbation methods”, *Adv. in Mech.*, **14**:2 (1991), 3–25.
- [34] I. V. Andrianov, J. Awrejcewicz, “New trends in asymptotic approaches: summation and interpolation methods”, *Appl. Mechanics Reviews*, **54**:1 (2001), 69–92.
- [35] З. И. Крупка, В. Г. Новиков, В. Б. Уваров, *Применение метода суммирования степенных рядов с помощью аппроксимаций Паде для расчета зонной структуры спектра электронов в веществе*, Препринт № 44 за 1985 г., Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, Москва, 1985; Z. I. Krupka, V. G. Novikov, V. B. Uvarov, *Application of the method of summation of power series by means of Padé approximants for calculation of the zone structure of the electron spectrum in matter*, no. 44, 21 pp., Akad. Nauk SSSR Inst. Prikl. Mat. Preprint, 1985 (Russian).
- [36] J. M. McNamee, “A 2002 update of the supplementary bibliography on roots of polynomials”, *J. Comput. Appl. Math.*, **142**:2 (2002), 433–434.
- [37] А. А. Дородницын, “Асимптотическое решение уравнения Ван-дер-Поля”, *Прикл. матем. и механ.*, **11**:3 (1947), 313–328; A. A. Dorodnicyn, *Asymptotic solution of van der Pol’s equation*, Amer. Math. Soc. Translation, **88**, 1953.
- [38] Д. В. Христофоров, “О сходимости диагональных аппроксимаций Паде для эллиптических функций”, *Матем. сб.*, **200**:6 (2009), 143–160; D. V. Khristoforov, “On uniform approximation of elliptic functions by Pade approximants”, *Sb. Math.*, **200** (2009), 923–941.

С. П. Суетин (S. P. Suetin)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: suetin@mi.ras.ru

Дата последнего
обновления: 10.09.2009