

Кратно-транзитивные действия алгебраических групп и разложения тензорных произведений

В. Л. Попов

Математический институт им В. А. Стеклова РАН, Москва

International Workshop
«ACTUAL PROBLEMS OF THE THEORY OF ALGEBRAIC GROUPS», September 16–18,
2019, Herzen University, St. Petersburg, Russia

Обозначения:

k — основное алгебраически замкнутое поле, $\text{char } k = 0$.

G — связная односвязная полупростая алгебраическая группа.

B — борелевская подгруппа в G .

T — максимальный тор в B .

P_+ — моноид доминантных относ. B весов в $\text{Hom}_{\text{alg}}(T, \mathbb{G}_m)$.

$\varpi_1, \dots, \varpi_r$ — система фундаментальных весов в P_+ (в нумерации Бурбаки).

Обозначения:

Для любого доминантного веса

$$\lambda = m_1 \varpi_1 + \cdots + m_r \varpi_r, \quad \text{где } m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

обозначим:

$\text{supp } \lambda := \{i \mid m_i \neq 0\}$ — носитель веса λ .

E_λ — простой G -модуль со старшим весом λ .

v_λ — старший (относительно B) вектор в E_λ .

P_λ — параболическая подгруппа в G , являющаяся G -стабилизатором порожденной вектором v_λ прямой в E_λ .

$c_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}^\mu$ — кратность вхождения E_μ в $E_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes E_{\lambda_d}$ (коэффициент Литтлвуда–Ричардсона):

$$c_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}^\mu := \dim(\operatorname{Hom}_G(E_\mu, E_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes E_{\lambda_d}))$$

Определение

Набор $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in (P_+ \setminus \{0\})^d$ называется примитивным, если

$$c_{n_1\lambda_1, \dots, n_d\lambda_d}^0 \leq 1 \quad \text{для всех } (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d,$$

т.е.

$$\dim(E_{n_1\lambda_1} \otimes \dots \otimes E_{n_d\lambda_d})^G \leq 1 \quad \text{для всех } (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^d.$$

Свойства примитивных наборов $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in (P_+ \setminus \{0\})^d$
(вытекают из определения):

(1) $(\lambda_{\varepsilon(1)}, \dots, \lambda_{\varepsilon(d)})$ примитивен для любой перестановки ε множества $1, \dots, d$.

(2) $(\sigma(\lambda_1), \dots, \sigma(\lambda_s))$ примитивен для любого автоморфизма σ моноида $(P_+ \setminus \{0\})^d$, индуцированного автоморфизмом схемы Дынкина группы G .

(3) $(\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_s})$ примитивен для любого подмножества $i_1, \dots, i_s$ множества $1, \dots, d$.

(4) $(c_1 \lambda_1, \dots, c_d \lambda_d)$ примитивен для любых целых положительных чисел $c_1, \dots, c_d$.

Пример 1.

- Если $d = 1$, то всякий набор примитивен.
- Если $d = 2$, то всякий набор примитивен, поскольку

$$c_{\mu, \nu}^0 = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu^* = \nu, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases} \quad (1)$$

(ввиду леммы Шура и изоморфизма $(E_\mu \otimes E_\nu)^G \simeq \text{Hom}_G(E_{\mu^*}, E_\nu)$)

Пример 2.

$$G = \mathrm{SL}_2.$$

В этом случае $P_+ = \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_1$ и $G/P_\lambda = \mathbb{P}^1$ для любого $\lambda \neq 0$.

Из формулы Клебша–Гордана

$$E_{s\varpi_1} \otimes E_{t\varpi_1} \simeq \bigoplus_{0 \leq i \leq t} E_{(s+t-2i)\varpi_1}, \quad s \geq t,$$

следует, что

$$\text{набор } (\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in (P_+ \setminus \{0\})^d \text{ примитивен} \iff d \leq 3. \quad (2)$$

Замечание

Классический факт: SL_2 действует на $(\mathbb{P}^1)^d$ с открытой орбитой $\iff d \leq 3$. Это совпадение с правой частью (2) не случайно!

Пример 3.

G — исключительная простая группа типа E_6 . Известно, что

$$E_{s\varpi_1} \otimes E_{t\varpi_1} \simeq \bigoplus_{\begin{cases} a_1, \dots, a_4 \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \\ a_1 + a_3 + a_4 = s \\ a_2 + a_3 + a_4 = t \end{cases}} E_{(a_1+a_2)\varpi_1 + a_3\varpi_3 + a_4\varpi_6}. \quad (3)$$

Т.к. $((a_1 + a_2)\varpi_1 + a_3\varpi_3 + a_4\varpi_6)^* = a_4\varpi_1 + a_3\varpi_5 + (a_1 + a_2)\varpi_6$,
из (3) и (1) следует, что $\dim(\bigotimes_{1 \leq i \leq 4} E_{n_i\varpi_i})^G$ есть число целых неотрицательных решений следующей системы линейных уравнений от $a_1, \dots, a_4, b_1, \dots, b_4$:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_4 = b_1 + b_2, \\ a_3 = 0, \\ b_3 = 0, \\ a_1 + a_2 = b_4, \\ a_1 + a_3 + a_4 = n_1, \\ a_2 + a_3 + a_4 = n_2, \\ b_1 + b_3 + b_4 = n_3, \\ b_2 + b_3 + b_4 = n_4. \end{array} \right.$$

Т.к. это—невырожденная система, она имеет не более одного такого решения.

Вывод: набор $(m_1\varpi_1, m_2\varpi_1, m_3\varpi_1, m_4\varpi_1)$ примитивен для любых целых положительных чисел m_1, m_2, m_3, m_4 .

Замечание

Классический факт (Шевалле): G действует на $(G/P_{\varpi_1})^4$ с открытой орбитой.

Рассмотрим G -орбиту старшего вектора v_λ в E_λ :

$$\mathcal{O}_\lambda := Gv_\lambda.$$

Ее замыкание $\overline{\mathcal{O}_\lambda}$ в E_λ — это конус с вершиной в 0 , содержащий ровно две орбиты: $\mathcal{O}_\lambda$ и 0 . Этот конус является нормальным аффинным алгебраическим многообразием с единственной особой точкой 0 .

Т.о., любому набору $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in (P_+ \setminus \{0\})^d$ сопоставляется два алгебраических G -многообразия:

—гладкое проективное многообразие

$$G/P_{\lambda_1} \times \cdots \times G/P_{\lambda_d},$$

—нормальное аффинное многообразие

$$X_{\lambda_1, \dots, \lambda_d} := \overline{\mathcal{O}_{\lambda_1}} \times \cdots \times \overline{\mathcal{O}_{\lambda_d}}.$$

Определение

(Алгебраическое) действие алгебраической группы H на неприводимом алгебраическом многообразии X называется

—обильным, если поле $k(X)^H$ алгебраично над полем частных алгебры $k[X]^G$.

—стабильным, если H -орбиты точек непустого открытого подмножества в X замкнуты в X .

Замечание

Пусть H редуктивна, а X аффинно.

- Действие обильно тогда и только тогда, когда

$$\dim(X//H) = \dim(X) - \max_{x \in X} \dim(Hx).$$

- В случае нормального X действие обильно тогда и только тогда, когда $k(X)^G$ является полем частных алгебры $k[X]^G$.
- Из стабильности действия следует его обильность.

Следующая теорема придает задаче классификации примитивных наборов геометрический характер:

Теорема

Пусть $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in (\mathbb{P}_+ \setminus \{0\})^d$.

(i) Если в $G/P_{\lambda_1} \times \dots \times G/P_{\lambda_d}$ имеется открытая G -орбита, то набор $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ примитивен.

(ii) Если набор $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ примитивен, а действие группы G на $X_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}$ обильно, то в $G/P_{\lambda_1} \times \dots \times G/P_{\lambda_d}$ имеется открытая G -орбита.

Поскольку

$$P_\mu = P_\nu \iff \operatorname{supp}(\mu) = \operatorname{supp}(\nu),$$

из этой теоремы получается

Следствие

Пусть для наборов $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ и $(\mu_1, \dots, \mu_d) \in (P_+ \setminus \{0\})^d$ выполнено условие:

$$\operatorname{supp}(\lambda_i) = \operatorname{supp}(\mu_i) \quad \text{для всех } i.$$

Если набор $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ примитивен, а действие группы G на многообразии $X_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}$ обильно, то и набор $(\mu_1, \dots, \mu_d)$ примитивен.

Поскольку G не может действовать на $G/P_{\lambda_1} \times \cdots \times G/P_{\lambda_d}$ с открытой орбитой при $d > \dim G$, эта теорема показывает, что примитивные наборы не могут быть слишком длинными, т.е.

$$m_G := \sup\{d \mid \text{существует примитивный набор длины } d\} < \infty$$

Имеются более тонкие оценки, чем тривиальная оценка $m_G \leq \dim G$:

Теорема

Пусть G — простая группа, действующая с открытой орбитой на многообразии $G/P_{\lambda_1} \times \cdots \times G/P_{\lambda_d}$. Тогда $d \leq b_G$, где число b_G задано следующей таблицей:

тип G	A_ℓ	B_ℓ	C_ℓ	D_ℓ	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
b_G	$\ell + 2$	$\ell + 1$	$\ell + 1$	ℓ	4	4	4	3	3

В частности,

$$m_G \leq b_G.$$

Замечание

Можно показать, что для типа A_ℓ эта оценка точная. Более того, если $G = \mathrm{SL}_{\ell+1}$, то

$$\begin{aligned}\ell + 2 &= \text{максимум длин примитивных наборов} \\ &= \max\{d \mid \text{существует } G/P_{\lambda_1} \times \cdots \times G/P_{\lambda_d} \\ &\quad \text{с открытой } G\text{-орбитой}\}\end{aligned}$$

Т.о., ввиду предыдущей теоремы, задача классификации примитивных наборов $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in (P_+ \setminus \{0\})^d$ приводит к следующим двум задачам:

Задача (Open): Классировать наборы

$(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in (P_+ \setminus \{0\})^d$, обладающие свойством:

в $G/P_{\lambda_1} \times \dots \times G/P_{\lambda_d}$ есть открытая G -орбита (Open)

Задача (Ample): Классировать наборы

$(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in (P_+ \setminus \{0\})^d$, обладающие свойством:

действие G на $X_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}$ обильно. (Ample)

О задаче (Open)

- $d = 1$ или 2 :

В этих случаях свойство (Open) выполнено для любого набора (при $d = 1$ по тривиальной причине, при $d = 2$ ввиду разложения Брюа).

- $d = 3$:

В этом случае полная классификация наборов со свойством (Open) не известна. Однако много информации получено при дополнительных ограничениях:

Для простой G в следующих случаях найдено когда в $G/P_{\lambda_1} \times G/P_{\lambda_2} \times G/P_{\lambda_3}$ имеется только конечное число G -орбит (а потому выполнено свойство (Open)):

- при $G = \mathrm{SL}$ и Sp (P. Magyar, J. Weyman, A. Zelevinsky),
- при $P_{\lambda_1} = B$ (P. Littelmann).

В комбинации с предыдущей теоремой это дает:

Теорема

Пусть $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in (\mathbb{P}_+ \setminus \{0\})^3$. Положим $s_i := \text{supp}(\lambda_i)$. Тогда набор $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ примитивен в каждом из следующих случаев:

G — группа типа A_ℓ

по.	условие
1	$s_1 = \{1\}$
2	$ s_1 = s_2 = 1$
3	$ s_1 = s_2 = 1; s_3 = 2$
4	$ s_1 = 1, s_2 = 2; s_3 = 3$
5	$ s_1 = 1; s_2 = 2; s_3 = 4$
6	$s_1 = \{2\}; s_2 = 2; s_3 \geq 2$
7	$ s_1 = 1; s_2 = \{i, i+1\}$ или $\{1, j\}, i < \ell, j \neq 1; s_3 \geq 2$

G — группа типа B_ℓ

но.	условие
8	$s_1 = \{1\}; s_2 = \{1, \dots, \ell\}$
9	$s_1 = s_2 = \{\ell\}; s_3 = \{1, \dots, \ell\}$

Пример. Случай 9 означает, что

$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (a_\ell \varpi_\ell, b_\ell \varpi_\ell, c_1 \varpi_1 + \dots + c_\ell \varpi_\ell),$$

где a_ℓ , b_ℓ и все c_i — положительные целые числа.

G — группа типа C_ℓ

но.	условие
10	$s_1 = s_3 = \{\ell\}$
11	$s_1 = \{\ell\}; s_2 = \{i\}, i \neq \ell; s_3 = \{j\}, j \neq \ell$
12	$s_1 = \{\ell\}; s_2 = \{i\}, i \neq \ell; s_3 = \{j, m\}, j \neq m$
13	$s_1 = \{\ell\}; s_2 = \{1\}; s_3 \neq \{\ell\}$
14	$s_1 = \{1\}; s_2 = \{i\}, i \neq \ell; s_3 \neq \{\ell\}$

G — группа типа D_ℓ

но.	условие
15	$s_1 = \{1\}; s_2 = \{1, \dots, \ell\}$
16	$s_1 = \{\ell - 1\}; s_2 = \{\ell\}; s_3 = \{1, \dots, \ell\}$
17	$s_1 = \{\ell\}; s_2 = \{\ell\}; s_3 = \{1, \dots, \ell\}$
18	$s_1 = \{3\}; s_2 = \{\ell\}; s_3 = \{1, \dots, \ell\}$

G — группа типа E_6

но.	условие
19	$s_1 = \{1\}; s_2 = \{i\}, i \neq 4; s_3 = \{1, \dots, 6\}$

G — группа типа E_7

но.	условие
20	$s_1 = \{1\}$ или $\{2\}$ или $\{7\}; s_2 = \{7\}; s_3 = \{1, \dots, 7\}$

- $d \geq 3$

Следующая теорема дает полное решение задачи 1 для случая, когда G проста, а все параболические $P_{\lambda_1}, \dots, P_{\lambda_d}$ совпадают и являются максимальными, т.е.

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_d) = (m_1 \varpi_i, \dots, m_d \varpi_i),$$

где $(m_1, \dots, m_d) \in \mathbb{Z}_{>0}^d$. Эквивалентно:

$$P_{\lambda_1} = \dots = P_{\lambda_d} = P_{\varpi_i}.$$

Theorem

Пусть G — простая группа и $d \geq 3$. Следующие свойства эквивалентны:

(1) Кратное многообразие флагов $(G/P_{\varpi_i})^d$ содержит открытую G -орбиту.

(2) G , d и i удовлетворяют условиям:

тип G	$A_\ell, \ell \geq 1$	$B_\ell, \ell \geq 3$	$C_\ell, \ell \geq 2$	$D_\ell, \ell \geq 4$	E_6	E_7
усло- вие	$d < \frac{(\ell+1)^2}{i(\ell+1-i)}$	$d = 3,$ $i = 1, \ell$	$d = 3,$ $i = 1, \ell$	$d = 3,$ $i = 1, \ell - 1, \ell$	$d \leq 4,$ $i = 1, 6$	$d = 3,$ $i = 7$

Следствие

Пусть группа G проста. Тогда для любых целых положительных чисел $m_1, \dots, m_d$ набор

$$(m_1 \varpi_i, \dots, m_d \varpi_i)$$

примитивен, если d и i удовлетворяют указанным в предыдущей таблице условиям.

Пример 4:

Если G имеет тип E_6 , то можно взять $d = 4$, $i = 1$. Это дает полученный выше вычислениями Пример 3.

Следствие

Пусть G — простая группа. Тогда взятый по всем i максимум f_G длин d примитивных наборов вида

$$(m_1 \varpi_i, \dots, m_d \varpi_i).$$

задается следующей таблицей

тип G	A_ℓ	B_ℓ	C_ℓ	D_ℓ	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
f_G	$\ell + 2$	3	3	3	4	3	2	2	2

О задаче (Ample)

Полное решение задачи (Ample) известно в случае, когда все веса $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ пропорциональны фундаментальным:

Теорема

Пусть

$$\lambda_s \in \mathbb{Z}_{>0} \varpi_{i_s}, \quad s = 1, \dots, d,$$

Тогда действие группы G на многообразии $X_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}$ обильно.

Отсюда вытекают следующие критерии примитивности для примитивных наборов такого вида:

Следствие

Пусть

$$\lambda_s \in \mathbb{Z}_{>0} \varpi_{i_s}, \quad s = 1, \dots, d,$$

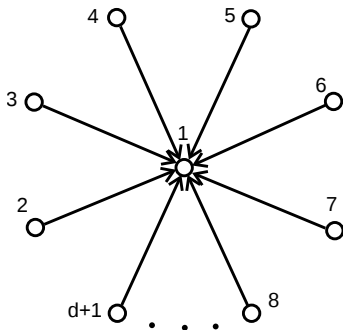
Тогда следующие свойства эквивалентны:

- (a) В $G/P_{\lambda_1} \times \dots \times G/P_{\lambda_d}$ имеется открытая G -орбита.
- (b) Набор $(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ примитивен.
- (c) Существуют такие целые положительные числа $m_1, \dots, m_d$, что набор $(m_1 \lambda_1, \dots, m_d \lambda_d)$ примитивен.
- (d) Набор $(\varpi_{i_1}, \dots, \varpi_{i_d})$ примитивен.

Связь с теорией представлений колчанов:

Алгоритмическое определение примитивности набора
 $(\varpi_{i_1}, \dots, \varpi_{i_d})$ в случае $G = \mathrm{SL}_n$

Рассмотрим следующий колчан $\mathcal{V}_d$:



Определенное колчаном $\mathcal{V}_d$ эйлеровское внутреннее произведение $\langle \cdot | \cdot \rangle$ на $\mathbb{Z}^d$ имеет вид

$$\langle (x_1, \dots, x_{d+1}) | (y_1, \dots, y_{d+1}) \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_{d+1} y_{d+1} - y_1 (x_2 + \dots + x_{d+1}).$$

Для любого вектора

$$\alpha := (a_1, \dots, a_{d+1}) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^{d+1},$$

положим $GL_\alpha := GL_{a_1} \times \dots \times GL_{a_{d+1}}$ (где $GL_0 := \{e\}$). Пусть

$$\text{Rep}(\mathcal{V}_d, \alpha) := \text{Mat}_{a_1 \times a_2} \oplus \dots \oplus \text{Mat}_{a_1 \times a_{d+1}}$$

— пространство представлений колчана $\mathcal{V}_d$ размерности α . Оно снабжено естественным действием группы GL_α .

Всякое представление из $\text{Rep}(\mathcal{V}_d, \alpha)$ раскладывается в сумму однозначно определенных (по теореме Крулля–Шмидта) неразложимых представлений. Если $\beta_1, \dots, \beta_s \in \mathbb{Z}^d$ — их размерности, то

$$\alpha = \beta_1 + \dots + \beta_s. \quad (\text{CD})$$

Для всех представлений из непустого открытого подмножества в $\text{Rep}(\mathcal{V}_d, \alpha)$ правая часть равенства (CD) будет одна и та же; в этом случае равенство (CD) называется каноническим разложением вектора α .

Имеется быстрый комбинаторный алгоритм (Н. Derksen, J. Weuman) эффективного нахождения разложения канонического разложения (другой алгоритм предложил А. Schofield).

Из определений вытекает

Предложение

Для $G = \mathrm{SL}_n$ следующие свойства эквивалентны:

- (a) В $G/P_{\varpi_{i_1}} \times \cdots \times G/P_{\varpi_{i_d}}$ имеется открытая G -орбита.*
- (b) При $\alpha := (n, i_1, \dots, i_d)$, в пространстве $\mathrm{Rep}(\mathcal{V}_d, \alpha)$ имеется открытая GL_α -орбита.*

Это предложение вместе с предыдущим следствием дают теорему, алгоритмически решающую вопрос о примитивности набора $(\varpi_{i_1}, \dots, \varpi_{i_d})$:

Theorem

Пусть $G = \mathrm{SL}_n$. Следующие свойства эквивалентны:

- (i) Набор $(\varpi_{i_1}, \dots, \varpi_{i_d})$ примитивен.
- (ii) Для каждого слагаемого β_j в каноническом разложении (CD) вектора $\alpha := (n, i_1, \dots, i_d)$ выполнено равенство

$$\langle \beta_j | \beta_j \rangle = 1.$$

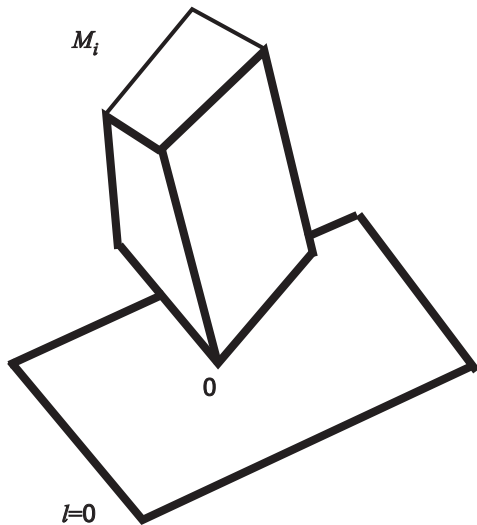
Вернемся к задаче (AMPLE).

В общем случае имеется достаточное условие стабильности (а, следовательно, обильности) действия группы G на многообразии $X_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}$. Оно использует следующее понятие:

Определение

Пусть $\mathcal{S}$ — конечное множество подмножеств $M_1, \dots, M_d$ в n -мерном вещественном векторном пространстве L . Говорят, что $\mathcal{S}$ обладает разделяющим свойством, если для любой ненулевой линейной формы ℓ на L найдется такое M_i из $\mathcal{S}$, что

$$\ell|_{M_i \setminus \{0\}} > 0.$$



Определение

Пусть $\mathcal{S}$ обладает разделяющим свойством.

Индексом разделения множества $\mathcal{S}$ называется число

$$\text{sep } \mathcal{S} := \min |\mathcal{R}|,$$

где $\mathcal{R}$ пробегает все подмножества в $\mathcal{S}$, обладающие разделяющим свойством.

Пример.

Пусть L наделено структурой евклидова пространства и выполнены два свойства:

(a) $L = \bigcup_{i=1}^d M_i.$

(b) Для любого M_i и любых ненулевых векторов $v, u \in M_i$ угол между v и u острый.

Тогда $\mathcal{S}$ обладает разделяющим свойством.

Важный частный случай:

Множество S замкнутых камер любой конечной неприводимой линейной группы W , порожденной отражениями в L , обладает указанными свойствами. Поэтому определено число

$$\text{sep } W := \text{sep } S,$$

называемое индексом разделения группы W .

В частности, определен разделяющий индекс группы Вейля любой простой связной алгебраической группы G . Он называется индексом разделения группы G и обозначается

$$\text{sep } G.$$

Приложение: стабильность действия G на $X_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}$:

Теорема

Пусть G — простая группа и $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in (P_+ \setminus \{0\})^d$. Если

$$d \geq \text{sep } G,$$

то действие группы G на многообразии $X_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}$ стабильно (и, следовательно, обильно), а G -стабилизатор точки общего положения в $X_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}$ конечен.

Задача (Sep)

Найти число $\text{sep } W$ для всех неприводимых конечных линейных групп, порождённых отражениями.

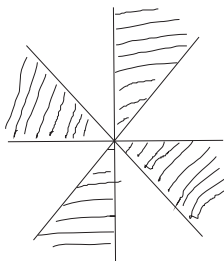
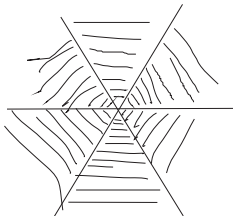
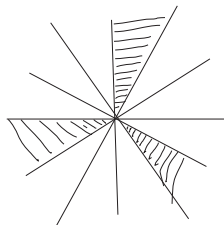
Пример: $n = 2$

$$\text{sep } A_1 = 2,$$

$$\text{sep } A_2 = 6,$$

$$\text{sep } B_2 = 4,$$

$$\text{sep } G_2 = 3$$

A_2  B_2  G_2

Заштриховано множество камер, обладающее разделяющим свойством и содержащее минимальное число камер.

Что известно о задаче (Sep):

$$\text{sep } A_\ell = \ell(\ell + 1),$$

$$\text{sep } B_\ell = \text{sep } C_\ell \leq 2^{\ell+1} - 2,$$

$$\text{sep } D_\ell \leq \begin{cases} (202/3)2^{\ell-3} - 4/3 & \text{для четного } \ell \geq 4, \\ (725/3)2^{\ell-4} - 4/3 & \text{для нечетного } \ell \geq 5, \end{cases}$$

$$\text{sep } F_4 \leq 30,$$

$$\text{sep } E_6 \leq 242,$$

$$\text{sep } E_7 \leq 4610,$$

$$\text{sep } E_8 \leq 9222,$$

$$\text{sep } H_3 \leq 14,$$

$$\text{sep } H_4 \leq 30,$$

$$\text{sep } G_2 = 3$$

Оценки сверху для B_ℓ , D_ℓ , E_ℓ , F_4 , H_ℓ получены В. Жгуном и Д. Мироновым. Точное значение $\text{sep } A_\ell$ нашел Ф. Петров.

Приложение: кратко-транзитивные действия

Пусть H — связная линейная алгебраическая группа, и $\gamma: H \times X \rightarrow X$ — ее алгебраическое действие на алгебраическом многообразии X .

n -транзитивность действия γ означает, что

- (а) в X^n имеется открытая H -орбита $\mathcal{O}$;*
- (б) границей орбиты $\mathcal{O}$ в X^n является объединение диагоналей $\bigcup_{i \neq j} \{(x_1, \dots, x_n) \in X^n \mid x_i = x_j\}$.*

Классификация n -транзитивных действий при $n \geq 2$:

- При $n \geq 4$ их нет.
- При $n = 3$ это только действие PGL_2 на $\mathbf{P}^1$.
- При $n = 2$ и редуктивной группе H это только действие PGL_{m+1} на $\mathbf{P}^m$.

Условие (b) на границу орбиты $\mathcal{O}$ в контексте действий алгебраических групп не является естественным. Это приводит к такому определению:

Определение

Действие γ называется n -транзитивным на точках общего положения (generically n -transitive), если в X^n имеется открытая H -орбита.

Следующие числа (степени транзитивности на точках общего положения) можно рассматривать как “меры свободы” действия γ и группы H .

Определение (степень транзитивности действия α на точках общего положения)

$$\text{gtd}(\gamma) := \sup\{n \mid \text{в } X^n \text{ имеется открытая } H\text{-орбита}\}$$

Определение (степень транзитивности группы G на точках общего положения)

$$\text{gtd}(H) := \sup_{\gamma} \text{gtd}(\gamma)$$

Вычисление $\text{gtd}(H)$

Теорема

Пусть H — неединичная связная линейная алгебраическая группа.

(a) *Если H разрешима, то $\text{gtd}(H) \leq 2$.*

(b) *Если H нильпотентна, то $\text{gtd}(H) = 1$.*

(c) *Если H редуктивна и $\tilde{H} \rightarrow H$ — изогения, то $\text{gtd}(\tilde{H}) = \text{gtd}(H)$.*

(c) *Если Z — тор, а $S_1, \dots, S_d$ — связные простые алгебраические группы, то*

$$\text{gtd}(Z \times S_1 \times \cdots \times S_d) = \max_i \text{gtd}(S_i).$$

Теорема

Пусть H — связная неабелева редуктивная алгебраическая группа. Тогда в H существует такая максимальная параболическая подгруппа P , что для естественного действия γ группы H на многообразии H/P имеет место равенство

$$\text{gtd}(H) = \text{gtd}(\gamma).$$

В случае полупростой группы G обозначим через γ_i естественное действие группы G на многообразии G/P_{ϖ_i} .

Для любых целых положительных чисел i, ℓ , где $i \leq \ell$, положим

$$m_{\ell i} := \max \left\{ a \in \mathbb{N} \mid a < \frac{(\ell + 1)^2}{i(\ell + 1 - i)} \right\}.$$

Теорема

Числа $\text{gtd}(\gamma_i)$ для связных простых алгебраических групп G задаются следующей таблицей:

тип G	A_ℓ	B_ℓ	C_ℓ	D_ℓ
$\text{gtd}(\gamma_i)$	$m_{\ell i}$	2 при $i \neq 1, \ell$ 3 при $i = 1, \ell$	2 при $i \neq 1, \ell$ 3 при $i = 1, \ell$	2 при $i \neq 1, \ell - 1, \ell$ 3 при $i = 1, \ell - 1, \ell$

тип G	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$\text{gtd}(\gamma_i)$	2 при $i \neq 1, 6$ 4 при $i = 1, 6$	2 при $i \neq 7$ 3 при $i = 7$	2	2	2

Теорема

Числа $\text{gtd}(G)$ для связных простых алгебраических групп G задаются следующей таблицей:

тип G	A_ℓ	B_ℓ	C_ℓ	D_ℓ	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$\text{gtd}(G)$	$\ell + 2$	3	3	3	4	3	2	2	2

Другие достаточные геометрические условия стабильности G -действия на $X_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}$

Будем рассматривать $\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(T, \mathbb{G}_m)^d$ как решетку в рациональном векторном пространстве $\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(HT, \mathbb{G}_m)^d \otimes \mathbb{Q}$, а $(P_+)^d$ как подмоноид в этой решетке.

Положим

$$\Gamma(G, d) := \{(\mu_1, \dots, \mu_d) \in (P_+)^d \mid (E_{\mu_1} \otimes \dots \otimes E_{\mu_d})^G \neq 0\}.$$

Пример

$$\Gamma(G, 1) = \{0\}$$

Пример

$$\Gamma(G, 2) = \{(\mu, \mu^*) \mid \mu \in P_+\}.$$

Пример

Положим

$$\mathrm{LR}(G, 3) := \{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3^*) \in \Gamma(G, 3)\}.$$

Тогда $\mathrm{LR}(\mathrm{SL}_n, 3)$ — полугруппа Литтлвуда–Ричардсона порядка n (в терминологии А. Зелевинского). Она интенсивно изучалась Р. Belkale, М. Karovich, J. Millson, S. Kumar, N. Ressayre).

Найдена минимальная система неравенств, определяющих натянутый на нее конус в $\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(T, \mathbb{G}_m)^3 \otimes \mathbb{Q}$, описаны его стенки и доказано, что $\mathrm{LR}(\mathrm{SL}_n, 3)$ является пересечением этого конуса с решеткой $\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(T, \mathbb{G}_m)^3$ (saturation conjecture). Исследовались также $\Gamma(\mathrm{Sp}_4, 3)$ and $\Gamma(\mathrm{G}_2, 3)$, $\Gamma(\mathrm{Spin}_8, 3)$.

В этих примерах $\Gamma(G, d)$ — конечно порожденный подмоноид в $(P_+)^d$. На самом деле это всегда так, а именно:

Рассмотрим G как диагональную подгруппу в G^d , а $(P_+)^d$ — как полугруппу доминантных весов группы G^d . Однородное пространство G^d/G является аффинным алгебраическим многообразием. Рассмотрим разложение G^d -модуля $k[G^d/G]$ в сумму ненулевых изотипных компонент $k[G^d/G]_\lambda$, где $\lambda \in (P_+)^d$:

$$k[G^d/G] = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} k[G^d/G]_\lambda.$$

Теорема

$$\Lambda = \Gamma(G, d).$$

Следствие

$\Gamma(G, d)$ — конечно порожденный подмоноид в $(P_+)^d$.

Задачи

- Какими неравенствами задается конус $\text{cone}(\Gamma(G, d))$ в $\text{Hom}_{\text{alg}}(HT, \mathbb{G}_m)^d \otimes \mathbb{Q}$?
- Каково описание стенок этого конуса?
- Какова минимальная система образующих этого моноида $\Gamma(G, d)$?

Приложение к стабильности

Theorem

Пусть $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in (\mathbb{P}_+ \setminus \{0\})^d$. Действие G на $X_{\lambda_1, \dots, \lambda_d}$ стабильно, если выполнено любое из следующих геометрических условий:

- (i) $\text{int}(\text{cone}(\Gamma(G, d))) \cap \text{int}(\text{cone}(\{(\lambda_1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, \lambda_d)\})) \neq \emptyset$.
- (ii) Существует такое i , что

$$\dim(\text{cone}(\{\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_i, \dots, \lambda_d\})) = \text{rk}(G),$$
$$\lambda_i^* \in \text{int}(\text{cone}(\{\lambda_1, \dots, \hat{\lambda}_i, \dots, \lambda_d\}));$$

- (iii) $\{1, \dots, d\}$ является объединением таких непересекающихся подмножеств $\{i_1, \dots, i_s\}$ and $\{j_1, \dots, j_t\}$, что

$$\dim(\text{cone}(\{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_s}\})) = \dim(\text{cone}(\{\lambda_{j_1}, \dots, \lambda_{j_t}\})) = \text{rk}(G),$$
$$\text{int}(\text{cone}(\{\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_s}\})) \cap \text{int}(\text{cone}(\{\lambda_{j_1}^*, \dots, \lambda_{j_t}^*\})) \neq \emptyset.$$

Сформулированные выше без указания авторства результаты получены в работах

V. L. Popov, *Generically multiple transitive algebraic group actions*, Proceedings of the International Colloquium on Algebraic Groups and Homogeneous Spaces (Mumbai, 2004), Tata Institute of Fundamental Research, 19, Narosa Publishing House, Internat. distrib. by American Mathematical Society, New Delhi, 2007, 481–523

V. L. Popov, *Tensor product decompositions and open orbits in multiple flag varieties*, J. Algebra, 313:1 (2007), 392–416