УДК 517.53

А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин

Сходимость нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва для многозначных аналитических функций, вариация равновесной энергии и S-свойство стационарных компактов

Исследуется сходимость диагональных нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва для многозначных аналитических функций, заданных и вещественнозначных на единичном отрезке $[-1,1]$. Получен аналог классической теоремы Шталя с сходимости по емкости таких аппроксимаций в соответствующей "максимальной" области мероморфности заданной функции. Скорость сходимости этих рациональных функций на отрезке и в максимальной области мероморфности заданной функции характеризуется в терминах "стационарного" компакта для некоторой смешанной (гриново-логарифмической) теоретико-потенциальной задачи равновесия. Найдено предельное распределение точек интерполяции на отрезке $[-1,1]$ исходной функции нелинейной аппроксимацией Паде–Чебышёва.

Результаты работы были анонсированы в [22].

Библиография: 60 названий.

Ключевые слова: рациональные аппроксимации, многочлены Чебышёва, аппроксимации Паде, нелинейные аппроксимации Паде–Чебышёва, стационарный компакт, теорема Шталя, сходимость по емкости.

Содержание

§ 1. Введение

1.1. Пусть на единичном отрезке $E=[-1,1]$ задана вещественная функция f, голоморфная на E. Пусть $\{T_k(x)\}$ – полиномы Чебышёва (первого рода),

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 08-01-00317 и № 09-01-12160-офи-м) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-8033.2010.1).

© А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, 2011

ортонормированные на отрезке E по мере $d\tau(x)=(1-x^2)^{-1/2}\,dx$. Функции f соответствует ряд Фурье–Чебышёва:

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}c_kT_k(x),\qquad c_k=c_k(f)=\int_{-1}^{1}f(x)T_k(x)\,d\tau(x). \tag{1}$$

Для произвольного $\rho>1$ через Γ_ρ обозначим эллипс с фокусами в точках ±1 и суммой полуосей, равной ρ. Внутренность эллипса Γ_ρ обозначим через D_ρ; области D_ρ будем называть *каноническими* (относительно E). Так как функция f голоморфна на E ($f\in\mathscr{H}(E)$), то ряд (1) сходится к $f(x)$ локально равномерно в области $D(f)=D_\rho$, где $\rho=\rho_0(f)$ – индекс максимальной канонической области, в которую f продолжается как голоморфная функция. Область $D(f)$ – максимальная область сходимости ряда (1).

Для произвольного натурального числа n через $\mathscr{R}_n$ обозначим класс всех рациональных функций r вида $r=p/q$, где p,q – произвольные алгебраические полиномы степени $\leqslant n$, $q\not\equiv0$. Пусть функция f продолжается с отрезка E в область $G\supset E$ как (однозначная) мероморфная функция. Тогда для величины

$$\varepsilon_n(f)=\inf_{r\in\mathscr{R}_n}\|f-r\|_E \tag{2}$$

– наилучшего равномерного приближения f рациональными дробями класса $\mathscr{R}_n$ – справедливо *неравенство Уолша* (см. [60]):

$$\varlimsup_{n\to\infty}\varepsilon_n^{1/n}\leqslant q, \tag{3}$$

где

$$q=\exp\biggl\{-\frac{1}{C(E,\overline{\mathbb{C}}\setminus G)}\biggr\}<1, \tag{4}$$

$C(E,\overline{\mathbb{C}}\setminus G)$ – емкость конденсатора $(E,\overline{\mathbb{C}}\setminus G)$.

Неравенство (3) носит *универсальный характер* – оно неулучшаемо в классе *всех* функций, мероморфных в области G. Однако для некоторых вполне естественных классов функций неравенство Уолша (3) может быть существенно усилено.

Пусть $f=\widehat{\sigma}$, где $\widehat{\sigma}$ – *марковская функция*:

$$\widehat{\sigma}(z)=\int_c^d\frac{d\sigma(x)}{z-x},\quad z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus[c,d], \tag{5}$$

σ – положительная борелевская мера на отрезке $[c,d]\subset\mathbb{R}$, $[c,d]\cap E=\varnothing$. Если $\sigma'=d\sigma/dx>0$ почти всюду (п.в.) на $[c,d]$, то для наилучших рациональных аппроксимаций функции f имеем (см. [13])

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n^{1/n}=q^2, \tag{6}$$

где величина $q<1$ имеет тот же смысл, что и в (3) с заменой конденсатора $(E,\overline{\mathbb{C}}\setminus G)$ на конденсатор $(E,[c,d])$ (в соотношении (6) содержатся два утверждения: существование предела и информация о его величине). Таким образом, в классе марковских функций (5), голоморфных в области $G=\overline{\mathbb{C}}\setminus[c,d]$, вместо неравенства Уолша (3) имеет место существенно более сильное *равенство* (6). Соотношение (6) справедливо и для функций вида $f = \widehat{\sigma} + r$, где r – рациональная функций, голоморфная на E.

В серии работ 1985–1986 гг. Г. Шталь [46]–[50] (см. также [51], [53] и приложение 5) получил ряд результатов о сходимости классических и многоточечных аппроксимаций Паде для функций, голоморфных соответственно в точке $z=\infty$ и на фиксированном односвязном континууме в $\mathbb{C}$ и имеющих конечное число особых точек многозначного характера. Из его результата, относящегося к случаю континуума, и результатов работы [16] вытекает справедливость *равенства* (6) в классе функций, вещественных голоморфных на E и имеющих вне E конечное число особых точек многозначного характера. Точнее, обозначим через R_n наилучшие равномерные рациональные аппроксимации функции f на отрезке E в классе $\mathscr{R}_n$. Тогда справедлива следующая

Теорема Шталя (см. [49]–[50] и приложение 5). *Пусть функция f вещественнозначна и голоморфна на отрезке $E=[-1,1]$ и допускает мероморфное продолжение с отрезка в $\overline{\mathbb{C}}$ всюду за исключением конечного числа особых точек многозначного характера. Тогда существует единственный компакт $F=F(f)$, не пересекающийся с E и такой, что функция f мероморфна*[1] *в области $\overline{\mathbb{C}}\setminus F$ и для любого компакта $K\subset\overline{\mathbb{C}}\setminus(E\cup F)$*

$$\bigl|(f-R_n)(z)\bigr|^{1/n} \overset{\text{cap}}{\longrightarrow} e^{-2G_F^{\lambda}(z)}<1, \qquad z\in K. \tag{7}$$

В соотношении (7) λ – единичная мера с носителем на E, $G_F^{\lambda}(z)$ – гринов (относительно F) потенциал меры λ. Компакт F обладает так называемым S-свойством (см. (14)), не разбивает плоскость и состоит из конечного числа кусочно-аналитических дуг, а λ – равновесная мера (подробнее см. § 2). Непосредственно из (7) вытекает, что функция f продолжается с отрезка E в $\overline{\mathbb{C}}\setminus F$ как однозначная мероморфная функция. С учетом результатов работы [16] из (7) вытекает, что в условиях и обозначениях теоремы Шталя справедлив аналог равенства (6)

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n^{1/n}=q^2; \tag{8}$$

величина q имеет тот же смысл, что и в (3) с заменой конденсатора $(E,\overline{\mathbb{C}}\setminus G)$ на конденсатор (E,F), $F=F(f)$. Отметим, что S-симметричный компакт F является *стационарной точкой* некоторого функционала энергии (см. п. 2.2).

Обозначим через $\mu(Q)$ меру, ассоциированную с произвольным полиномом Q:

$$\mu(Q)=\sum_{\zeta:Q(\zeta)=0}\delta_\zeta,$$

где δ_ζ – мера Дирака с носителем в точке ζ. Пусть $\widetilde{\lambda}$ – выметание равновесной меры λ из области Шталя $D=\overline{\mathbb{C}}\setminus F$ на $F=\partial D$. Тогда в условиях теоремы Шталя для знаменателей $Q_n(z)$ рациональных функций R_n имеем:

$$\frac{1}{n}\mu(Q_n)\to\widetilde{\lambda}, \qquad n\to\infty, \tag{9}$$

[1] Точнее, функция f допускает мероморфное продолжение в $\overline{\mathbb{C}}\setminus F$, которое мы также будем обозначать через f.

где сходимость мер понимается в слабой топологии. Равновесная мера λ (с носителем на E) характеризует предельное распределение точек интерполяции функции f рациональной функцией R_n.

В связи с (9) (см. также (23) и приложение 5) напомним хорошо известную теорему Йенча–Сегё (см. [30], [57]) для наилучших равномерных *полиномиальных* аппроксимаций функции f, голоморфной на E.

Теорема Йенча–Сегё. *Пусть функция f голоморфна на отрезке E. Тогда существует бесконечная подпоследовательность $\Lambda = \Lambda(f) \subset \mathbb{N}$ такая, что для наилучших равномерных полиномиальных аппроксимаций P_n функции f имеет место соотношение:*

$$\frac{1}{n}\mu(P_n) \to \lambda_\Gamma, \qquad n \in \Lambda, \quad n \to \infty,$$

где

$$d\lambda_\Gamma(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\frac{|d\zeta|}{|\zeta^2 - 1|^{1/2}}, \quad \zeta \in \Gamma,$$

– равновесная мера для эллипса $\Gamma = \Gamma_{\rho_0(f)}$, $\rho_0(f)$ – индекс голоморфности функции f.

Таким образом, нули полиномов наилучшего равномерного приближения функции f в пределе моделируют максимальный эллипс голоморфности f, фактически "отрезая" внутренность этого эллипса от его внешней части. Аналогичный результат справедлив и для наилучших равномерных рациональных аппроксимаций функции f с *фиксированной* степенью знаменателя.

Отметим, что хорошо известный алгоритм Ремеза [43] (см. также [3], [44], [37]) позволяет практически находить наилучшие равномерные полиномиальные и рациональные аппроксимации *заданной* функции. Этот алгоритм реализован, например, в системе Maple. Однако процесс практического приближенного построения такой рациональной аппроксимации предполагает, что исходная функция f задана в виде явного аналитического (формульного) выражения.

1.2. Будем теперь считать, что вещественнозначная функция f *задана* на E (сходящимся) рядом Фурье–Чебышёва (см. [7]):

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(x), \qquad c_k = c_k(f) \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Отметим, что для частичных сумм S_n ряда (10) также справедлив аналог теоремы Йенча–Сегё:

$$\frac{1}{n}\mu(S_n) \to \lambda_\Gamma, \qquad n \in \Lambda' = \Lambda'(f), \quad n \to \infty.$$

Таким образом, нули частичных сумм ряда (10) в пределе также моделируют максимальный эллипс голоморфности f (см. рис. 1).

Рассмотрим следующую задачу. В классе $\mathscr{R}_n$ найти рациональную функцию F_n, голоморфную на отрезке E и удовлетворяющую следующему условию:

$$c_k(F_n) = c_k(f), \qquad k = 0, \dots, 2n. \tag{11}$$

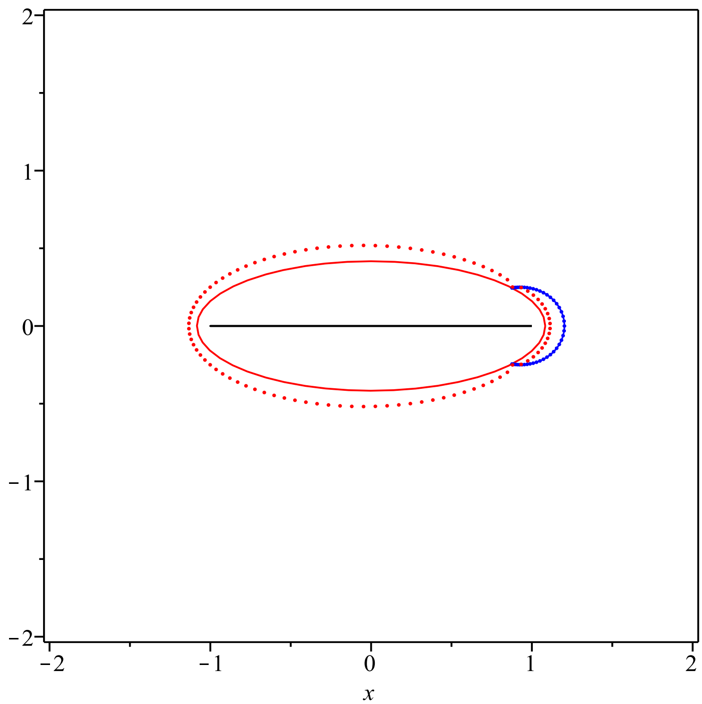

Рис. 1. Максимальный эллипс голоморфности (красная линия) функции $f(z) = \sqrt{(z-a)(z-\overline{a})}$, $\operatorname{Im} a > 0$, и расположение нулей (красные точки) частных сумм Фурье–Чебышёва S_{100} и полюсов и нулей (синие точки) нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва F_{50}.

Иными словами, разложение рациональной функции $F_n = P/Q$ в ряд Фурье–Чебышёва должно иметь вид

$$F_n(x) = c_0 + c_1 T_1(x) + \cdots + c_{2n} T_{2n} + \cdots . \tag{12}$$

Подлежат определению из системы (11) коэффициенты многочленов P и Q. Рациональная функция F_n (если она существует) называется *нелинейной* диагональной аппроксимацией Паде–Чебышёва функции f (аппроксимацией Паде ряда (10)).

Система (11) нелинейна относительно коэффициентов полиномов P и Q и не всегда имеет решение. Тем самым, нелинейная аппроксимация Паде–Чебышёва может не существовать. Так как полиномы Чебышёва являются полиномами Фабера для отрезка E, то существование нелинейной аппроксимации Паде–Чебышёва тесно связано с существованием аппроксимации Паде степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k w^k$, $c_k = c_k(f)$, обладающей определенными свойствами (см. прежде всего [54], а также [11], [55] и [32]). Отметим, что приведенное определение аппроксимации Паде–Чебышёва (далее – АЧП) основано на нелинейной (относительно коэффициентов искомой рациональной функции) схеме Бейкера определения классических аппроксимаций Паде степенного ряда. Второй способ определения АПЧ, основанный на линейной схеме Фробениуса, приводит к существенно другим результатам (см. [5; часть 2, § 1.6], а также [20], [21], [22]); сходимости *линейных* аппроксимаций Паде–Чебышёва будет посвящена работа [23]. В настоящей работе изучается сходимость *нелинейных* диагональных (типа (n,n)) АПЧ.

1.3. В связи с приведенной выше в п. 1.1 теоремой Шталя и соотношением (9) (ср. (23) и приложение 5) естественным образом возникает вопрос о сходимости нелинейных АПЧ для такого же класса аналитических функций, имеющих конечное число особых точек многозначного характера. Настоящая работа посвящена доказательсту аналога теоремы Шталя для нелинейных АПЧ. Сделаем в этой связи несколько замечаний.

1.3.1. В работах авторов [20] и [21] для общих ортогональных разложений были рассмотрены оба способа (Бейкера и Фробениуса) построения диагональных аппроксимаций Паде и доказаны теоремы о сходимости таких рациональных аппроксимаций для произвольной марковской функции (5) (см. ниже теорему A). Настоящая работа является естественным развитием работ [20] и [21] для случая нелинейных АПЧ: вместо марковской функции мы рассматриваем здесь произвольную функцию, вещественную и голоморфную на E и имеющую вне E конечное число особых точек многозначного характера. Основной результат настоящей работы – теорема 2 о скорости сходимости (по емкости) диагональных АПЧ для функций из указанного класса и о предельном распределении точек интерполяции функции f рациональной функцией F_n. Эта теорема является аналогом первой теоремы Шталя [49] (см. также приложение 5 к настоящей работе) о сходимости по емкости диагональных аппроксимаций Паде для функций, заданных (сходящимся) степенным рядом в точке $w=0$ и имеющих в $\overline{\mathbb{C}}_w$ конечное число особых точек многозначного характера (ср. теоремой Шталя для наилучших диагональных аппроксимаций). При доказательстве сходимости диагональных нелинейных АПЧ мы *используем эту первую теорему Шталя*: благодаря результатам работы [54] о нелинейных аппроксимациях Паде–Фабера, нелинейные АПЧ функции f оказываются связанными с аппроксимациями Паде степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k w^k$, $c_k = c_k(f)$, с помощью оператора Фабера–Чебышёва (подробнее см. п. 4.1–4.2). Тем самым *непосредственно из первой теоремы Шталя вытекает*, что рациональные функции F_n сходятся по емкости к функции f в дополнении к образу компакта Шталя при отображении, задаваемом функцией Жуковского $z = \operatorname{Zh}(w) := (w+1/w)/2$. Таким образом, основные доказанные здесь утверждения теоремы 2 состоят в следующем:

1) компакт F, обладающий S-свойством (14), существует, единствен и является стационарным компактом для функционала энергии (15) при $\theta = 1$; компакт F совпадает с образом первого компакта Шталя S, заданным в плоскости переменного w, при отображении с помощью функции Жуковского: $F = \operatorname{Zh}(S)$;

2) справедливо соотношение (22), характеризующее скорость сходимости рациональных аппроксимаций F_n к функции f на компактных подмножествах

области $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ в терминах гринова (относительно стационарного компакта F) потенциала равновесной меры λ; таким образом, для нелинейных АПЧ имеет место аналог формулы (7), но с другим S-симметричным компактом;

3) предельное распределение точек интерполяции исходной функции f рациональной функцией F_n вполне характеризуется мерой λ – равновесной мерой для стационарного компакта F, а предельное распределение полюсов F_n – мерой $\widetilde{\lambda}$ – выметанием λ из области $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ на F.

1.3.2. В [54] (см. также [11] и [55]) был изучен вопрос о существовании диагональных нелинейных аппроксимаций Паде–Фабера, частным случаем которых являются аппроксимации Паде–Чебышёва. Оказалось, что при заданном номере n существование такой аппроксимации тесно связано с существованием аппроксимации Паде степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k w^k$, $c_k = c_k(f)$, в смысле Бейкера и отсутствием у этой рациональной функции полюсов в замкнутом единичном круге $|w| \leqslant 1$. Эти условия выполняются заведомо не при любом n. Более того, в [55] приведен пример (основанный на контрпримере Буслаева [9], [10] к гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса) гиперэллиптической функции рода $g = 2$, для которой нелинейные АПЧ не существуют ни при одном $n \geqslant 2$. Однако контрпример Буслаева связан с некоторым “вырождением”: соответствующая гиперэллиптическая функция разлагается в периодическую непрерывную дробь. С другой стороны из работ [52] и [56] вытекает, что в “типичной” ситуации для достаточно широкого класса аналитических функций, включающего в себя все “типичные” гиперэллиптические функции, всегда существует некоторая бесконечная подпоследовательность (зависящая от выбранной функции), для которой требуемые условия выполняются. Тем самым для соответствующего класса многозначных функций, полученных с помощью преобразования Жуковского $z = \mathrm{Zh}(w)$, нелинейные АПЧ существуют по-крайней мере по некоторой подпоследовательности.

1.3.3. Через $M_1(E)$ обозначим множество всех единичных (положительных борелевских) мер, носители которых принадлежат E. Пусть K – произвольный компакт со связным дополнением в $\overline{\mathbb{C}}$ такой, что $K \cap E = \varnothing$ и область $D_K = \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ регулярна относительно решения задачи Дирихле, $g_K(z,t)$ – соответствующая области D_K функция Грина с особенностью в точке $z = t \in D_K$. Для меры $\mu \in M_1(E)$ определены логарифмический $V^\mu(z) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \log|z-x|^{-1}\,d\mu(x)$ и гринов (по отношению к компакту K) потенциалы: $G_K^\mu(z) = \displaystyle\int_{-1}^{1} g_K(z,x)\,d\mu(x)$ (полагаем $g_K(z,x) \equiv 0$ при $z \in K$, $x \in E$). Пусть $\theta \geqslant 0$ – произвольное фиксированное число. Для фиксированного компакта K существует *единственная* мера $\lambda(\theta) = \lambda_K(\theta) \in M_1(E)$, минимизирующая функционал энергии $J(K,\mu;\theta) = \displaystyle\int \bigl(\theta V^\mu(x) + G_K^\mu(x)\bigr)\,d\mu(x)$ в классе всех мер $\mu \in M_1(E)$. Мера $\lambda(\theta)$ и только эта мера (в классе $M_1(E)$) является *равновесной мерой* для смешанного (гриново-логарифмического) потенциала $\theta V^\mu(z) + G_K^\mu(z)$. Другими словами, мера $\lambda(\theta)$ – единственная мера из класса $M_1(E)$, для которой имеет место соотношение равновесия $\theta V^{\lambda(\theta)}(x) + G_K^{\lambda(\theta)}(x) \equiv w(\theta) = \mathrm{const}$, $x \in E$, $w(\theta) = w_K(\theta)$ – соответствующая *постоянная равновесия*; при этом $J(K,\mu;\theta) = w(\theta)$.

Теперь для фиксированной функции $f \in \mathscr{F}(E)$ (см. определения в п. 2.3) и произвольного параметра $\theta \in [0,+\infty)$ в классе $\mathscr{K}_f$ допустимых компактов K для f рассмотрим следующую теоретико-потенциальную задачу:

$$\sup_{K\in\mathscr{K}_f} \inf_{\mu\in M_1(E)} J(K,\mu;\theta) = \sup_{K\in\mathscr{K}_f} J(K,\lambda_K;\theta). \tag{13}$$

Если существует компакт $F = F(\theta) \in \mathscr{K}_f$, для которого достигается супремум в правой части (13), то этот F называется *стационарным компактом* для задачи (13). Значениям параметра $\theta = 0,1,3$ соответствуют различные теоретико-потенциальные задачи (13) и, вообще говоря, различные стационарные компакты $F(0), F(1), F(3)$. Эти компакты совпадают только в исключительных случаях, например, для марковской функции $f = \widehat{\sigma}$, носитель меры которой – отрезок вещественной прямой (см. [20], [21], [22], а также теорему A). При этом компакт $F(0)$ соответствует наилучшим рациональным аппроксимациям функции f, $F(1)$ – нелинейным АПЧ, $F(3)$ – линейным АПЧ, и все три стационарных (в заданном классе $\mathscr{K}_f$) компакта являются S-симметричными (иначе – обладают S-свойством):

$$\frac{\partial G_F^\lambda}{\partial n_+}(\zeta) = \frac{\partial G_F^\lambda}{\partial n_-}(\zeta), \qquad \zeta \in F_0, \tag{14}$$

где $F = F(\theta)$, $\lambda = \lambda_F(\theta) \in M_1(E)$ – соответствующая равновесная мера, F_0 – объединение всех открытых дуг, принадлежащих компакту F, $\partial/\partial n_\pm$ – нормальные производные, взятые с противоположных сторон F_0. Это свойство, тем самым, носит вполне универсальный характер.

1.3.4. Несмотря на проблему, связанную с существованием рациональной функции F_n, в системе Maple реализованы именно нелинейные АПЧ. Такие аппроксимации активно используются в приложениях (см., например, [31], [28], [8], [36], [58], [59]), они имеют преимущество перед линейными АПЧ, состоящее в том, что по заданным коэффициентам Фурье–Чебышёва $c_0, c_1, \dots, c_{2n}$ можно построить нелинейную АПЧ порядка (n,n), а линейную – только порядка (m,m), где $m = [2n/3]$ (подробнее см. [20], [21]; по поводу численных методов нахождения коэффициентов Фурье–Чебышёва см., например, [4]). Наилучшие равномерные рациональные аппроксимации *заданной* функции могут быть найдены с помощью хорошо известного алгоритма Ремеза [44]. Этот алгоритм также реализован в системе Maple. Однако процесс практического приближенного построения такой рациональной аппроксимации предполагает, что исходная функция f задана в виде явного аналитического (формульного) выражения. Конечного набора коэффициентов Фурье–Чебышёва для этого недостаточно (см. рис. 2–4).

В заключение отметим, в [23] будет изучена сходимость *линейных* АПЧ. В частности, будет показано, что для функция $f \in \mathscr{F}(E)$ при условии $\rho_0(f) > \sqrt{2}$ существует единственный S-симметричный компакт

$F = F(3) \in \mathscr{K}_f$. Ограничение $\rho_0(f) > \sqrt{2}$ связано со спецификой векторной теоретико-потенциальной задачи равновесия для параметра $\theta = 3$. А именно, параметрам $\theta = 0$, $\theta = 1$ и $\theta = 3$ соответствуют существенно разные векторные (размера 2×2) теоретико-потенциальные задачи равновесия. При $\theta = 0$ матрица взаимодействия имеет вид $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, при $\theta = 1$ матрица $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, при $\theta = 3$ матрица $A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

§ 2. Обозначения и формулировка основных результатов

2.1. Перейдем к точным определениям и обозначениям.

Через $M_1(E)$ обозначим множество всех единичных (положительных борелевских) мер, носители которых принадлежат E. Пусть K – произвольный компакт со связным дополнением в $\overline{\mathbb{C}}$ такой, что $K \cap E = \varnothing$ и область $D_K = \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ регулярна относительно решения задачи Дирихле, $g_K(z,t)$ – соответствующая области D_K функция Грина с особенностью в точке $z = t \in D_K$. Для меры $\mu \in M_1(E)$ определены логарифмический и гринов (по отношению к компакту K) потенциалы:

$$V^\mu(z) = \int_{-1}^{1} \log \frac{1}{|z-x|}\, d\mu(x), \qquad G_K^\mu(z) = \int_{-1}^{1} g_K(z,x)\, d\mu(x), \qquad z \notin E$$

(полагаем $g_K(z,x) \equiv 0$ при $z \in K$, $x \in E$). Пусть $\theta \geqslant 0$ – произвольное фиксированное число. Для фиксированного компакта K существует *единственная* мера $\lambda(\theta) = \lambda_K(\theta) \in M_1(E)$, минимизирующая функционал энергии

$$J(K,\mu;\theta) = \iint \left(\theta \log \frac{1}{|x-t|} + g_K(x,t)\right) d\mu(x)\, d\mu(t) = \int \bigl(\theta V^\mu(x) + G_K^\mu(x)\bigr)\, d\mu(x) \tag{15}$$

в классе всех мер $\mu \in M_1(E)$. Мера $\lambda(\theta)$ и только эта мера (в классе $M_1(E)$) является *равновесной мерой* для смешанного (гриново-логарифмического) потенциала $\theta V^\mu(z) + G_K^\mu(z)$. Другими словами, мера $\lambda(\theta)$ – единственная мера из класса $M_1(E)$, для которой имеет место соотношение равновесия

$$\theta V^{\lambda(\theta)}(x) + G_K^{\lambda(\theta)}(x) \equiv w(\theta) = \mathrm{const}, \qquad x \in E, \tag{16}$$

$w(\theta) = w_K(\theta)$ – соответствующая *постоянная равновесия*; при этом $J(K,\mu;\theta) = w(\theta)$.

2.2. В [20] и [21] была изучена сходимость нелинейных аппроксимаций F_n и аппроксимаций Фробениуса Φ_n для общих ортогональных разложений *марковских* функций

$$\widehat{\sigma}(z) = \int_F \frac{d\sigma(x)}{z-x}, \qquad z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus F, \tag{17}$$

где $F = [c,d] \subset \mathbb{R} \setminus E$, σ – положительная борелевская мера на F, $\sigma' = d\sigma/dx > 0$ почти всюду (п.в.) на F. Скорость сходимости последовательностей F_n и Φ_n к функции $f=\widehat{\sigma}$ в области $D=\overline{\mathbb{C}}\setminus[c,d]$ полностью характеризуется в терминах равновесной меры $\lambda(\theta)\in M_1(E)$ соответственно для $\theta=1$ и $\theta=3$ следующим образом.

Теорема А (см. [20], [21]). *Если $\sigma'>0$ п.в. на $F=[c,d]\subset\mathbb{R}\setminus E$, то локально равномерно в области $D\setminus E$*

$$\lim_{n\to\infty}\bigl|(\widehat{\sigma}-f_n)(z)\bigr|^{1/n}=e^{-2G_F^{\lambda(\theta)}(z)}<1, \tag{18}$$

где $\theta=1$ для $f_n=F_n$ и $\theta=3$ для $f_n=\Phi_n$.

Для наилучших в равномерной метрике на отрезке E рациональных аппроксимаций R_n функции $\widehat{\sigma}$ соотношение (18) справедливо с $\theta=0$ (см. [13]).

Обозначим через $\mu(Q)$ меру, ассоциированную с произвольным полиномом Q: $\mu(Q)=\sum\limits_{\zeta:Q(\zeta)=0}\delta_\zeta$, где δ_ζ – мера Дирака с носителем в точке ζ. Пусть $\widetilde{\mu}$ – выметание меры μ из области $\overline{\mathbb{C}}\setminus F$ на F. Тогда в условиях теоремы А для знаменателей $Q_n(z;\theta)$, $\theta=1,3,0$, соответствующих рациональных функций F_n,Φ_n,R_n имеем:

$$\frac{1}{n}\mu(Q_n(\cdot;\theta))\to\widetilde{\lambda}(\theta),\qquad n\to\infty, \tag{19}$$

где сходимость мер понимается в слабой топологии.

Отметим, что развитые в [20], [21] методы позволяют легко доказать аналог теоремы А (с заменой равномерной сходимости (18) на сходимость по емкости) и для случая, когда F состоит из нескольких отрезков, а $f=\widehat{\sigma}+r$, где $\widehat{\sigma}$ – марковская функция (17), r – вещественная рациональная функция, голоморфная на E.

2.3. Введем определения и обозначения, связанные с классом многозначных аналитических функций, рассматриваемых в настоящей работе. Напомним, что мы рассматриваем только функции, вещественные и голоморфные на единичном отрезке $E=[-1,1]$, которые имеют в дополнении к E конечное число особых точек многозначного характера.

Компакт K со связным дополнением D_K в $\overline{\mathbb{C}}$ будем называть *допустимым* для заданной многозначной аналитической функции f, если $K\cap E=\varnothing$ и f продолжается с отрезка E в область D_K как однозначная мероморфная функция. Множество всех допустимых компактов для функции f обозначим через $\mathscr{K}_f$.

Через $\mathscr{F}(E)$ обозначим класс функций f, вещественных и голоморфных на E и удовлетворяющих следующим двум условиям:

(1) существует конечное множество различных точек $\Sigma_f=\{b_1,\dots,b_m\}\subset\overline{\mathbb{C}}\setminus E$, $m=m(f)\geqslant 2$, такое, что: Σ_f симметрично относительно вещественной прямой; функция f продолжается (с отрезка E) как многозначная аналитическая функция в область $\overline{\mathbb{C}}\setminus\Sigma_f$; каждая точка $b_j\in\Sigma_f$ является точкой ветвления функции f;

(2) существует по-крайней мере один допустимый компакт $K\in\mathscr{K}_f$ такой, что K симметричен относительно вещественной прямой, состоит из конечного

числа кусочно аналитических дуг и на каждой открытой дуге, принадлежащей K, скачок функции f отличен от тождественного нуля.

Отметим, что классу $\mathscr{F}(E)$ принадлежат, например, следующие функции, не являющиеся марковскими:

$$\sqrt{(z-b)(z-\overline{b})}, \quad \sqrt[3]{(z-b)(z-\overline{b})(z-a)}, \quad \log\frac{z-b}{z-\overline{b}},$$

где $\operatorname{Im} b > 0$, $a \in \mathbb{R}\setminus E$ и выбрана надлежащая ветвь многозначной функции (см. рис. 2–4).

В дальнейшем функция $f \in \mathscr{F}(E)$ предполагается фиксированной.

2.4. Хорошо известно (см. [46]–[50], [16]), что при доказательстве сходимости диагональных аппроксимаций Паде для многозначных аналитических функций ключевую роль играет существование допустимого (для заданной функции) компакта, обладающего так называемым свойством *стационарности* для некоторого функционала энергии, соответствующего рассматриваемой задаче рациональной аппроксимации. Это понятие оказывается тесно связанным с соответствующей теоретико-потенциальной задачей равновесия, а стационарный компакт оказывается S-симметричным (иначе говоря, обладает S-свойством). Приведем определение S-свойства допустимого компакта, соответствующего рассматриваемой задаче равновесия (16).

Определение 1. Пусть параметр $\theta \geqslant 0$. Будем говорить, что (не разбивающий плоскость и состоящий из конечного числа кусочно-аналитических дуг) допустимый компакт $F = F(\theta) \in \mathscr{K}_f$ обладает *S-свойством* (или является S-симметричным), если:

$$\frac{\partial G_F^{\lambda}}{\partial n_+}(\zeta) = \frac{\partial G_F^{\lambda}}{\partial n_-}(\zeta), \qquad \zeta \in F_0, \tag{20}$$

где $\lambda = \lambda_F(\theta)$ – соответствующая равновесная мера, F_0 – объединение всех открытых дуг, принадлежащих компакту F, $\partial/\partial n_\pm$ – нормальные производные, взятые с противоположных сторон F_0.

Зафиксируем теперь параметр $\theta = 1$ и в дальнейшем в обозначениях будем как правило опускать указание на этот параметр. Пусть $\lambda = \lambda_K(1) \in M_1(E)$ – равновесная мера, соответствующая произвольному компакту $K \in \mathscr{K}_f$, $w = w_K(1)$ – соответствующая постоянная равновесия (см. (16)): $V^{\lambda}(x) + G_K^{\lambda}(x) \equiv w$, $x \in E$; при этом $J(K,\lambda) = \min\limits_{\mu\in M_1(E)} J(K,\mu) = w$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Если функция $f \in \mathscr{F}(E)$, то существует единственный компакт $F = F(1) \in \mathscr{K}_f$ такой, что*

$$J(F,\lambda_F) = \max_{K\in\mathscr{K}_f} J(K,\lambda_K). \tag{21}$$

Стационарный компакт F состоит из конечного числа кусочно-аналитических дуг, не разбивает плоскость и обладает S-свойством (20), где $\lambda_F = \lambda_F(1)$ – соответствующая равновесная мера.

Теорема 1 доказывается в два этапа в соответствии со следующей схемой. Сначала с помощью геометрических соображений, основанных на замене функционала энергии (15) меры $\lambda \in M_1(E)$ на обобщенный (по отношению к допустимому компакту $K \in \mathscr{K}_f$) трансфинитный диаметр E доказывается, что максимум в правой части (21) достаточно искать среди тех допустимых компактов, которые лежат вне максимального канонического эллипса голоморфности f. Такое семейство компактно в хаусдорфовой метрике, поэтому существует допустимый компакт F, удовлетворяющий соотношению (21). Затем с помощью вариационного метода аналогично [41] устанавливается, что этот экстремальный компакт F является замыканием критических траекторий некоторого квадратичного дифференциала. Отсюда уже вытекает S-свойство (20).

Справедлива следующая теорема о скорости сходимости рациональных аппроксимаций F_n к функции f в области $D = D_F = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$.

Теорема 2. *Пусть $f \in \mathscr{F}(E)$. Тогда для любого компакта $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus (E \cup F)$*

$$\bigl|(f - F_n)(z)\bigr|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} e^{-2G_F^{\lambda_F}(z)} < 1, \qquad z \in K, \tag{22}$$

где $F = F(1)$. При этом для точек интерполяции функции f рациональной функцией F_n на отрезке E и знаменателя Q_n имеем

$$\frac{1}{2n}\mu(\omega_{2n}) \to \lambda_F, \quad \frac{1}{n}\mu(Q_n) \to \widetilde{\lambda}_F, \qquad n \to \infty, \tag{23}$$

где ω_{2n} полином степени $2n+1$ с нулями в точках интерполяции, $\widetilde{\lambda}_F$ – выметание меры $\lambda_F \in M_1(E)$ из области D на $\partial D = F$.

Тем самым в условиях теоремы 2 последовательность $F_n \xrightarrow{\text{cap}} f$ на компактных подмножествах области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$.

Доказательство теоремы 2 основано на первой теореме Шталя (см. приложение 5) и общей схеме, предложенной в [46]–[50] и [16] и основанной на S-свойстве (20) соответствующего стационарного компакта. При доказательстве предельного соотношения (23) используется общая теоремы 3 работы [16] (для рассматриваемого здесь частного случая $\psi(z) = -V^\lambda(z)$). Отметим, что из (22) вытекает, что каждый полюс f в D притягивает по-крайней мере столько полюсов f_n, какова его кратность.

Таким образом, для функции f класса $\mathscr{F}(E)$ компакт $F(1)$ в случае нелинейных АПЧ играет роль отрезка $[c,d]$, соответствующего марковской функции $\widehat{\sigma}$, $\operatorname{supp}\sigma = [c,d]$ (см. (17)).

Еще раз отметим, что стационарный компакт $F(1)$ является образом компакта Шталя для степенного ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k w^k$, $c_k = c_k(f)$, при отображении, задаваемом функцией Жуковского $z = (w + w^{-1})/2$.

2.5. Если (для параметра $\theta = 1$) стационарный компакт $F = F(1)$, соответствующий функции $f \in \mathscr{F}(E)$, состоит из s непересекающихся аналитических дуг, попарно соединяющих некоторые точки ветвления $b'_1, \dots, b'_{2s} \in \Sigma_f$ функции f, то он допускает наглядное описание в терминах, связанных с *четырехлистной* римановой поверхностью рода $g = s - 1$.

Построим сначала двулистную риманову поверхность $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \cup \mathfrak{R}^{(2)}$ следующим образом. Возьмем два экземпляра римановой сферы $\overline{\mathbb{C}}$, разрезанных по отрезку $E = [-1, 1]$, и переклеим по разрезу. Полученная двулистная риманова поверхность $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \cup \mathfrak{R}^{(2)}$ эквивалентна римановой сфере. Определим на $\mathfrak{R}$ функцию $u(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}$, следующим образом: $u(z^{(1)}) = G_F^{\lambda_F}(z)$, $u(z^{(2)}) = w_F - V^{\lambda_F}(z)$. Непосредственно из условия равновесия (16) вытекает, что u – гармоническая функция на $\mathfrak{R} \setminus (F^{(1)} \setminus \{\infty^{(2)}\})$. Кроме того, $u \equiv 0$ на компакте $F^{(1)}$ и $u(z^{(2)}) = \log|z| + w_F + o(1)$ при $z^{(2)} \to \infty^{(2)}$. Возьмем теперь два экземпляра $\mathfrak{R}$, разрезанных по компакту $F^{(1)}$, и переклеим их между собой по соответствующим разрезам. Получим четырехлистную риманову поверхность $\mathfrak{R}_1$ рода $g = s - 1$. Так как $u \equiv 0$ на $F^{(1)}$, то u гармонически продолжается с одного экземпляра $\mathfrak{R}$ на другой с переменой знака. Продолженная функция гармонична на $\mathfrak{R}_1$ всюду кроме точек $\mathbf{z} = \infty^{(2)}, \infty^{(3)}$, где она имеет логарифмические особенности: $\log|z|$ при $\mathbf{z} \to \infty^{(2)}$ и $-\log|z|$ при $\mathbf{z} \to \infty^{(3)}$. Следовательно, $u(\mathbf{z}) = \operatorname{Re}\Omega(\mathbf{z})$, $\Omega(\mathbf{z}) = \displaystyle\int_{b_1}^{\mathbf{z}} d\Omega$, где $d\Omega(\mathbf{z})$ – (единственный) абелев дифференциал на $\mathfrak{R}_1$ с чисто мнимыми периодами и особенностью вида $1/z$ в точке $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$ и вида $-1/z$ в точке $\mathbf{z} = \infty^{(3)}$. Компакт F соответствует нулевой линии уровня функции $\operatorname{Re}\Omega(\mathbf{z})$: $F = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \operatorname{Re}\Omega(\mathbf{z}) = 0\} \setminus E$.

Отметим, что $u(\mathbf{z}) = g_{F^{(1)}}(\mathbf{z}, \infty^{(2)})$ – функция Грина для области $\mathfrak{R} \setminus F^{(1)}$ с особенностью в точке $\mathbf{z} = \infty^{(2)}$, а $w_F = \gamma^{(2)}$ – постоянная Робена для этой функции Грина. Тем самым задача о максимуме постоянной w_F соответствует задаче о минимуме $e^{-\gamma}$, т.е. минимуме логарифмической емкости.

Непосредственно из результатов работ [46]–[50] и [16] вытекает, что для *наилучших* в равномерной метрике на отрезке $[-1, 1]$ рациональных аппроксимаций $f_n = R_n$ функции $f \in \mathscr{F}(E)$ также справедливо соотношение вида (22), где $\theta = 0$, $F = F(0)$ – стационарный компакт, соответствующий задаче равновесия (16) с $\theta = 0$ и обладающий S-свойством (20), $\lambda = \lambda_F(0)$ – соответствующая равновесная мера. В этом случае функция $u(z^{(1)}) = w_F - G^{\lambda}(z)$ продолжается через разрез, проведенный по отрезку E, на второй лист римановой поверхности $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \cup \mathfrak{R}^{(2)}$ с переменой знака. Отсюда уже легко вытекает, что задача о максимуме постоянной w_F эквивалентна задаче о минимуме емкости конденсатора $(F^{(1)}, F^{(2)})$.

Таким образом, все три стационарных (в заданном классе $\mathscr{K}_f$) компакта $F(1), F(3), F(0)$ обладают S-свойством (20). Это свойство, тем самым, носит вполне универсальный характер.

§ 3. Доказательство теоремы 1

3.1. Пусть $K \in \mathscr{K}_f$ – допустимый компакт для функции $f \in \mathscr{F}(E)$: $K \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E$, состоит из конечного числа кусочно-аналитических дуг, не разбивает плоскость, $f \in \mathscr{M}(\overline{\mathbb{C}} \setminus K)$ и для любой дуги $\ell \subset K$ скачок $\Delta f \not\equiv 0$ на ℓ. Предположим также, что $\infty \notin K$, $\infty \notin \Sigma_f$.

Пусть $\lambda \in M_1(E)$ – равновесная мера для K:

$$V^{\lambda}(x) + G_K^{\lambda}(x) \equiv w_K, \qquad x \in E, \tag{24}$$

величина $w = w_K$ – “постоянная Робена” для K, e^{-w} – “емкость” компакта K (соответствующая энергии взаимодействия $J(\cdot)$; см. (15)). Пусть $\widetilde{\lambda}$ выметание равновесной меры λ на K. Рассмотрим функцию

$$v(z) := V^\lambda(z) + G^\lambda_K(z) + G^{\widetilde{\lambda}}_E(z) + g_E(z,\infty), \tag{25}$$

где $G^\mu_E(z)$ – гринов относительно E потенциал меры μ,

$$G^\mu_E(z) = \int g_E(z,\zeta)\,d\mu(\zeta), \qquad \operatorname{supp}\mu \subset \overline{\mathbb{C}} \setminus E,$$

$g_E(z,\zeta)$ – функция Грина для дополнения к отрезку E, $g_E(z,\infty) = \log|z + \sqrt{z^2-1}|$. Нетрудно видеть, что сумма $G^\lambda_K(z) + G^{\widetilde{\lambda}}_E(z)$ – функция, гармоническая вне E. Из (25) получаем, что и функция $v(z)$ гармонична в $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$. Из соотношения равновесия (24) вытекает, что $v(x) \equiv w_K$ при $x \in E$. Следовательно, $v(z) \equiv w_K$ при $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Отсюда для $z \in K$ получаем

$$w_K \equiv v(z) = V^\lambda(z) + G^{\widetilde{\lambda}}_E(z) + g_E(z,\infty), \qquad z \in K. \tag{26}$$

Но при $z \in K$ потенциал $V^\lambda(z) = V^{\widetilde{\lambda}}(z) - c_K$, где $c_K = \displaystyle\int_E g_K(x,\infty)\,d\lambda(x)$. Таким образом, из (26) получаем, что для выметания $\widetilde{\lambda} \in M_1(K)$ равновесной меры $\lambda \in M_1(E)$ справедливо равенство:

$$V^{\widetilde{\lambda}}(z) + G^{\widetilde{\lambda}}_E + g_E(z,\infty) \equiv \mathrm{const} = w_K + c_K =: w_E, \qquad z \in K. \tag{27}$$

Следовательно, мера $\widetilde{\lambda} \in M_1(K)$ является (единственной) равновесной мерой в классе $M_1(K)$ для потенциала $V^\mu(z) + G^\mu_E(z)$ с внешним полем $\varphi(z) = g_E(z,\infty)$. Таким образом, отображение $\lambda \to \widetilde{\lambda}$ задает взаимно однозначное соответствие между *равновесными* мерами для задач (24) и (27). Хорошо известно (см. [35], [14], [15], [16]), что равновесная мера и только эта мера в классе мер $\mu \in M_1(K)$ минимизирует соответствующий функционал энергии

$$\begin{aligned} J_\varphi(K,\mu) :&= \iint \left\{ \log\frac{1}{|z-\zeta|} + g_E(z,\zeta) \right\} d\mu(z)d\mu(\zeta) + 2\int \varphi(z)\,d\mu(z) \\ &= \int \left\{ V^\mu(z) + G^\mu_E(z) + \varphi(z) \right\} d\mu(z) + \int \varphi(z)\,d\mu(z) = w_E + c_E. \end{aligned} \tag{28}$$

При этом для соответствующих задачам (24) и (27) постоянных равновесия имеем: $w_K = w_E - c_K$. Так как $v(z) \equiv w_K$, то из (26) получаем, что $w_K = v(\infty) = \gamma_E + c_K + c_E$, где

$$c_K = \int_E g_K(x,\infty)\,d\lambda(x), \qquad c_E = \int_K g_E(\zeta,\infty)\,d\widetilde{\lambda}(\zeta),$$

$\gamma_E = \log 2$ – постоянная Робена для E. Отсюда с учетом (28) и равенства $w_K = \gamma_E + c_K + c_E$ уже легко получаем, что соответствующие равновесным мерам энергии связаны соотношением:

$$J_\varphi(K,\widetilde{\lambda}) = 2J(K,\lambda) - \gamma_E. \tag{29}$$

Непосредственно из (29) вытекает, что задача

$$\sup_{K\in\mathscr{K}_f}\ \inf_{\nu\in M_1(E)} J(K,\nu) \tag{30}$$

эквивалентна (при условии, что решение ищется среди допустимых компактов $K \not\ni \infty$) задаче

$$M = \sup_{K\in\mathscr{K}_f}\ \inf_{\mu\in M_1(K)} J_\varphi(K,\mu), \qquad \text{где} \qquad \varphi(z) = g_E(z,\infty). \tag{31}$$

Ниже мы докажем *существование* стационарного компакта F для задачи (31). В силу указанной эквивалентности это будет означать, что этот компакт F является стационарным компактом и для задачи (30) при условии, что $F \not\ni \infty$. Единственность такого компакта будет вытекать как обычно из сходимости АПЧ к функции $f \in \mathscr{M}(D_F)$. Условия $F \not\ni \infty$ и $\Sigma \not\ni \infty$ не являются ограничительными и носят чисто технический характер: их всегда можно добиться с помощью подходящего дробно линейного преобразования, сохраняющего отрезок E (пока речь идет не об аппроксимации ряда (1) рациональными функциями, а о теоретико-потенциальных задачах равновесия (30), (31)). Отметим, что непосредственно для исследования сходимости аппроксимаций нужно эквивалентное стационарности свойство S-симметрии компакта F. Как следует из определения (см. (20)), это свойство инвариантно относительно дробно-линейных преобразований и вообще не зависит от того, содержит компакт F точку $z = \infty$ или нет.

В заключение этого пункта приведем еще одну эквивалентную переформулировку экстремальной скалярной задачи (30) в виде матричной (размера 2×2) теоретико-потенциальной задачи равновесия (см. [16], [17]). Рассмотрим следующую векторную задачу равновесия в классе вектор-мер $\vec{\mu} = (\mu_1,\mu_2)$, $\mu_1 \in M_1(E), \mu_2 \in M_1(K)$, $K \in \mathscr{K}_f$:

$$\begin{aligned} 2V^{\mu_1}(x) - V^{\mu_2}(x) &\equiv w_1, \quad x\in E,\\ -V^{\mu_1}(z) + V^{\mu_2}(z) &\equiv w_2, \quad z\in K, \end{aligned} \tag{32}$$

с матрицей взаимодействия $A = \begin{pmatrix} 2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$. Векторная задача (32) эквивалентна скалярной задаче

$$V^\mu(x) + G_K^\mu(x) \equiv w, \qquad x\in E, \quad \mu\in M_1(E). \tag{33}$$

При этом решение $\vec{\lambda} = (\lambda_1,\lambda_2)$ задачи (32) связано с решением задачи (33) следующим образом: $\lambda_1 = \lambda$, $\lambda_2 = \widetilde{\lambda}$ – выметание меры $\lambda \in M_1(E)$ из $\overline{\mathbb{C}}\setminus K$ на K, а для соответствующих постоянных равновесия w_1, w_2 и w имеем: $w_2 = c_K(\lambda) = \int_E g_K(x,\infty)\,d\lambda(x)$, $w_1 = w - w_2$; тем самым, $w = w_1 + w_2$. Таким образом, скалярная экстремальная задача (30) может быть эквивалентным образом переформулирована в виде следующей векторной задачи (см. [19], [42])

$$\sup_{K\in\mathscr{K}_f}\ \inf_{\substack{(\mu_1,\mu_2),\\ \mu_1\in M_1(E),\mu_2\in M_1(K)}} J_A(K,\vec{\mu}), \tag{34}$$

где

$$J_A(K,\vec{\mu}) := (A\vec{\mu},\vec{\mu}) = \sum_{k,j=1}^{2} a_{k,j}[\mu_k,\mu_j], \quad [\mu_k,\mu_j] = \iint_{K\times K} \log\frac{1}{|z-\zeta|}\,d\mu_k(z)d\mu(\zeta).$$

3.2. Следующие п. 3.2–3.3 посвящены доказательству существования стационарного компакта для экстремальной задачи (31) и описанию некоторых его свойств, в том числе S-свойства (20). Схема изложения следующая. Сначала мы докажем, что решение экстремальной задачи (31) (т.е. стационарный компакт F) можно искать среди тех допустимых компактов, которые лежат вне максимального эллипса голоморфности функции f. Затем пользуясь тем, что такое подсемейство компактно в хаусдорфовой топологии мы докажем существование допустимого компакта, на котором достигается величина (31). Затем с помощью вариационного метода аналогично [41] доказывается, что экстремальный компакт является замыканием критических траекторий некоторого квадратичного дифференциала. Отсюда уже вытекает S-свойство (20). Отметим, что существует и другой подход к задаче о существовании и свойствах стационарного компакта. Этот подход основан на явном описании такого компакта в терминах некоторой алгебраической функции (см., например, [1], [2]).

В классе мер $\mu\in M_1(K)$ рассмотрим следующую задачу равновесия:

$$V^{\mu}(z)+G^{\mu}_E(z)+g_E(z,\infty)\equiv \mathrm{const}=\widetilde{w}, \qquad z\in K, \tag{35}$$

Существует единственная *равновесная мера* $\widetilde{\lambda}\in M_1(K)$, для которой справедливо (35) с некоторой постоянной $\widetilde{w}=\widetilde{w}_K$ (см. [35], а также [14], [15], [16]). Хорошо известно (см. [14], [15], [16]), что равновесная мера и только эта мера минимизирует соответствующий функционал энергии

$$\begin{aligned} J_\varphi(K,\mu) :&= \iint\left\{\log\frac{1}{|z-t|}+g_E(z,t)\right\}d\mu(z)d\mu(t)+2\int\varphi(z)\,d\mu(z)\\ &= \int\left\{V^{\mu}(z)+G^{\mu}_E(z)+\varphi(z)\right\}d\mu(z)+\int\varphi(z)\,d\mu(z)\\ &= \iint\left\{\log\frac{1}{|z-t|}+g_E(z,t)+\varphi(z)+\varphi(t)\right\}d\mu(z)d\mu(t), \end{aligned} \tag{36}$$

где $\varphi(z)=g_E(z,\infty)=\log|z+\sqrt{z^2-1}|$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$M=\sup_{K\in\mathscr{K}_f}\ \min_{\mu\in M_1(K)} J_\varphi(K,\mu), \qquad \text{где} \qquad \varphi(z)=g_E(z,\infty). \tag{37}$$

Докажем, что существует локальное решение задачи (37), принадлежащее *внешности* максимального эллипса голоморфности функции f. Для этого определим внешнее проектирование $\widehat{K}$ произвольного компакта $K\in\mathscr{K}_f$ вдоль гипербол, соответствующих отрезку $E=[-1,1]$, следующим образом. Если точка $z\in\Omega=\overline{\mathbb{C}}\setminus D_\rho$, то $\widehat{z}=z$. Пусть теперь $z\in D_\rho\setminus E$. Тогда через эту точку проходит единственная гипербола с фокусом в точке $+1$ или -1; так как z не лежит на отрезке E, то она принадлежит верхней или нижней ветви этой гиперболы. Положим $\widehat{z} = z_0 \in \Gamma_\rho$ – единственная точка пересечения этой ветви с максимальным эллипсом голоморфности функции f. Ясно, что при таком проектировании $\widehat{K} \in \mathscr{K}_f$ для любого $K \in \mathscr{K}_f$.

Лемма 1. *Для любого компакта $K \in \mathscr{K}_f$ имеем: $J_\varphi(\widehat{K}, \widetilde{\lambda}_{\widehat{K}}) \geqslant J_\varphi(K, \widetilde{\lambda}_K)$.*

Доказательство. Для $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E$ положим $z = (\zeta + 1/\zeta)/2$, где $|\zeta| < 1$. Тогда введенная выше операция внешнего проектирования вдоль гипербол в плоскости $\mathbb{C}_z$ эквивалентна радиальному проектированию внутрь единичного круга $|\zeta| < 1$ в плоскости $\mathbb{C}_\zeta$, а для функций Грина отрезка E имеем:

$$g_E(z, \infty) = \log \frac{1}{|\zeta|}, \qquad g_E(z, t) = \log \left| \frac{1 - \overline{\xi}\zeta}{\zeta - \xi} \right|, \tag{38}$$

где $t = (\xi + 1/\xi)/2$, $|\xi| < 1$. Рассмотрим теперь аналог функционала (36) в классе дискретных мер $\mu \in M_1(K)$, $K \in \mathscr{K}_f$ (т.е. аналог трансфинитного диаметра для допустимых компактов; подробнее см. [35; глава II, § 3]). Так как по условию компакт K симметричен относительно вещественной оси, то можно рассматривать только меры с симметричным относительно вещественной оси носителем. Соответствующий класс дискретных мер обозначим $M_1^*(K)$. Тогда

$$\inf_{\mu \in M_1(K)} J_\varphi(K, \mu) = \inf_{\mu \in M_1^*(K)} I_\varphi(K, \mu).$$

С учетом (38) подынтегральное выражение в (36) переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \log \frac{1}{|z - t|} + g_E(z, t) + \varphi(z) + \varphi(t) &= \log \frac{e^{g(z,\infty)} e^{g(\zeta,\infty)}}{|z - \zeta|} + g_E(z, \zeta) \\ &= \log(|\zeta - \xi| \cdot |1 - \zeta\xi|) + \log \frac{|\zeta - \xi|}{|1 - \overline{\xi}\zeta|}. \end{aligned} \tag{39}$$

Для дискретной меры с симметричным носителем функционал энергии (36) не изменится, если мы в (39) уберем знак комплексного сопряжения и полученное выражение $2 \log |\zeta - \xi|$ подставим в (36). Теперь уже ясно, что величина $\inf_{\mu \in M_1^*(K)} I_\varphi(K, \mu)$ соответствует емкости прообраза компакта K при отображении $z = \mathrm{Zh}(\zeta)$, $|\zeta| < 1$. Хорошо известно, что при радиальном проектировании емкость множества не увеличивается. Лемма 1 доказана.

Итак, мы показали, что решение экстремальной задачи (31) (т.е. стационарный компакт F) можно искать среди тех допустимых компактов, которые лежат вне максимального эллипса голоморфности функции f; более точно, в таком семействе компактов (подсемействе $\mathscr{K}_f$) мы будем искать *локальное* решение экстремальной задачи (31) при априорном условии, что соответствующий компакт $F \not\ni \infty$. Точнее, зафиксируем окрестность $U(\infty)$ бесконечно удаленной точки $z = \infty$ и в дальнейшем считаем, что супремум можно брать по подсемейству тех компактов из $\mathscr{K}_f$, которые не пересекаются с $U(\infty)$.

Величина $M < \infty$. Следовательно, существует последовательность допустимых компактов $K_n \in \mathscr{K}_f$ такая, что все $K_n \subset \mathbb{C} \setminus D_{\rho_0(f)}$ и $J_\varphi(K_n, \widetilde{\lambda}_{K_n}) \to M$.

Семейство $\{K_n\}$ компактно в хаусдорфовой топологии. Значит, существует подпоследовательность, которую мы также будем обозначать $\{K_n\}$, и компакт $K^* \subset \mathbb{C} \setminus D_{\rho_0(f)}$ такие, что $d_{\mathrm{H}}(K_n, K^*) \to 0$ при $n \to \infty$, $K^* \subset \mathbb{C} \setminus D_{\rho_0(f)}$ (здесь и далее через $d_{\mathrm{H}}(\cdot,\cdot)$ обозначается расстояние между двумя компактами в хаусдорфовой метрике).

Так как функция f имеет конечное число точек ветвления, то для всех достаточно больших $n \geqslant n_0$ все компакты K_n содержат в точности одни и те же точки ветвления функции f. Значит, это справедливо и для компакта K^*. Очевидно, что K^* симметричен относительно вещественной прямой и функция f продолжается как (однозначная) мероморфная функция в ту связную компоненту D^* дополнения к K^*, которая содержит отрезок E. Компакт K^* состоит из конечного числа континуумов, поэтому область D^* регулярна относительно решения задачи Дирихле. Следовательно, существует функция Грина $g_{K^*}(z,\zeta)$ для области D^*.

Приведем некоторые свойства компакта K^*.

Компакт K^* не имеет внутренних точек и не разбивает плоскость. Доказательство этого утверждения проводится по схеме, предложенной в [6] (см. также [38], [39]). Компакт K^* состоит из конечного числа континуумов, каждая связная компонента K^* содержит по-крайней мере две точки ветвления функции f. Так как $d_{\mathrm{H}}(K_n, K^*) \to 0$ при $n \to \infty$, то для

$$\varepsilon = \frac{1}{4} \min_{k \neq j, b_j, b_k \in \Sigma_f} |b_j - b_k|$$

имеем: $d_{\mathrm{H}}(K_n, K^*) < \varepsilon$, $d_{\mathrm{H}}(K_n, K_m) < \varepsilon$ при $n, m \geqslant n_0$; следовательно, при $n \geqslant n_0$ число связных компонент K_n и K^* одинаково, сходимость $K_n \to K^*$ можно трактовать по-компонентно и соответствующие компоненты K_n и K^* содержат одни и те же точки множества Σ_f; функция $f \in \mathscr{M}(D_E(K^*))$, граница области $D_E(K^*)$ состоит из конечного числа континуумов и $D_E(K^*)$ регулярна относительно решения задачи Дирихле; существует функция Грина $g_{K^*}(z,\zeta)$ для области $D_E(K^*)$.

По условию выбора последовательности $\{K_n\}$ имеем: $J_\varphi(K_n, \widetilde{\lambda}) \to M$. В силу определения величины M (см. (31)) справедливо неравенство

$$J_\varphi(K^*, \widetilde{\lambda}_{K^*}) \leqslant M. \tag{40}$$

Так как для равновесных мер $\widetilde{\lambda}_K$ функционал $J(K, \lambda_K)$ (см. (15)) полунепрерывен сверху по K и $J_\varphi(K, \widetilde{\lambda}) = 2J(K, \lambda) - \gamma_E$, то из соотношения $J_\varphi(K_n, \widetilde{\lambda}) \to M$ вытекает, что

$$M = \varlimsup_{n\to\infty} J_\varphi(K_n, \widetilde{\lambda}) \leqslant J_\varphi(K^*, \widetilde{\lambda}_{K^*}).$$

Отсюда и неравенства (40) получаем, что $J_\varphi(K^*, \widetilde{\lambda}_{K^*}) = M$.

В дальнейшем полагаем $F = K^* \in \mathscr{K}_f$. Вариационным методом аналогично [41] доказывается, что экстремальный компакт F (не разбивающий плоскость) состоит из конечного числа кусочно-аналитических дуг, является совокупностью критических траекторий некоторого квадратичного дифференциала и обладает S-свойством (20). Ниже (см. лемму 2) приводится схема доказательство этого результата для случая *произвольного* параметра $\theta \geqslant 0$ при условии, что соответствующий экстремальный компакт $F(\theta)$ существует, является допустимым, $F(\theta) \in \mathscr{K}_f$, и $F \not\ni \infty$; как показано выше в рассматриваемом здесь случае $\theta = 1$ это условие выполняется. Подробное доказательство этого результата будет дано в работе [40].

Ниже мы в основном следуем схеме работы [41].

Лемма 2. *Пусть $F \in \mathscr{K}_f$ – стационарный компакт для функционала энергии* (15) *такой, что $F \not\ni \infty$. Тогда F состоит из конечного числа кусочно аналитических дуг, обладает S-свойством* (20) *и является замыканием критических траекторий некоторого квадратичного дифференциала.*

Доказательство. Пусть $F \in \mathscr{K}_f$ – стационарный компакт для функционала энергии (15):

$$J(F, \lambda_F) = \max_{K \in \mathscr{K}_f} J(K, \lambda_K), \qquad \lambda_K \in M_1(E), \tag{41}$$

$\{a_1, \dots, a_{m-2}\} = F \cap \Sigma_f$ (точки $a_1, \dots, a_{m-2} \in \Sigma_f$ – особые точки функции f многозначного характера, лежащие на F). Положим $A_m(z) = \prod_{j=1}^{m-2} (z - a_j) \cdot (z^2 - 1)$. Зафиксируем точку $w \in \Omega = \overline{\mathbb{C}} \setminus (E \cup F)$ и рассмотрим следующее преобразование:

$$z_\tau = z + \tau h(z), \qquad \text{где } h(z) = \frac{A_m(z)}{(z - w)^{m+1}}, \tag{42}$$

τ – комплексный параметр. Фиксируем некоторую окрестность $U_0 = \{z : |z - w| < r_0\}$ точки w такую, что $\overline{U}_0 \subset \Omega$. Найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при всех τ, $|\tau| < \varepsilon_0$, отображение $z \mapsto z_\tau$ взаимнооднозначно в области $\Omega_0 = \Omega \setminus \overline{U}_0$ и образ F_τ компакта F – допустимый компакт ($F_\tau \in \mathscr{K}_f$).

Положим $D_\tau = \overline{\mathbb{C}} \setminus F_\tau$. Компакт F состоит из конечного числа континуумов; следовательно, при $|\tau| < \varepsilon_0$ компакт F_τ также состоит из конечного числа континуумов. Поэтому существуют функции Грина $g_D(z, \zeta)$ и $g_{D_\tau}(z, \zeta)$. Найдем формулу для вариации функции Грина

$$\delta g(z, \zeta) := g_{D_\tau}(z, \zeta) - g_D(z, \zeta) \tag{43}$$

при $|\tau| < \varepsilon_0$, ε_0 – достаточно мало, z, ζ – фиксированы, $z, \zeta \in U \Subset D$, $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$.

Рассмотрим линию уровня Γ функции Грина $g_D(t, z_0)$, где $z_0 \in U$ – фиксированно, а Γ “достаточно близка” к F. Ясно, что при малых τ компакт F_τ лежит внутри этой линии уровня. Воспользуемся вариационной формулой Адамара (см. [33; приложение, § 3, формула (3.3)]):

$$\delta g(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{\partial g(t, z)}{\partial n_t} \frac{\partial g(t, \zeta)}{\partial n_t} \delta n_t \, ds_t + O(\varepsilon^2), \tag{44}$$

считая, что мы применяем ее для $\gamma = \Gamma$ и функции Грина для внешности Γ (δn_t – ε-вариация вдоль нормали, в дальнейшем в полученных ниже формулах надо будет сделать предельный переход при $\Gamma \to F$).

Поскольку на линии уровня

$$\frac{\partial g(t,z)}{\partial n_t} = G'(t,z)e^{i\alpha_t},$$

где $G(t,z) = g(t,z) + ig^*(t,z)$ – комплексная функция Грина и производная берется по первому аргументу, то для вариации (41) из формулы Адамара (44) получаем:

$$\begin{aligned}
\delta g(z,\zeta) &= \operatorname{Re}\biggl\{\frac{\tau}{2\pi i}\int_\gamma G'(t,z)G'(t,\zeta)h(t)\,dt\biggr\} + O(\varepsilon^2)\\
&= \operatorname{Re}\biggl\{\frac{\tau}{2\pi i}\int_{|\zeta-w|=r_0} G'(t,z)G'(t,\zeta)\frac{A_m(t)}{(t-w)^{m+1}}\,dt\biggr\}\\
&\quad + \operatorname{Re}\biggl\{\frac{\tau}{2\pi i}\int_{|t-z|=r_0} G'(t,z)G'(t,\zeta)\frac{A_m(t)}{(t-w)^{m+1}}\,dt\biggr\}\\
&\quad + \operatorname{Re}\biggl\{\frac{\tau}{2\pi i}\int_{|t-\zeta|=r_0} G'(t,z)G'(t,\zeta)\frac{A_m(t)}{(t-w)^{m+1}}\,dt\biggr\} + O(\varepsilon^2)
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\delta g(z,\zeta) &= \operatorname{Re}\biggl\{\tau\operatorname*{Res}_{t=w}\biggl(G'(t,z)G'(t,\zeta)\frac{A_m(t)}{(t-w)^{m+1}}\biggr)\biggr\}\\
&\quad + \operatorname{Re}\biggl\{\tau\operatorname*{Res}_{t=z}\biggl(G'(t,z)G'(t,\zeta)\frac{A_m(t)}{(t-w)^{m+1}}\biggr)\biggr\}\\
&\quad + \operatorname{Re}\biggl\{\tau\operatorname*{Res}_{t=\zeta}\biggl(G'(t,z)G'(t,\zeta)\frac{A_m(t)}{(t-w)^{m+1}}\biggr)\biggr\} + O(\varepsilon^2)\\
&= \operatorname{Re}\biggl\{\tau\frac{1}{m!}\Bigl(G'(w,z)G'(w,\zeta)A_m(w)\Bigr)^{(m)}_w\\
&\quad - \tau\frac{G'(z,\zeta)A_m(z)}{(z-w)^{m+1}} - \tau\frac{G'(\zeta,z)A_m(\zeta)}{(\zeta-w)^{m+1}}\biggr\} + O(\varepsilon^2). \qquad (45)
\end{aligned}$$

Из (45) получаем, что

$$\begin{aligned}
\delta_\tau g(z,\zeta) &:= g_{D_\tau}(z_\tau,\zeta_\tau) - g_D(z,\zeta)\\
&= \operatorname{Re}\biggl\{\tau\frac{1}{m!}\Bigl(G'(w,z)G'(w,\zeta)A_m(w)\Bigr)^{(m)}_w\biggr\} + O(\varepsilon^2). \qquad (46)
\end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}
\delta_\tau \log\frac{1}{|z-\zeta|} &:= \log\frac{1}{|z_\tau-\zeta_\tau|} - \log\frac{1}{|z-\zeta|}\\
&= \operatorname{Re}\biggl\{\tau\frac{1}{m!}\biggl(\frac{A_m(w)}{(z-w)(\zeta-w)}\biggr)^{(m)}_w\biggr\} + O(\varepsilon^2). \qquad (47)
\end{aligned}$$

Вариации (47) логарифмического ядра и (46) функции Грина порождают следующую вариацию функционала энергии (15) для стационарного компакта

$$\delta_\tau J(F,\lambda_F) = \varepsilon\operatorname{Re}\biggl\{e^{i\varphi}\frac{1}{m!}\Bigl(A_m(w)\Bigl[\theta\bigl(\widehat{\lambda}(w)\bigr)^2 + \bigl(\mathscr{G}'_{\lambda,F}(w)\bigr)^2\Bigr]\Bigr)^{(m)}_w\biggr\} + O(\varepsilon^2), \qquad (48)$$

где

$$\widehat{\lambda}(w) = \mathscr{V}'_\lambda(w) = \int_E \frac{d\lambda(x)}{w-x}, \qquad \mathscr{G}_{\lambda,F}(w) = \int_E G(w,x)\,d\lambda(x),$$

$\tau = \varepsilon e^{i\varphi}$ – комплексный параметр. В силу стационарности (41) компакта F имеем: $\delta_\tau J(F,\lambda_F) \leqslant 0$ при всех достаточно малых τ. Поэтому из (48) получаем

$$\Bigl(A_m(w)\bigl[\theta\bigl(\widehat{\lambda}(w)\bigr)^2 + \bigl(\mathscr{G}'_{\lambda,F}(w)\bigr)^2\bigr]\Bigr)^{(m)}_w \equiv 0. \tag{49}$$

Следовательно,

$$A_m(w)\bigl[\theta\bigl(\widehat{\lambda}(w)\bigr)^2 + \bigl(\mathscr{G}'_{\lambda,F}(w)\bigr)^2\bigr] \equiv B_{m-1}(w), \tag{50}$$

где B_{m-1} – полином степени $\leqslant m-1$. Непосредственно из (50) вытекает следующее соотношение для стационарного компакта $F \in \mathscr{K}_f$ и соответствующей равновесной меры $\lambda = \lambda_F$ (с носителем на отрезке $[-1,1]$):

$$\theta\bigl(\widehat{\lambda}(w)\bigr)^2 + \bigl(\mathscr{G}'_{\lambda,F}(w)\bigr)^2 \equiv \frac{B_{m-1}(w)}{A_m(w)}, \tag{51}$$

а для гринова потенциала стационарного компакта F имеем:

$$G^\lambda_F(z) = \int_{-1}^1 g_F(z,x)\,d\lambda(x) = \operatorname{Re}\int_{a_1}^z \sqrt{\frac{B_{m-1}(\zeta)}{A_m(\zeta)} - \theta\bigl(\widehat{\lambda}(\zeta)\bigr)^2}\,d\zeta \tag{52}$$

(путь интегрирования в (52) не пересекает отрезок E). Из (52) вытекает справедливость утверждений леммы, в том числе – S-свойство компакта F:

$$\frac{\partial G^\lambda_F}{\partial n_+}(z) = \frac{\partial G^\lambda_F}{\partial n_-}(z), \qquad z \in F_0.$$

Лемма 2 доказана.

Замечание 1. 1) Отметим, что утверждения леммы 2 справедливы при любом значении параметра $\theta \geqslant 0$ (в формуле для функционала энергии $J(\mu;\theta) = \int(\theta V^\mu(z) + G^\mu_F(z))\,d\mu(z)$) при условии, что стационарный компакт $F = F(\theta) \in \mathscr{K}_f$ *существует*.

2) Поскольку $F \not\ni \infty$, то непосредственно из (50) вытекает, что $B_{m-1} = B_{m-2}$, где $\deg B_{m-2} \leqslant m-2$.

3) Наконец, при $\theta = 0$ из (52) получаем

$$G^\lambda_F(z) = \int_{-1}^1 g_F(z,x)\,d\lambda(x) = \operatorname{Re}\int_{a_1}^z \sqrt{\frac{B_{m-2}(\zeta)}{A_m(\zeta)}}\,d\zeta. \tag{53}$$

3.3. Приведем теперь характеризацию компакта $F = F(1)$ с помощью двулистной римановой поверхности, при этом окажется, что соответствующая постоянная равновесия $w = w_F$ равна постоянной Робена для компакта $F^{(1)}$.

Пусть $K \in \mathscr{K}_f$ – произвольный допустимый компакт. Определим риманову поверхность $\mathfrak{R}$ уравнением $w^2 = z^2 - 1$, положим $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}^{(1)} \sqcup \mathfrak{R}^{(2)} \sqcup \Gamma$, где Γ –

замкнутый цикл на $\mathfrak{R}$, проходящий через точки ± 1 и соответствующий отрезку $[-1,1]$ при каноническом проектировании, $\mathfrak{R}^{(1)}$ – первый (открытый) лист римановй поверхности, $\mathfrak{R}^{(2)}$ – второй лист. Пусть функция $u(z^{(1)}) = G_K^\lambda(z)$, $z^{(1)} \in \mathfrak{R}^{(1)}$. Тогда из условий равновесия и симметрии относительно вещественной оси вытекает, что функция u гармонически продолжается на второй лист $\mathfrak{R}^{(2)}$ римановй поверхности формулой $u(z^{(2)}) = w - V^\lambda(z)$. Полученная функция $u(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in \mathfrak{R}$, обладает следующими свойствами: u – гармоническая функция на $\mathfrak{R}\setminus(K^{(1)}\cup\{\infty^{(2)}\})$, в точке $\mathbf{z}=\infty^{(2)}$ функция u имеет логарифмическую особенность, $u(\mathbf{z}) = 0$ при $\mathbf{z} \in K^{(1)}$. Следовательно, $u(\mathbf{z}) = g_{K^{(1)}}(\mathbf{z},\infty^{(2)})$ – функция Грина области $D = \mathfrak{R}\setminus K^{(1)}$ с особенностью в бесконечно удаленной точке $\mathbf{z}=\infty^{(2)}$, $w_K = \gamma^{(2)}$ – соответствующая постоянная Робена, $c(K) = e^{-w_K}$ – емкость множества $K^{(1)}$ (на $\mathfrak{R}$ относительно точки $\mathbf{z}=\infty^{(2)}$). Тем самым задача (30) о максимуме постоянной равновесия w_K в классе $K \in \mathscr{K}_f$ эквивалентна задаче о минимуме емкости $c(K)$ в этом классе. Соответствующий экстремальный компакт $\widetilde{F}^{(1)}$ является компактом минимальной емкости (на $\mathfrak{R}$ относительно точки $\mathbf{z}=\infty^{(2)}$), определяется однозначно и вполне характеризуется S-свойством:

$$\frac{\partial g_{\widetilde{F}^{(1)}}(\zeta^{(1)},\infty^{(2)})}{\partial n_+} = \frac{\partial g_{\widetilde{F}^{(1)}}(\zeta^{(1)},\infty^{(2)})}{\partial n_-}, \qquad \zeta^{(1)} \in \widetilde{F}_0^{(1)} \tag{54}$$

(см. [46]–[48], [16]). В силу определения функции u, соотношение (54) эквивалентно S-свойству (20). Тем самым, $F = \widetilde{F}$ и $G_F^\lambda(z) = g_{\Phi(F)}(\Phi(z),0)$ при $z \in \overline{\mathbb{C}}\setminus E$, т.е. стационарный в смысле экстремальной задачи (31) компакт F совпадает с образом компакта Шталя.

§ 4. Доказательство теоремы 2

4.1. Перейдем теперь непосредственно к изучению сходимости (нелинейных) АПЧ.

Приведем сначала некоторые необходимые нам свойства общих полиномов Фабера, соответствующих произвольному континууму $E \Subset \mathbb{C}$ (см. [45]).

Пусть E – произвольный континуум в $\mathbb{C}$, не разбивающий плоскость и не вырождающийся в точку, $\Omega = \overline{\mathbb{C}}\setminus E$. Положим $w = \Phi(z)$ – функция, конформно (и однолистно) отображающая область Ω на внешность единичного круга $\{w : |w| > 1\}$ так, что $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$, $\Phi\colon \Omega \to \{w : |w| > 1\}$, $z = \Psi(w)$ – обратная функция. Для произвольного $\rho > 1$ положим $\Gamma_\rho = \{z : |\Phi(z)| = \rho\}$ – линия уровня отображающей функции Φ, D_ρ – внутренность кривой Γ_ρ, $D_1 := E$. Тогда полиномы Фабера $\Phi_n(z) = \Phi_n(z;E)$ определяются по формуле

$$\Phi_n(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} \frac{\Phi^n(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \qquad z \in D_\rho, \quad \rho > 1 \tag{55}$$

($\Phi_n(z)$ – главная часть разложения функции $\Phi^n(z)$ в ряд Лорана в бесконечно удаленной точке $z=\infty$).

Из (55) вытекает, что $\Phi_n(z) = \Phi^n(z)(1+o(1))$, $n\to\infty$, локально равномерно в Ω. Следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} |\Phi_n(z)|^{1/n} = |\Phi(z)|, \qquad z \in \Omega. \tag{56}$$

Из (55) и (56) легко вытекает, что если функция f – голоморфная на E, $f \in \mathscr{H}(E)$, то f разлагается в ряд Фабера (ср. (1))

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi_k(z), \qquad c_k = c_k(f), \tag{57}$$

сходящийся к f локально равномерно в канонической области $D_0(f) := D_{\rho_0(f)}$, где

$$\frac{1}{\rho_0(f)} = \varlimsup_{k\to\infty} |c_k|^{1/k} < 1; \tag{58}$$

область $D_0(f)$ – максимальная каноническая область голоморфности функции f.

В классе функций $\mathscr{H}(E)$ стандартным образом определим (линейный) *оператор Фабера* $U\colon \mathscr{H}(E) \to \mathscr{H}(\overline{\mathbb{D}})$, $\mathbb{D} := \{w : |w| < 1\}$, по формуле

$$U(f)(w) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k, \tag{59}$$

где $f \in \mathscr{H}(E)$ задана разложением $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k \Phi^k(z)$. В силу (58) функция $\widetilde{f} = U(f) \in \mathscr{H}(\overline{\mathbb{D}})$, при этом $\rho_0(f) = R_0(\widetilde{f})$, где R_0 – радиус голоморфности соответствующей функции. Тем самым $U\colon \mathscr{H}(E) \to \mathscr{H}(\overline{\mathbb{D}})$. Нетрудно видеть, что отображение U ограниченно, биективно и справедлива следующая формула обращения

$$f(z) = U^{-1}(\widetilde{f})(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho} \frac{\widetilde{f}(\Phi(\zeta))}{\zeta - z}\,d\zeta, \qquad z \in D_\rho, \quad 1 < \rho < \rho_0(f). \tag{60}$$

Для произвольных $n, m \in \mathbb{N}_0$ положим $\mathscr{R}_{n,m}(E) = \mathscr{R}_{n,m} \cap \mathscr{H}(E)$, $\mathscr{R}_{n,m}(\overline{\mathbb{D}}) = \mathscr{R}_{n,m} \cap \mathscr{H}(\overline{\mathbb{D}})$. Для произвольных фиксированных $m \in \mathbb{N}$ и $\rho > 1$ обозначим через $\mathscr{M}_m(D_\rho)$ класс функций $f \in \mathscr{H}(E)$, допускающих мероморфное продолжение в каноническую область D_ρ и имеющих там ровно[2] m полюсов; аналогичным образом определяется и $\mathscr{M}_m(K_\rho)$ для $\widetilde{f} \in \mathscr{H}(\overline{\mathbb{D}})$, где $K_\rho = \{w : |w| < \rho\}$.

Справедливо следующее утверждение (см. [54], а также [11] и [55]) о свойствах оператора Фабера.

Лемма 3. *Оператор Фабера U отображает:*

1) при $n \geqslant m - 1$ множество $\mathscr{R}_{n,m}(E)$ линейно и взаимно однозначно на множество $\mathscr{R}_{n,m}(\overline{\mathbb{D}})$, причем точка z_0 является полюсом кратности $\mu \geqslant 1$ функции $r(z) \in \mathscr{R}_{n,m}(E)$ тогда и только тогда, когда точка $w_0 = \Phi(z_0)$ является полюсом той же кратности μ функции $R(w) = U(r)(w) \in \mathscr{R}_{n,m}(\overline{\mathbb{D}})$;

2) множество $\mathscr{M}_m(D_\rho)$, $\rho > 1$, линейно и взаимно однозначно на множество $\mathscr{M}_m(K_\rho)$, причем точка z_0 является полюсом кратности $\mu \geqslant 1$ функции $f(z) \in \mathscr{M}_m(D_\rho)$ тогда и только тогда, когда точка $w_0 = \Phi(z_0)$ является полюсом той же кратности μ функции $\widetilde{f}(w) = U(f)(w)$.

[2]Как обычно нули и полюсы функций считаются с учетом их кратностей.

Эта простое утверждение впервые было сформулировано в [54] (см. также [55]). Позднее эти свойства оператора Фабера и вытекающие из них следствия (в том числе, аналог теоремы Монтессу) были переоткрыты другими авторами [26], [27].

Вышеуказанные свойства оператора Фабера понадобятся нам здесь для случая, когда континуум $E=[-1,1]$, $\Psi(w)=\mathrm{Zh}(w)=(w+1/w)/2$ – функция Жуковского, $w=\Phi(z)=z+\sqrt{z^2-1}$ и выбрана такая ветвь корня, что $\Phi(z)\sim 2z$ при $z\to\infty$.

4.2. Из следующего соотношения (см. (12), определение нелинейных АПЧ)

$$(f-F_n)(z)=cT_{2n+1}(z)+\cdots \tag{61}$$

вытекает, что

$$(\widetilde{f}-\widetilde{F}_n)(w)=cw^{2n+1}+\cdots, \tag{62}$$

где в силу леммы 3 функция $\widetilde{F}_n\in\mathscr{R}_n(\overline{\mathbb{D}})$. Следовательно, рациональная функция $\widetilde{F}_n(w)=U(F_n)(w)=[n/n]_{\widetilde{f}}(w)$ – диагональная аппроксимация Паде ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kw^k$ порядка n.

Нетрудно видеть, что оператор Фабера (в нашем случае – Фабера–Чебышёва) сохраняет характер особенностей (в частности – ветвления) при переходе от функций f к функции $\widetilde{f}$ и устанавливает взаимно однозначное соответствие между допустимыми компактами для функций f и $\widetilde{f}$ (заданных в плоскости $\mathbb{C}_z$ и $\mathbb{C}_w$ соответственно). Следовательно, при условии, что $\widetilde{f}\in\mathscr{H}(\infty)$, формулу (60) можно записать в виде

$$f(z)=R(z)+\frac{1}{2\pi i}\oint_F\frac{[\widetilde{f}](\Phi(\zeta))}{\zeta-z}d\zeta,\qquad z\in\Omega\setminus E, \tag{63}$$

где $F\in\mathscr{K}_f$ – S-симметричный компакт для f, $R=U^{-1}(r)$, r – сумма главных частей функции $\widetilde{f}$ в $\overline{\mathbb{C}}_w\setminus\Phi(F)$, $[\widetilde{f}]$ – голоморфная составляющая функции $\widetilde{f}$ в $\overline{\mathbb{C}}_w\setminus\Phi(F)$, и под $\oint_F$ понимается интеграл по любому контуру, охватывающему F и отделяющему F от точки z и отрезка E. Аналогичное (63) представление справедливо и для диагональных АПЧ F_n функции f.

Из первой теоремы Шталя (см. [49], а также приложение 5) вытекает, что $[n/n]_{\widetilde{f}}\overset{\mathrm{cap}}{\to}\widetilde{f}$ на компактных подмножествах области $\overline{\mathbb{C}}_w\setminus\widetilde{F}$, где $\widetilde{F}=\Phi(F)$ – компакт Шталя[3] для функции $\widetilde{f}$. При этом

$$|\widetilde{f}(w)-[n/n]_{\widetilde{f}}(w)|^{1/n}\overset{\mathrm{cap}}{\to}e^{-2g_{\widetilde{F}}(w,0)},\qquad w\in\widetilde{K}\Subset\widetilde{D}\setminus E, \tag{64}$$

$\widetilde{D}=\overline{\mathbb{C}}_w\setminus\widetilde{F}$, и для $\widetilde{Q}_n$ – знаменателей АП функции $\widetilde{f}$ имеем:

$$\frac{1}{n}\mu(\widetilde{Q}_n)\to\lambda_{\widetilde{F}}\quad\text{– равновесная мера для } \widetilde{F}. \tag{65}$$

[3]Более точно, компакт Шталя есть множество $S=\{z:1/z\in\widetilde{F}\}$ и определяется относительно бесконечно удаленной точки.

Из приведенной леммы 3 и соотношений (61)–(65) вытекает, что $F_n \overset{\text{cap}}{\to} f$ на компактных подмножествах области $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus F$, при этом в силу (64) и равенства $G_F^\lambda(z) = g_{\widetilde{F}}(\Phi(z), 0)$, $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus E$, имеем

$$|f(z) - F_n(z)|^{1/n} \overset{\text{cap}}{\to} e^{-2G_F^\lambda(z)}, \qquad z \in K \Subset D, \tag{66}$$

и все нули полиномов Q_n за исключением $o(n)$ из них притягиваются к компакту F. Сходимость диагональных АПЧ функции f доказана. Отметим, что из сказанного выше вытекает единственность диагональных АПЧ (по соответствующей подпоследовательности) для достаточно больших n.

4.3. Докажем теперь утверждения о предельном распределении нулей Q_n и точек интерполяции.

Итак, пусть нелинейная АПЧ F_n существует при всех $n \geqslant n_0$, принадлежащих некоторой бесконечной последовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$, и $F_n \in \mathscr{H}(E)$. Все дальнейшие рассуждения будут проводится для таких n. Из (11) получаем следующие соотношения ортогональности:

$$\int_E (f - F_n)(x) T_k(x)\, d\tau(x) = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, 2n. \tag{67}$$

Функции f и F_n вещественнозначны на E. Поэтому из соотношений (67) вытекает, что разность $f - F_n$ обращается в нуль на E по-крайней мере в $(2n+1)$-й точке. Пусть $\omega_{2n}(z) = z^{2n+1} + \cdots$ – полином с нулями в этих точках. Положим $F_n = P_n/Q_n$, тогда имеем: функция $(Q_n f - P_n)/\omega_{2n}$ голоморфна на E. Пусть s – полином фиксированной степени m с единичным старшим коэффициентов, часть нулей которого совпадает с полюсами функции f в $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$ и имеет кратность, равную кратности соответствующего полюса. Кроме того, будем считать, что среди нулей s содержатся все точки ветвления функции f с такой кратностью, что функция $s \cdot \Delta f = s \cdot (f_+ - f_-)$ – непрерывна на F; здесь и далее через $\Delta f = f_+ - f_-$ обозначается скачок функции f на дугах, составляющих компакт F. Ясно, что s – вещественный полином, не имеющий нулей на E. Функция $s(Q_n f - P_n)/\omega_{2n}$ голоморфна в D. Теперь стандартным способом (см., например, [18], [16]) получаем следующие соотношения:

$$(f - F_n)(z) = \frac{\omega_{2n}(z)}{Q_n(z) q(z) s(z)} \frac{1}{2\pi i} \oint_F \frac{Q_n(t) q(t) s(t) f(t)\, dt}{\omega_{2n}(t)(t - z)}, \qquad z \in D, \tag{68}$$

$$\oint_F \frac{Q_n(t) t^k s(t) f(t)\, dt}{\omega_{2n}(t)} = 0, \qquad k = 0, 1, \dots, n - 1 - m, \quad m = \deg s, \tag{69}$$

$$\int_{-1}^{1} \omega_{2n}(x) x^j \frac{1}{Q_n(x) q(x) s(x)} \left\{ \oint_F \frac{Q_n(t) q(t) s(t) f(t)\, dt}{\omega_{2n}(t)(t - x)} \right\} d\tau(x) = 0, \quad j = \overline{0, 2n}, \tag{70}$$

где как и выше под $\oint_F$ понимается интеграл по любому контуру, охватывающему F и отделяющему F от точки z и отрезка E, q – произвольный полином степени $\leqslant n-m$. Так как функция $s\cdot\Delta f$ непрерывна на F, то в соотношениях (68)–(70) от интеграла $\oint_F$ можно перейти к интегралу $\int_F$, а $f(t)$ заменить на $\Delta f(t)$. Кроме того, вместо полинома q в эти соотношения можно подставить полином $\widetilde{Q}_n$, который отличается от Q_n сомножителем, степень которого $\leqslant m$. Таким образом, получаем

$$(f-F_n)(z)=\frac{\omega_{2n}(z)}{Q_n(z)\widetilde{Q}_n(z)s(z)}\frac{1}{2\pi i}\int_F\frac{Q_n(t)\widetilde{Q}_n(t)s(t)\Delta f(t)\,dt}{\omega_{2n}(t)(t-z)},\qquad z\in D,\quad (71)$$

$$\int_F\frac{Q_n(t)t^k s(t)\Delta f(t)\,dt}{\omega_{2n}(t)}=0,\qquad k=0,1,\dots,n-1-m,\quad (72)$$

$$\int_{-1}^{1}\omega_{2n}(x)x^j\frac{1}{Q_n(x)\widetilde{Q}_n(x)s(x)}\biggl\{\int_F\frac{Q_n(t)\widetilde{Q}_n(t)s(t)\Delta f(t)\,dt}{\omega_{2n}(t)(t-x)}\biggr\}d\tau(x)=0,\quad j=\overline{0,2n}.\quad (73)$$

В силу (66) справедливо соотношение

$$|f(z)-F_n(z)|^{1/2n}\overset{\mathrm{cap}}{\to}e^{-G_F^{\lambda}(z)}.\quad (74)$$

Так как все нули полинома ω_{2n} лежат на отрезке E, то (переходя при необходимости к подпоследовательности) имеем:

$$|\omega_{2n}(z)|^{1/2n}\to e^{-V^{\mu_\omega}(z)}\quad (75)$$

локально равномерно в $\mathbb{C}\setminus E$, где $\mu_\omega\in M_1(E)$. Поскольку почти все нули полиномов Q_n и $\widetilde{Q}_n$ (кроме $o(n)$ из них) притягиваются к компакту F, то

$$|Q_n(z)|^{1/n}\overset{\mathrm{cap}}{\to}e^{-V^{\mu_Q}(z)},\quad |\widetilde{Q}_n(z)|^{1/n}\overset{\mathrm{cap}}{\to}e^{-V^{\mu_Q}(z)},\qquad z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus F,\quad (76)$$

где $\mu_Q\in M_1(F)$. Следовательно, из (74)–(76) получаем:

$$V^{\mu_Q}(z)-V^{\mu_\omega}(z)+V(z)=G_F^{\lambda}(z),\qquad z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus(E\cup F),\quad (77)$$

где

$$V(z):=\lim_{n\to\infty}\log\biggl|\int_F\frac{Q_n(t)\widetilde{Q}_n(t)s(t)\Delta f(t)\,dt}{\omega_{2n}(t)(t-z)}\biggr|^{1/2n}.\quad (78)$$

Функция V – гармоническая вне $E\cup F$ и субгармоническая на E. Из соотношения равновесия (77) вытекает, что разность $V-V^{\mu_\omega}$ непрерывно продолжается на E. Потенциал V^{μ_ω} – супергармоническая функция на E, тем самым V^{μ_ω} полунепрерывна снизу на E. Функция V полунепрерывна сверху на E и отличается от V^{μ_ω} на непрерывную функцию. Следовательно, обе функции V и V^{μ_ω} непрерывны на E. Теперь уже из соотношения (73), используя вещественность всех входящих в это соотношение функций, стандартным методом работы [15] получаем следующее соотношение равновесия на E:

$$-2V^{\mu_\omega}(x)+V^{\mu_Q}(x)+V(x)\equiv\mathrm{const},\qquad x\in E.\quad (79)$$

Из соотношений (77) и (79) вытекает, что

$$V^{\mu_\omega}(x) + G_F^{\lambda}(x) \equiv \text{const}, \qquad x \in E. \tag{80}$$

Следовательно, в силу условий равновесия (24) имеем:

$$V^{\mu_\omega}(x) \equiv V^{\lambda}(x) + \text{const}, \qquad x \in E, \quad \mu_\omega, \lambda \in M_1(E).$$

Отсюда получаем, что $\mu_\omega = \lambda$.

Наконец, воспользуемся соотношениями ортогональности (72). Из S-свойства компакта F и равенства $\mu_\omega = \lambda$ вытекает, что мы находимся в условиях общей теоремы 3 работы [16]. Непосредственно из этой теоремы для рассматриваемого здесь частного случая $\psi(z) = -V^{\lambda}(z)$ вытекает, что $\mu_Q = \widetilde{\lambda}$ – выметание меры λ на F, а $V(z) \equiv \text{const}$.

Из сказанного выше вытекает, что соотношения

$$\frac{1}{2n}\mu(\omega_{2n}) \to \lambda, \qquad \frac{1}{n}\mu(Q_n) \to \widetilde{\lambda} \tag{81}$$

имеют место для любой подпоследовательности $\Lambda \subset \mathbb{N}$. Следовательно, λ и $\widetilde{\lambda}$ – единственные предельные точки для последовательностей нормированных мер $\dfrac{1}{2n}\mu(\omega_{2n})$ и $\dfrac{1}{n}\mu(Q_n)$ соответственно. Тем самым все утверждения теоремы 2 доказаны.

§ 5. Приложение: теоремы Шталя

5.1. Первая теорема Шталя. Пусть функция $f \in \mathscr{H}(\infty)$ задана в точке $z = \infty$ сходящимся рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{z^{k+1}}. \tag{82}$$

Предположим, что существует конечное непустое множество точек $\Sigma \subset \mathbb{C}$ такое, что функция f продолжается из окрестности бесконечно удаленной точки по любому пути, лежащему в $\mathbb{C} \setminus \Sigma$, и $f \notin \mathscr{M}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$. В таком случае будем писать $f \in \mathscr{A}_\infty(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$.

Обозначим через $[n/n]_f$ диагональную аппроксимацию Паде функции f (в точке $z = \infty$): $[n/n]_f = P_n/Q_n$, где $\deg P_n, \deg Q_n \leqslant n$, $Q_n \not\equiv 0$ и выполняется соотношение

$$(Q_n f - P_n)(z) = O\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right), \quad z \to \infty. \tag{83}$$

Для произвольного компакта $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ через D_K обозначим связную компоненту дополнения к K, содержащую точку $z = \infty$. Пусть $\mathscr{K}_f$ – семейство компактов $K \subset \overline{\mathbb{C}}$ таких, что область D_K регулярна относительно решения задачи Дирихле и f допускает мероморфное (однозначное аналитическое) продолжение из окрестности точки $z = \infty$ в область D_K: $f \in \mathscr{M}(D_K)$. Компакты $K \in \mathscr{K}_f$ будем называть допустимыми для функции $f \in \mathscr{A}_\infty(\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma)$.

Через $\mu(Q)$ обозначим меру, ассоциированную с произвольным полиномом Q:

$$\mu(Q) = \sum_{\zeta:Q(\zeta)=0} \delta_\zeta,$$

где δ_ζ – мера Дирака с носителем в точке ζ.

Следующий результат о сходимости диагональных аппроксимаций Паде принадлежит Г. Шталю [46]–[50].

Первая теорема Шталя. *Пусть $f \in \mathscr{A}_\infty(\mathbb{C} \setminus \Sigma)$. Тогда*

1) существует единственный компакт $F = F(f)$ такой, что $F \in \mathscr{K}_f$ и

$$\operatorname{cap} F = \min_{K \in \mathscr{K}_f} \operatorname{cap} K, \tag{84}$$

компакт F состоит из конечного числа кусочно-аналитических дуг и не разбивает плоскость;

2) для нулей Q_n (знаменателей рациональных функций $[n/n]_f$) справедливо предельное соотношение:

$$\frac{1}{n}\mu(Q_n) \to \lambda_F, \qquad n \to \infty, \tag{85}$$

где λ_F – (единичная) равновесная мера компакта F, сходимость мер понимается в слабой топологии;

3) последовательность $[n/n]_f$ сходится по емкости внутри (на компактных подмножествах) области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$ к функции f:

$$\bigl|f(z) - [n/n]_f(z)\bigr|^{1/n} \xrightarrow{\text{cap}} e^{-2g_F(z)} < 1, \qquad z \in K, \quad K \subset D, \tag{86}$$

$g_F(z) = g_F(z,\infty)$ – функция Грина для области D с особенностью в бесконечно удаленной точке.

Отметим, что область D является областью максимальной сходимости аппроксимаций Паде функции f; скачок $\Delta f(\zeta) = (f^+ - f^-)(\zeta)$, $\zeta \in \ell$, функции f на любой открытой дуге $\ell \subset F$ отличен от тождественного нуля: $\Delta f(\zeta) \not\equiv 0$, $\zeta \in \ell$.

Соотношение (86) означает следующее: *для любого компакта $K \Subset D_f$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся номер $n_0 = n_0(K,\varepsilon)$ и число $\delta = \delta(K,\varepsilon) > 0$ такие, что при всех $n \geqslant n_0$ справедливо соотношение:*

$$(e^{-2g_F(z)-\varepsilon})^n \leqslant |(f - [n/n]_f)(z)| \leqslant (e^{-2g_F(z)+\varepsilon})^n, \qquad z \in K \setminus e_n, \quad \operatorname{cap} e_n < \delta. \tag{87}$$

Из (87) уже легко следует, что *каждый полюс a функции f в области D кратности $\nu(a) \geqslant 1$ притягивает при $n \to \infty$ по-крайней мере $\nu(a)$ полюсов рациональной функции $[n/n]_f$.*

Метод Шталя основан на том, что экстремальный компакт F (см. (84)) является совокупностью замыканий критических траекторий некоторого квадратичного дифференциала, состоит из конечного числа кусочно-аналитических дуг, не разбивает плоскость и вполне характеризуется следующим свойством S-симметрии (или S-свойством):

$$\frac{\partial g_F(\zeta,\infty)}{\partial n_+}=\frac{\partial g_F(\zeta,\infty)}{\partial n_-},\qquad \zeta\in F_0, \tag{88}$$

F_0 – совокупность открытых аналитических дуг, составляющих F, $\partial n_\pm$ – производные по нормали с противоположных сторон F_0. Свойство неограниченной продолжаемости функции f в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\Sigma$ не существенно; важен лишь тот факт, что f имеет "правильный" скачок на некотором компакте F, удовлетворяющем условию (88).

Компакты, обладающие тем или иным S-свойством, часто возникают в различных задачах теории аппроксимаций и геометрической теории функций.

В частности, свойством симметрии обладают экстремальные кривые целого ряда классических экстремальных задач геометрической теории функций; в этой теории экстремальные кривые обычно описываются как траектории некоторого квадратичного дифференциала (см. [29], [12], [34], [24], [25]).

Первая теорема Шталя доказывается по следующей схеме. Вначале на основе достаточно простых геометрических соображений (ср. лемма 1) устанавливается, что существует допустимый компакт $F\in\mathscr{K}_f$ такой, что

$$\operatorname{cap}F=\min_{K\in\mathscr{K}_f}\operatorname{cap}K. \tag{89}$$

Затем с помощью вариационного метода доказывается, что F является замыканием критических траекторий некоторого квадратичного дифференциала. Отсюда уже вытекает S-свойство (88). Непосредственно на основе этого S-свойства устанавливается предельное соотношение (85) для нормированных знаменателей диагональных аппроксимаций Паде $[n/n]_f$. Соотношение (85) влечет сходимость по емкости последовательности $\{[n/n]_f\}$ к функции f внутри (на компактных подмножествах) области D. Единственность компакта F, удовлетворяющего условию (89), вытекает из сходимости (85).

Соотношение (85) эквивалентно соотношению

$$\bigl|Q_n(z)\bigr|^{1/n}\xrightarrow{\operatorname{cap}}Ce^{g_F(z,\infty)},\qquad z\in D,\quad C=\operatorname{cap}F, \tag{90}$$

где старший коэффициент полинома Q_n равен единице.

5.2. Вторая теорема Шталя. Пусть E – произвольный односвязный континуум в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, функция f голоморфна на E, $f\in\mathscr{H}(E)$. Предположим, что существует непустое конечное множество точек $\Sigma\subset\overline{\mathbb{C}}$ такое, что функция f продолжается с компакта E по любому пути, не пересекающему множество Σ, и $f\notin\mathscr{M}(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Sigma)$; в таком случае будем писать $f\in\mathscr{A}_E(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Sigma)$.

Обозначим через $R_n=P_n/Q_n$ наилучшую равномерную рациональную аппроксимацию функции f на E в классе $\mathscr{R}_n$ – рациональных функций вида $r=p/q$, $\deg p,\deg q\leqslant n$, $q\not\equiv0$:

$$\|f-R_n\|_E=\min_{r\in\mathscr{R}_n}\|f-r\|_E,$$

$\|\cdot\|_E$ – sup-норма на E.

Для произвольного компакта $K\subset\overline{\mathbb{C}}\setminus E$ через D_K обозначим связную компоненту дополнения к K, содержащую континуум E. Пусть $\mathscr{K}_f$ – семейство компактов K таких, что $K\subset\overline{\mathbb{C}}\setminus E$, область D_K регулярна относительно решения задачи Дирихле и f допускает мероморфное (однозначное аналитическое) продолжение с континуума E в D_K: $f\in\mathscr{M}(D_K)$. Компакты $K\in\mathscr{K}_f$ будем называть допустимыми для функции $f\in\mathscr{A}_E(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Sigma)$.

Для произвольного компакта $K\subset\overline{\mathbb{C}}\setminus E$ такого, что область D_k регулярна относительно решения задачи Дирихле, и произвольной положительной меры μ с носителем на E положим

$$G_K^{\mu}(z)=\int_E g_K(z,\zeta)\,d\mu(\zeta),\qquad z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus(E\cup K),$$

– гринов (относительно K) потенциал меры μ, $g_K(z,\zeta)$ – функция Грина для области D_K. Через $\widetilde{\mu}$ обозначим выметание меры μ из области D_K на K.

Через $\mu(Q)$ обозначим меру, ассоциированную с произвольным полиномом Q:

$$\mu(Q)=\sum_{\zeta:Q(\zeta)=0}\delta_\zeta,$$

где δ_ζ – мера Дирака с носителем в точке ζ.

Следующий результат о сходимости наилучших равномерных рациональных аппроксимаций функции $f\in\mathscr{A}_E(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Sigma)$ принадлежит Г. Шталю [46]–[50].

Вторая теорема Шталя. *Пусть* $f\in\mathscr{A}_E(\overline{\mathbb{C}}\setminus\Sigma)$. *Тогда*

1) существует единственный компакт $F=F(f)\in\mathscr{K}_f$ *такой, что*

$$\operatorname{cap}(E,F)=\min_{K\in\mathscr{K}_f}\operatorname{cap}(E,K),\tag{91}$$

где $\operatorname{cap}(E,K)$ *– емкость конденсатора* (E,K)*; компакт* F *состоит из конечного числа кусочно-аналитических дуг и не разбивает плоскость;*

2) для нулей полинома Q_n *(знаменателя рациональной функции* R_n*) справедливо предельное соотношение:*

$$\frac{1}{n}\mu(Q_n)\to\widetilde{\lambda},\qquad n\to\infty,\tag{92}$$

где λ *равновесная мера (с носителем на* E*) для гринова потенциала компакта* F, $G_F^{\lambda}(z)\equiv\mathrm{const}$ *на* E, $\widetilde{\lambda}$ *– выметание меры* λ *на* F, *сходимость мер понимается в слабой топологии;*

3) последовательность R_n *сходится по емкости внутри (на компактных подмножествах) области* $D=\overline{\mathbb{C}}\setminus F$ *и на компактных подмножествах области* $\Omega=\overline{\mathbb{C}}\setminus(F\cup E)$ *имеем:*

$$\bigl|f(z)-R_n(z)\bigr|^{1/n}\xrightarrow{\operatorname{cap}}e^{-2G_F^{\lambda}(z)}<1,\qquad z\in K,\quad K\subset\Omega.\tag{93}$$

Отметим, что область D является максимальной областью сходимости последовательности R_n; скачок $\Delta f(\zeta)=(f^+-f^-)(\zeta)$, $\zeta\in\ell$, функции f на любой открытой дуге $\ell\subset F$ отличен от тождественного нуля: $\Delta f(\zeta)\not\equiv0$, $\zeta\in\ell$.

Соотношение (93) означает следующее: *для любого компакта $K \subset \Omega$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся номер $n_0 = n_0(K, \varepsilon)$ и число $\delta = \delta(K, \varepsilon) > 0$ такие, что при всех $n \geqslant n_0$ справедливо соотношение:*

$$(e^{-2G_F^\lambda(z)-\varepsilon})^n \leqslant |(f - R_n)(z)| \leqslant (e^{-2G_F^\lambda(z)+\varepsilon})^n, \qquad z \in K \setminus e_n, \quad \operatorname{cap} e_n < \delta. \tag{94}$$

Из (94) уже легко следует, что *каждый полюс a функции f в области D_f кратности $\nu(a) \geqslant 1$ притягивает при $n \to \infty$ по-крайней мере $\nu(a)$ полюсов рациональной функции R_n.*

Метод Шталя основан на том, что экстремальный компакт $F = F(f)$ (см. (91)) является совокупностью замыканий критических траекторий некоторого квадратичного дифференциала, состоит из конечного числа кусочно-аналитических дуг, не разбивает плоскость и вполне характеризуется следующим свойством S-симметрии (или S-свойством):

$$\frac{\partial G_F^\lambda(\zeta)}{\partial n_+} = \frac{\partial G_F^\lambda(\zeta)}{\partial n_-}, \qquad \zeta \in F_0, \tag{95}$$

F_0 – совокупность открытых аналитических дуг, составляющих F, $\partial n_\pm$ – производные по нормали с противоположных сторон F_0. Свойство неограниченной продолжаемости функции f в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Sigma$ не существенно; важен лишь тот факт, что f имеет "правильный" скачок на компакте F, обладающем S-свойством (95).

Вторая теорема Шталя доказывается по следующей схеме. Вначале на основе достаточно простых геометрических соображений (ср. лемма 1) устанавливается, что существует допустимый компакт $F \in \mathscr{K}_f$ такой, что

$$\operatorname{cap}(E, F) = \min_{K \in \mathscr{K}_f} \operatorname{cap}(E, K). \tag{96}$$

Затем с помощью вариационного метода доказывается, что F является замыканием критических траекторий некоторого квадратичного дифференциала. Отсюда уже вытекает S-свойство (95). Непосредственно на основе этого S-свойства устанавливается предельное соотношение (92) для нулей знаменателей рациональных аппроксимаций R_n. Соотношение (92) влечет сходимость по емкости последовательности $\{R_n\}$ к функции f внутри (на компактных подмножествах) области D. Единственность компакта F, удовлетворяющего условию (91), вытекает из сходимости (92).

Соотношение (92) эквивалентно соотношению

$$\bigl|Q_n(z)\bigr|^{1/n} \xrightarrow{\operatorname{cap}} e^{-V^{\widetilde{\lambda}}(z)}, \qquad z \in D, \tag{97}$$

где старший коэффициент полинома Q_n равен единице.

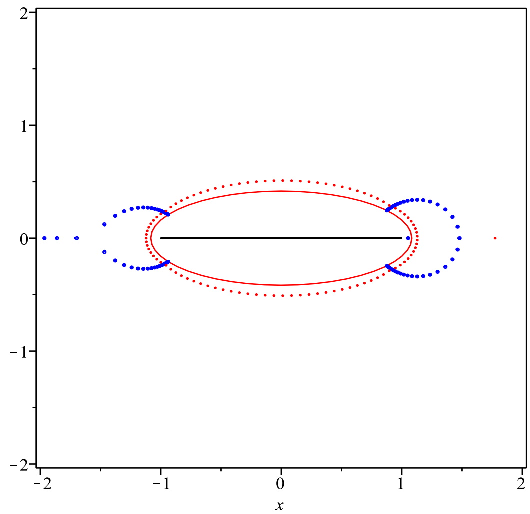

Рис. 2. Максимальный эллипс голоморфности (красная линия) функции $f(z)=\sqrt{(z-a)(z-\overline{a})}+\sqrt[3]{(z-b)(z-\overline{b})(z-c)}$, $\operatorname{Im} a, \operatorname{Im} b>0$, $c<0$, и расположение нулей (красные точки) частных сумм Фурье–Чебышёва S_{100} и полюсов и нулей (синие точки) нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва F_{50}.

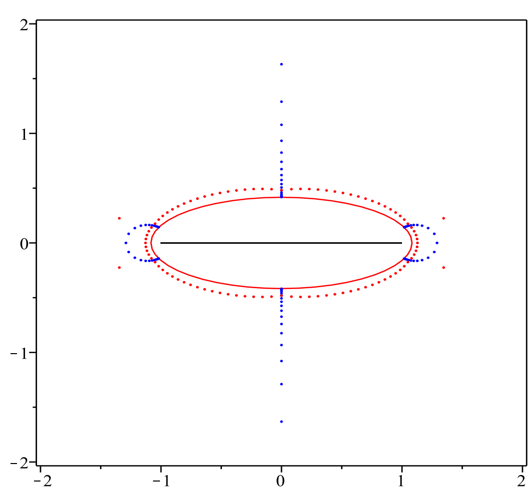

Рис. 3. Максимальный эллипс голоморфности (красная линия) функции $f(z)=\sqrt{(z-a)(z-\overline{a})}+\sqrt{(z-b)(z-\overline{b})}+\sqrt{(z-ic)(z+ic)}$, $\operatorname{Im} a, \operatorname{Im} b>0$, $c>0$, и расположение нулей (красные точки) частных сумм Фурье–Чебышёва S_{100} и полюсов и нулей (синие точки) нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва F_{50}.

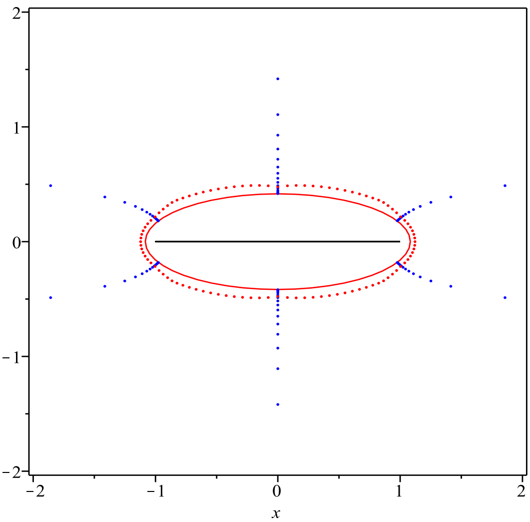

Рис. 4. Максимальный эллипс голоморфности (красная линия) функции $f(z) = \sqrt{(z-a)(z-\overline{a})} + \sqrt{(z-b)(z-\overline{b})} + \sqrt{(z-ic)(z+ic)}$, $\operatorname{Im} a, \operatorname{Im} b > 0$, $c > 0$, и расположение нулей (красные точки) частных сумм Фурье–Чебышёва S_{100} и полюсов и нулей (синие точки) нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва F_{50}.

Список литературы

[1] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, Д. Н. Туляков, "Случайные матрицы с внешним источником и асимптотика совместно ортогональных многочленов", *Матем. сб.*, **202**:2 (2011) (в печати.).

[2] A. I. Aptekarev, A. B. J. Kuijlaars, W. Van Assche, "Asymptotics of Hermite–Pade rational approximants for two analytic functions with separated pairs of branch points (case of genus 0)", Art. ID rpm007, *Int. Math. Res. Pap. IMRP*, 2008, 128 pp.

[3] Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации*, М., Наука, 1965.

[4] О. Б. Арушанян, Н. И. Волченскова, С. Ф. Залеткин, "Приближенное решение обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием рядов Чебышева", *Сиб. электрон. матем. изв.*, **7** (2010), 122–131.

[5] Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде*, Мир, М., 1986, 504 с.; G. A. Baker, Jr., P. Graves-Morris, *Pade approximants. Part* I. *Basic theory*, **13**, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981,, 325 pp; G. A. Baker, Jr., P. Graves-Morris, *Pade approximants. Part* II. *Extensions and applications*, **14**, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981,.

[6] T. Bergkvist, H. Rullgard, "On polynomial eigenfunctions for a class of differential operators", *Math. Res. Lett.*, **9**:2–3 (2002), 153–171.

[7] J. P. Boyd, *Chebyshev and Fourier spectral methods*, Dover Publications, Mineola, NY, 2001.

[8] J. P. Boyd, "Chebyshev expansion on intervals with branch points with application to the root of Kepler's equation: a Chebyshev–Hermite–Pade method", *J. Comput. Appl. Math.*, **223**:2 (2009), 693–702.

[9] V. I. Buslaev, "Simple counterexample to the Baker–Gammel–Wills conjecture", *East J. Approx.*, **7**:4 (2001), 515–517.

[10] В. И. Буслаев, “О гипотезе Бейкера–Гаммеля–Уиллса в теории аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **193**:6 (2002), 25–38.

[11] K. O. Geddes, “Block structure in the Chebyshev–Padé table”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **18**:5 (1981), 844–861.

[12] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1966.

[13] А. А. Гончар, “О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций”, *Матем. сб.*, **105(147)**:2 (1978), 147–163.

[14] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа”, *Теория чисел, математический анализ и их приложения*, Сборник статей. Посвящается академику Ивану Матвеевичу Виноградову к его к его девяностолетию, Тр. МИАН СССР, **157**, 1981, 31–48; *Proc. Steklov Inst. Math.*, **157** (1983), 31–50.

[15] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесная мера и распределение нулей экстремальных многочленов”, *Матем. сб.*, **125(167)**:1(9) (1984), 117–127; *Math. USSR-Sb.*, **53**:1 (1986), 119–130.

[16] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “Равновесные распределения и скорость рациональной аппроксимации аналитической функции”, *Матем. сб.*, **134(176)**:3 (1987), 306–352.

[17] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О задаче равновесия для векторных потенциалов”, *УМН*, **40**:4(244) (1985), 155–156; *Russian Math. Surveys*, **40**:4 (1985), 183–184.

[18] А. А. Гончар, Г. Лопес Лагомасино, “О теореме Маркова для многоточечных аппроксимаций Паде”, *Матем. сб.*, **105(147)**:4 (1978), 512–524.

[19] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, “О задаче равновесия для векторных потенциалов”, *УМН*, **40**:4(244) (1985), 155–156; *Russian Math. Surveys*, **40**:4 (1985), 183–184.

[20] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, “О сходимости аппроксимаций Паде ортогональных разложений”, *Труды МИАН*, **200** (1991), 136–146.

[21] A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, “On the rate of convergence of Padé approximants of orthogonal expansions”, *American–Russian Advances in Approximation Theory*, Springer-Verlag, New York, 1992, 169–190.

[22] A. A. Gonchar, E. A. Rakhmanov, S. P. Suetin, *On the convergence of Chebyshev–Padé approximations to real-valued algebraic functions*, `http://arxiv.org/abs/1009.4813`, 2010.

[23] А. А. Гончар, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, “О сходимости линейных аппроксимаций Паде–Чебышёва для многозначных аналитических функций”, in preparation, 2011.

[24] В. Н. Дубинин, “Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного”, *УМН*, **49**:1(295) (1994), 3–76.

[25] В. Н. Дубинин, “Некоторые свойства внутреннего приведенного модуля”, *Сиб. матем. журн.*, **35**:4 (1994), 774–792.

[26] S. W. Ellacott, “On the Faber transform and efficient numerical rational approximation”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **20**:5 (1983), 989–1000.

[27] S. W. Ellacott, E. B. Saff, “Computing with the Faber transform”, *Rational Approximation and Interpolation*, (Tampa, 1983), Lecture Notes in Math., **1105**, Springer, Berlin, 1984, 412–418.

[28] К. М. Ермохин, “Технология построения разрезов методом аналитического продолжения геофизических полей”, *Геоинформатика*, 2010, № 2, 51–60.

[29] Дж. Дженкинс, *Однолистные функции и конформные отображения*, ИЛ, М., 1962.

[30] R. Jentzsch, “Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen”, *Acta Math.*, **41**:1 (1916), 219–251.

[31] Л. А. Книжнерман, “Выделение полюсов потенциальных полей с помощью разложения в ряды Фурье–Чебышёва”, *Изв. АН СССР, сер. физика Земли*, 1984, № 11, 119–123.

[32] Л. А. Книжнерман, “Аппроксимация Паде–Фабера марковских функций на вещественно-симметричных компактах”, *Матем. заметки*, **86**:1 (2009), 81–94; *Math. Notes*, **86**:1 (2009), 81–92.

[33] М. Шиффер, “Некоторые новые результаты в теории конформных отображений”, Приложение к книге: Р. Курант, *Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности*, ИЛ, М., 1953, 234–301.

[34] Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы*, Труды МИАН, **139**, Наука, Л., 1980.

[35] Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала*, Наука, М., 1966.

[36] G. L. Litvinov, “Error autocorrection in rational approximation and interval estimates. A survey of results”, *Cent. Eur. J. Math.*, **1**:1 (2003), 36–60.

[37] В. И. Лебедев, “О нахождении многочленов наилучшего с весом приближения”, *Матем. сб.*, **199**:2 (2008), 49–70; *Sb. Math.*, **199**:2 (2008), 207–228.

[38] A. Martinez-Finkelshtein, E. A. Rakhmanov, *Critical measures, quadratic differentials, and weak limits of zeros of Stieltjes polynomials*, http://arxiv.org/abs/0902.0193, 2009.

[39] A. Martinez-Finkelshtein, E. A. Rakhmanov, *On asymptotic behavior of Heine–Stieltjes and Van Vleck polynomials*, http://arxiv.org/abs/0903.2614, 2009.

[40] А. Мартинес-Финкельштейн, Е. А. Рахманов, С. П. Суетин, *Вариация равновесной энергии и S-свойство стационарных компактов*, in preparation, 2011.

[41] Е. А. Перевозникова, Е. А. Рахманов, *Вариация равновесной энергии и S-свойство компактов минимальной емкости*, Препринт, М., 1994.

[42] Е. А. Рахманов, “К асимптотике многочленов Эрмита-Паде для двух марковских функций”, *Матем. сб.*, **202**:1 (2011).

[43] E. Remes, “Sur le calcul effectif des polynomes d’approximation de Tschebyscheff”, *C. R. Acad. Sci., Paris*, **199** (1934), 337–340.

[44] Е. Я. Ремез, *Основы численных методов чебышевского приближения*, Наукова думка, Киев, 1969.

[45] В. И. Смирнов, Н. А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1964.

[46] H. Stahl, “Extremal domains associated with an analytic function. I”, *Complex Variables Theory Appl.*, **4** (1985), 311–324.

[47] H. Stahl, “Extremal domains associated with an analytic function. II”, *Complex Variables Theory Appl.*, **4** (1985), 325–338.

[48] H. Stahl, “Structure of extremal domains associated with an analytic function”, *Complex Variables Theory Appl.*, **4** (1985), 339–354.

[49] H. Stahl, “Orthogonal polynomials with complex valued weight function. I”, *Constr. approx.*, **2** (1986), 225–240.

[50] H. Stahl, “Orthogonal polynomials with complex valued weight function. II”, *Constr. approx.*, **2** (1986), 241–251.

[51] H. Stahl, “Convergence of rational interpolants”, Numerical analysis. Louvain-la-Neuve, 1995, *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 1996, № suppl., 11–32.

[52] H. Stahl, “Diagonal Padé approximants to hyperelliptic functions”, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6). Spec. Iss.*, 1996, 121–193.

[53] H. Stahl, “The convergence of Pade approximants to functions with branch points”, *J. Approx. Theory*, **91**:2 (1997), 139–204.

[54] С. П. Суетин, “О теореме Монтессу де Болора для нелинейных аппроксимаций Паде ортогональных разложений и рядов Фабера”, *ДАН СССР*, **253**:6 (1980), 1322–1325.

[55] С. П. Суетин, “О существовании нелинейных аппроксимаций Паде–Чебышёва для аналитических функций”, *Матем. заметки*, **86**:2 (2009), 290–303.

[56] С. П. Суетин, “О равномерной сходимости диагональных аппроксимаций Паде для гиперэллиптических функций”, *Матем. сб.*, **191**:9 (2000), 81–114.

[57] G. Szegő, “Uber die Nullstellen von Polynomen, die in einem Kreise gleichmassig konvergieren”, *Sitzungsber. Berl. Math. Ges.*, **21** (1922), 59–64.

[58] L. N. Trefethen, M. H. Gutknecht, “The Caratheodory–Fejer method for real rational approximation”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **20**:2 (1983), 420–436.

[59] L. N. Trefethen, M. H. Gutknecht, “Padé, stable Padé, and Chebyshev–Padé approximation”, *Algorithms for Approximation* (Shrivenham, 1985), **10**, Oxford Univ. Press, New York, 1987, 227–264.

[60] Дж. Л. Уолш, *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области*, ИЛ, М., 1961.

А. А. Гончар (A. A. Gonchar)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Дата последнего обновления: 03.12.2010

Е. А. Рахманов (E. A. Rakhmanov)
University of South Florida,
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: rakhmano@shell.cas.usf.edu

С. П. Суетин (S. P. Suetin)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: suetin@mi.ras.ru