Семинар по истории математики ПОМИ РАН

Санкт-Петербургский парадокс: математика и экономика

А.А. Кудрявцев,
докт. экон. наук, профессор кафедры статистики и эконометрики СПбГЭУ (Финэк),
ответственный актуарий

Общая характеристика

- Санкт-Петербургский парадокс – математическая задача из области теории вероятностей с искусственными условиями
- В сентябре 2013 г. исполнилось 300 лет
- *Математическое значение*: первый пример случайной величины с бесконечным математическим ожиданием
- *Экономическое значение* (современная интерпретация): предтеча теорий ожидаемой полезности

Особенности формулировки

- Задача была сформулирована в терминах азартной игры
- Первоначально – в терминах бросков кости, позже – в терминах бросков монеты
- В конкретной численной форме (указывались конкретные суммы выигрышей)
- Это – стандартный дизайн формулировки теоретико-вероятностных задач того времени
- В реальной жизни в такую игру не играли

История формулировки: начало

- Первоначально сформулирована *Николаем Бернулли* (1687 – 1759), двоюродным братом *Даниила Бернулли*, в письме от 9 сентября 1713 г. французскому математику *Пьеру Ремону де Монмору* (1678 – 1719)
- Последний опубликовал это письмо во втором издании своей книги «*Опыт анализа азартных игр*» в том же году (в составе переписки по соответствующим вопросам)
- Формулировка была в терминах бросков кости
- Решения задачи там не было

История формулировки и решения – 1

- Задача обсуждалась в переписке математиков
- Швейцарский математик *Габриэль Крамер* (1704 – 1752) в письме от 21 мая 1728 г. Николаю Бернулли, автору задачи, предложил:
  – упрощенную формулировку (в терминах бросков монеты, закрепившейся в последующей литературе)
  – некоторые решения (опубликованные потом Даниилом Бернулли в его классической статье)

История формулировки и решения – 2

- *Даниил Бернулли* (1700 – 1782) работал над решением задачи независимо
- Его знаменитая статья была написана в 1730 г. или в 1731 г. и опубликована только в 1738 г. в «Заметках Императорской Петербургской Академии наук»
- О решениях Крамера он узнал только в 1732 г., когда Николай Бернулли переслал ему копию письма Крамера

История формулировки и решения – 3

- Место публикации дало основание французскому математику *Жану д'Аламберу* (1717 – 1783) назвать в 1768 г. данную задачу «Санкт-Петербургской»
- Но в момент публикации Даниил Бернулли уже работал в Базеле и гипотетически мог опубликовать работу в другом месте
- Габриэль Крамер работал в Женеве
- Поэтому *гипотетически* задача могла получить и другое имя

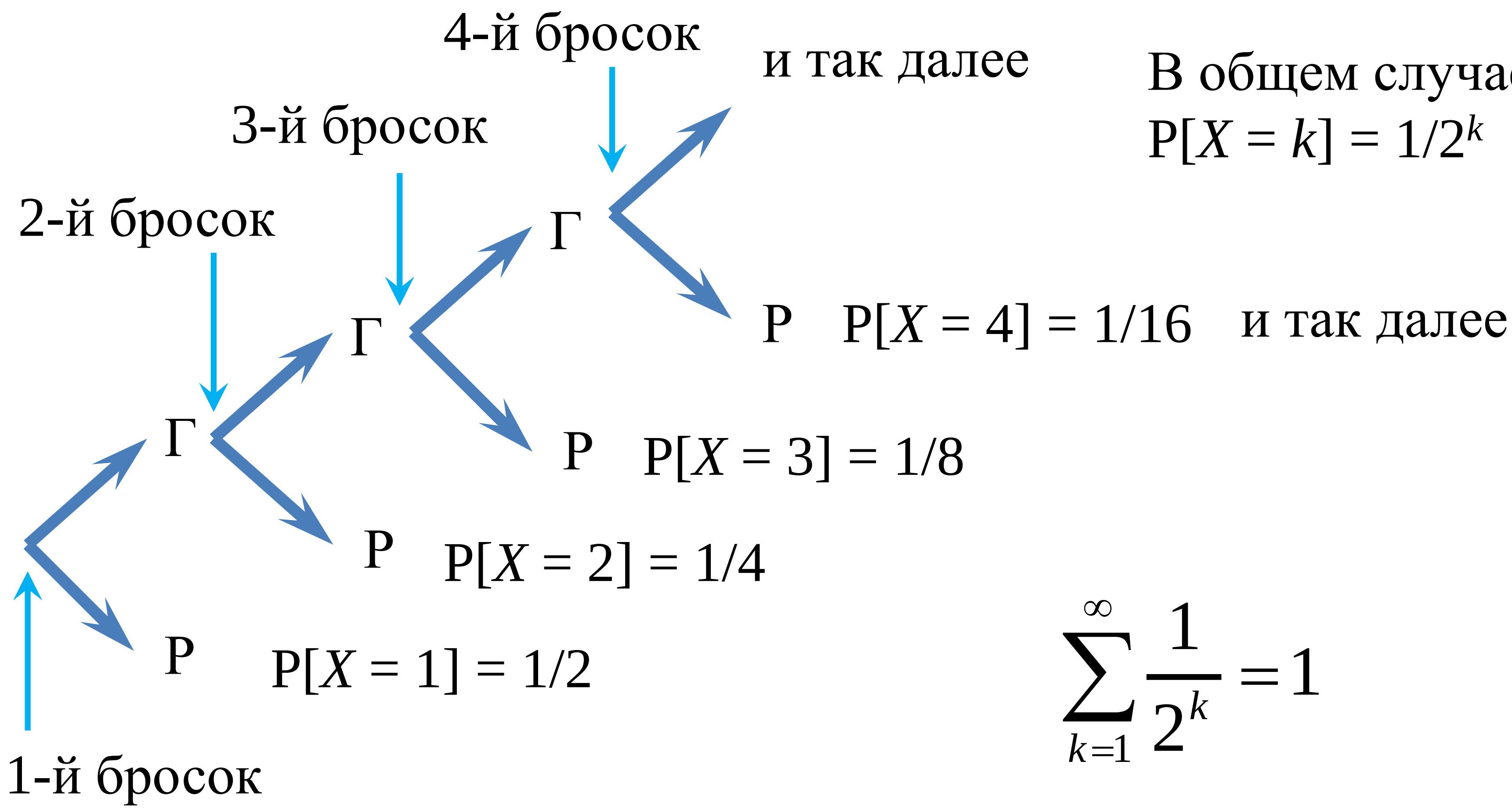
Даниил Бернулли

- Родился 8 февраля 1700 г. в Гронингене (Нидерланды)
- Умер 17 марта 1782 г. в Базеле (Швейцария)
- В 1725 – 1733 годах работал в Петербургской академии наук (тогда – Академия наук и художеств в Санкт-Петербурге)
- Внес большой вклад в математику и физику
- В силу того, что Санкт-Петербургская задача сыграла важную роль в экономике, его иногда объявляют экономистом

Формулировка Санкт-Петербургского парадокса

- Подкидывается симметричная монета до первого выпадения решки (номинала)
- Если решка выпала после первого броска, то платится 1 ден.ед.; если после второго, то 2 ден.ед.; после третьего, то 4 ден.ед. и т.д.
- Сколько требуется заплатить для участия в игре?
- Первоначально математическое ожидание воспринималось как «цена игры»

Описание Санкт-Петербургского парадокса



В общем случае
$P[X = k] = 1/2^k$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

Почему парадокс?

- Выигрыш x_k на k-м броске равен 2^{k-1}
- Вероятность выигрыша равна 2^{-k}
- Тогда математическое ожидание равно

$$\mathrm{E}\left[X\right]=\sum_{k=1}^{\infty} x_k \,\mathrm{P}\left[X=k\right]=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^{k-1}}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}=\infty$$

- В XVIII веке это воспринималось как *парадокс* (цена азартной игры бесконечна)
- В настоящее время это – просто пример случайной величины с бесконечным математическим ожиданием

Решение – 1

- Предложенные решения состояли в такой модификации исходов, чтобы математическое ожидание стало конечным
- Первое решение Г. Крамера:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{x_k}\, \mathrm{P}[X = k] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{(k-1)/2}}{2^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{(k+1)/2}} < \infty$$

- Второе решение Г. Крамера:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \min\left\{x_k;\, 2^c\right\} \mathrm{P}[X = k] = \sum_{k=1}^{c} \frac{2^{k-1}}{2^k} + \sum_{k=c+1}^{\infty} \frac{2^c}{2^k} < \infty$$

- Решение Д. Бернулли:

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \ln x_k\, \mathrm{P}[X = k] = \ln 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{2^k} < \infty$$

Решение – 2

- В современных обозначениях
$$EU = \sum_{k=1}^{\infty} u(x_k)\, p_k$$
- Из этой формулы возникло понятие «морального ожидания», т.е. субъективной оценки исхода
- Оно некоторое время конкурировало с понятием математического ожидания
- Экономисты позже использовали совершенно аналогичную идею в рамках теории ожидаемой полезности

Математические дискуссии

- Санкт-Петербургский парадокс достаточно широко обсуждался в математической литературе
- Даже сейчас время от времени в математических статьях встречаются ссылки на него
  - Удобный пример случайной величины с бесконечным математическим ожиданием
  - Иллюстрация связи сходящихся рядов с теорией вероятностей

Обзор К. Менгера

- До начала XX века Санкт-Петербургский парадокс оставался на периферии интереса экономистов
- Положение изменилось после публикации подготовленного *Карлом Менгером* (1903 – 1975) обзора математических результатов дискуссии о Санкт-Петербургском парадоксе
- Там же он попытался обсудить *экономическое содержание* парадокса, введя его в оборот экономической науки

Карл Менгер

- Родился 13 января 1903 г. в Вене (Автро-Венгрия)
- Умер 5 октября 1985 г. в гор. Хайленд-Парк (США)
- Сын знаменитого экономиста Карла Менгера (1840 – 1921), основателя австрийской школы
- Известен работами в области теории игр, теории графов (теорема его имени), автор губки Менгера
- Сыграл важную (но косвенную) роль в развитии экономики

История публикации

- Первоначальный вариант написан в 1923 г.
- Затем он был переделан в доклад для Венского кружка
- Доклад сделан в 1927 г.
- Венский кружок – междисциплинарный семинар в Вене, из которого вырос неопозитивизм
- Статья опубликована в 1934 г. в ведущем экономическом журнале Zeitschrift für Nazionalökonomie (сейчас Journal of Economics)

Влияние обзора К. Менгера

- Публикация в экономическом журнале привела к тому, что на Санкт-Петербургский парадокс стали ссылаться в экономической литературе
- До второй Мировой войны в основным указывали на убывающую производную, связывая это с убывающей предельной полезностью
- После создания теории игр и теории ожидаемой полезности проводят параллели с последней (такая ссылка стала чуть ли не обязательной)

Собственный вклад К. Менгера

- Подверг критике
  - кажущуюся парадоксальность результата
  - решения, предложенные Д.Бернулли и Г.Крамером
- Истинный смысл парадокса, по К. Менгеру, состоит в несоответствии математической модели и наблюдаемого поведения
- Переместил акцент на нахождение адекватной дескриптивной модели поведения в условиях неопределенности
- Анализировал проблему ограниченности функции полезности

Супер-петербургская игра

- В случае $u(x_k) = 2^{k-1}$ предложенной модификации исходов недостаточно для сходимости ряда
- Такой случай по предложению экономиста Пола Самуэльсона (1915 – 2009) принято называть *супер-петербургской игрой*
- Менгер обсуждал ограниченные функции
- В частности функцию, предложенную Г.Э. Тимердингом (1873 – 1945)

$$u(x) = \frac{u_{\max} x}{u_{\max} + x}$$

Обзор К. Менгера

- Выделил три основных группы решений Санкт-Петербургского парадокса
    1) применение теории полезности,
    2) учет ограничений реального мира
    3) модификация вероятностей
- Экономическая (поведенческая) интерпретация математических решений, данная К. Менгером, являются основой для разработки экономических теорий поведения в условиях риска и неопределенности *до настоящего времени*

Модификация исходов случайной величины с помощью функции полезности

- Идентичность неоклассическому подходу в экономической теории
- Наиболее тесно связан с теорией ожидаемой полезности
- Обсуждение ограниченной функции полезности
- Это породило дискуссию и необходимых и достаточных условиях

Ограничения реального мира

- Бесконечные последовательности не возможны
- Ограниченными являются
  - Капитал
  - Время
- Теоретико-вероятностный (частотный) аргумент: наблюдаемые выигрыши и выборочное среднее будут всегда конечными
- Введение понятия «готовность платить»

Модификация вероятностей – 1

- Модифицируются не исходы, а вероятности:

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \pi(p_k)$$

- Восходит, по-видимому, к Николаю Бернулли, автору задачи
- Высказывалась д’Аламбером
- Активно предлагал де Бюффон, известный идеей геометрической вероятности и первыми вероятностными экспериментами

Модификация вероятностей – 2

- В экономике и бизнесе первоначально была популярна именно модификация исходов
- Но с конца 70-х набирают силу концепции, основанные на модификации вероятностей
- Иногда смешанные концепции

$$u_P(\bar{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} u(x_k)\pi(p_k)$$

- Примеры:
  – теория ранговой ожидаемой полезности
  – деформированные распределения в современном количественном риск-менеджменте

Современные интерпретации идей Д.Бернулли

- Связаны с финансами
  - Анализ денежных потоков (бесконечное математическое ожидание интерпретируется как признак возможности арбитража)
  - Выигрышные стратегии в казино («мартингал д’Аламбера»)
  - Внешняя схожесть с энтропийными мерами (отсюда некоторые стратегии профессиональных игроков в казино и косвенная связь с эконофизикой)
- Имеют ограниченную сферу применения

Является ли Д. Бернулли экономистом?

- На этот вопрос часто отвечают положительно:
  - М. Блауг (ведущий специалист по истории экономической теории) включил Д. Бернулли в список 100 наиболее влиятельных экономистов до Кейнса
  - П.А. Ватник (один из переводчиков статьи Бернулли на русский язык) написал статью «Даниил Бернулли – экономист»
- Но не все так однозначно…

Аргументы «за»

- Д.Бернулли привел в своей статье примеры экономического применения своего подхода
- Экономисты находят в статье Д. Бернулли большое число параллелей с собственными теориями
- Логика и математический инструментарий статьи Д. Бернулли хорошо соответствует логике и применяемым подходам современной теории полезности, применяемой для рисковых ситуаций

Аргументы «против»

- Во времена Д.Бернулли экономической науки в современном представлении не было
- Экономические исследования того времени, которые можно отнести к экономическим, занимались совсем другой проблематикой
- Имеется разрыв примерно в 200 лет между выходом статьи и началом ее интенсивного цитирования экономистами (хотя интеллектуальное влияние, скорее всего, всё же было)

Выводы

- Отказ признать Д.Бернулли экономистом
  - не умаляет его вклада в данную область (и тем более – в другие области)
  - не отрицает его интеллектуального влияния на экономистов (возможно, до начала XX века оно было, но это плохо доказуемо)
- Лично я все же склоняюсь к тому, что Д.Бернулли экономистом не был
- Просто он и его последователи-математики задали экономистам интеллектуальные границы, за которые они пока выйти не могут

Ссылки

- Bernoulli D. Specimen theoriae novae de mensura sortis // Commentarii academiae imperialis Petropolitanae. 1738. T.V. P. 175 – 192 (Рус. перевод: Бернулли Д. Опыт новой теории измерения жребия. В кн.: Теория потребительского спроса. СПб.: Экон. школа, 1993. С.11–27)
- Menger K. Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre // Zeitschrift für Nationalökonomie. 1934. Band V. Heft 4. S. 459 – 485 (Англ. перевод: Menger K. The role of uncertainty in economics. In: Essays in mathematical economics in honor of Oskar Morgenstern. Princeton, NJ: Princeton university press, 1967. P. 211–231)