Московский институт электроники и математики
Национального исследовательского университета
«Высшая Школа Экономики»

Ряды Пюизё, алгебраические инварианты и интегрируемость полиномиальных динамических систем на плоскости

Демина Мария Владимировна

maria_dem@mail.ru

30 октября 2019 года, Москва

***Цель работы:* нахождение первых интегралов Дарбу и Лиувилля для полиномиальных динамических систем на плоскости**

План доклада:

- ***Основные определения***
- ***Необходимые и достаточные условия интегрируемости***
- ***Проблема Пуанкаре***
- ***Методы построения алгебраических инвариантов***
- ***Метод рядов Пюизё***
- ***Динамические системы Льенара***
- ***Дальнейшее развитие и обобщения***
- ***Заключение***

Основные определения

Полиномиальная динамическая система:

$$\boxed{x_t = P(x,y), \quad y_t = Q(x,y),} \quad P(x,y), Q(x,y) \in \mathbb{C}[x,y].$$

Векторное поле: $$\mathcal{X} = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

Определение 1. Функцию $I(x,y)\colon\ D \subseteq \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ называют первым интегралом векторного поля, $\mathcal{X}$ если

$$I(x(t),y(t)) \equiv C,\ (x(t),y(t)) \in D$$

$$\boxed{I(x,y) \in C^1(D) \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{X} I = 0}$$

Основные определения

$$\boxed{x_t = P(x,y), \quad y_t = Q(x,y)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\omega = Q(x,y)dx - P(x,y)dy$$

- Интегрирующий множитель $S(x,y) : D \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$

$$S(x,y)\{Q(x,y)dx - P(x,y)dy\} = dI(x,y)$$

$$\boxed{\mathcal{X}S = -\mathrm{div}(\mathcal{X})S, \quad (x,y) \in D} \qquad \mathrm{div}(\mathcal{X}) = P_x + Q_y$$

- Симплектическая форма $\Omega = S(x,y)dx \wedge dy$

Основные определения

(K, Δ) – дифференциальное поле

Расширение Лиувилля дифференциального поля:

$$\mathbb{C}(x, y) = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_M = L, \; K_{j+1} = K_j(s)$$

- s – алгебраический элемент K_j;
- $\forall \delta \in \Delta \Rightarrow \delta s \in K_j$;
- $\forall \delta \in \Delta \Rightarrow \dfrac{\delta s}{s} \in K_j, \quad s \neq 0$

Определение 2. Функцию $I(x, y) \in L$ принято называть *функцией Лиувилля.*

Основные определения

Функция Дарбу:

$$I(x,y) = F_1^{d_1}(x,y)\dots F_r^{d_r}(x,y)\exp\{R(x,y)\},$$

$$F_j(x,y)\in\mathbb{C}[x,y],\quad R(x,y)\in\mathbb{C}(x,y),\quad d_1,\dots,d_r\in\mathbb{C}.$$

Определение 3. Векторное поле $\mathcal{X}$ и соответствующая динамическая система, имеющая своим первым интегралом *функцию Дарбу,* называется интегрируемой по Дарбу.

Определение 4. Векторное поле $\mathcal{X}$ и соответствующая динамическая система, имеющая своим первым интегралом *функцию Лиувилля,* называется интегрируемой по Лиувиллю.

Основные определения

$$\omega = Q(x,y)dx - P(x,y)dy$$

$$\mathcal{X} = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

- Алгебраические инварианты (полиномы Дарбу)

$$F(x,y) \in \mathbb{C}[x,y] \setminus \mathbb{C} : \quad \mathcal{X}F = \lambda(x,y)F, \quad \lambda \in \mathbb{C}[x,y]$$

кофактор

- Экспоненциальные инварианты

$$E = \exp(g/f) \notin \mathbb{C} : \mathcal{X}E = \varrho(x,y)E, \qquad \varrho \in \mathbb{C}[x,y]$$

$$g(x,y), \quad f(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$$

кофактор

Необходимые и достаточные условия

$$\omega = Q(x,y)dx - P(x,y)dy$$

$$\mathcal{X} = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}F_j &= \lambda_j F_j, \quad j = 1,\dots,r; \\ \mathcal{X}E_k &= \varrho_k E_k, \quad k = 1,\dots,s \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{r} d_j\lambda_j + \sum_{k=1}^{s} e_k\varrho_k + \mathrm{div}(\mathcal{X}) = 0$$

⇔ Интегрируемость по Лиувиллю

$$d_1,\dots,d_r \in \mathbb{C}, \quad e_1,\dots,e_s \in \mathbb{C}$$

[J.G. Darboux 1878, M.F. Singer 1992, C. Christopher 1999]

Проблема Пуанкаре

Jean-Gaston Darboux (1842-1917)

Henri Poincaré (1854-1912)

Проблема Пуанкаре

Формулировка проблемы. Для заданного векторного поля $\mathcal{X}$ найти оценку сверху для степеней неприводимых алгебраических инвариантов: $\mathcal{P}(\mathcal{X})$.

Частичное решение 1. Если все неприводимые алгебраические инварианты векторного поля $\mathcal{X}$ являются гладкими, то $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \leq \deg \mathcal{X} + 1.$

[D. Cerveau, A. Lins Neto, 1991]

Частичное решение 2. Если все неприводимые алгебраические инварианты векторного поля $\mathcal{X}$ не содержат дикритических особых точек , то $\mathcal{P}(\mathcal{X}) \leq \deg \mathcal{X} + 2.$

[M. M. Carnicer, 1994]

Методы построения алгебраических инвариантов

- Метод неопределенных коэффициентов (метод Преля и Зингера);
- Метод Лагутинского;
- Метод разложения на весоднородные компоненты;

$$X^{(0)}F^{(0)} = \lambda^{(0)}(x, y)F^{(0)}$$

- Методы, использующие симметрии динамической системы;
- Метод дробно-степенных рядов (рядов Пюизё)

Метод рядов Пюизё

- $$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^{\frac{l_0}{n} - \frac{k}{n}}, \quad \varepsilon_1 < |x| < \infty$$

- $$y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (x - x_0)^{\frac{l_0}{n} + \frac{k}{n}}, \quad 0 < |x - x_0| < \varepsilon_2$$

$$\boxed{l_0 \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}}$$

$$\boxed{F(x, y) = 0, \quad y = y(x)}$$

$$\boxed{P(x, y) y_x - Q(x, y) = 0}$$

Лемма 1. Пусть ряд Пюизё $y(x)$ удовлетворяет уравнению $F(x, y) = 0$, где $F(x, y)$ – алгебраический инвариант. Тогда $P(x, y) y_x - Q(x, y) = 0.$

Метод рядов Пюизё

$$\{W(x,y)\}_+ = \text{ полиномиальная часть } W(x,y)$$

$$\{W(x,y)\}_- = W(x,y) - \{W(x,y)\}_+$$

Теорема 1. Пусть $F(x,y), F_y \not\equiv 0$ – неприводимый алгебраический инвариант векторного поля $\mathcal{X}$. Тогда $F(x,y)$ имеет вид

$$F(x,y) = \left\{\mu(x)\prod_{j=1}^{N}\{y - y_j(x)\}\right\}_+ , \ \mu(x) \in \mathbb{C}[x], \ N \in \mathbb{N},$$

где $\{y_j(x)\}$ попарно различные ряды Пюизё в окрестности бесконечности, удовлетворяющие уравнению

$$P(x,y)y_x - Q(x,y) = 0.$$

Метод рядов Пюизё

Нахождение $\mu(x)$

Лемма 2. Пусть существует конечное число рядов Пюизё в окрестности точки x_0, удовлетворяющих уравнению $P(x,y)y_x - Q(x,y) = 0$ и имеющих отрицательные показатели степеней в доминантных членах:

$$y_{j,x_0}(x) = b_0^{(j)}(x-x_0)^{-q_j} + \ldots, \quad b_0^{(j)} \neq 0,$$
$$q_j \in \mathbb{Q}, \quad q_j > 0, \quad 1 \le j \le J \in \mathbb{N}$$

Тогда кратность точки x_0 для многочлена $\mu(x)$ ограничена

$$\deg_{x_0} \mu(x) \le \sum_{j=1}^{J} q_j$$

Метод рядов Пюизё

Нахождение кофактора

Теорема 2. Пусть $F(x,y), F_y \not\equiv 0$ – неприводимый алгебраический инвариант векторного поля $\mathcal{X}$. Тогда $\lambda(x,y)$ имеет вид

$$\lambda(x,y) = \left\{\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{l=1}^{L}\frac{P(x,y)\nu_l x_l^m}{x^{m+1}} + \sum_{j=1}^{N}\frac{\{Q(x,y) - P(x,y)y_{j,x}\}y_j^m}{y^{m+1}}\right)\right\}_+,$$

где $\{y_j(x)\}$ попарно различные дробно-степенные ряды в окрестности бесконечности, удовлетворяющие уравнению

$$P(x,y)y_x - Q(x,y) = 0$$ и $$\mu(x) = \prod_{l=1}^{L}(x - x_l)^{\nu_l}.$$

Метод рядов Пюизё

Количество различных алгебраических инвариантов

Теорема 3. Векторное поле $\mathcal{X}$ имеет не более одного неприводимого алгебраического инварианта $F(x,y)$, такого что $F(x,y(x))=0$, где $y(x)$ ряд Пюизё, удовлетворяющий уравнению $P(x,y)y_x - Q(x,y) = 0$ и имеющий фиксированные коэффициенты.

Теорема 4. (Проблема Пуанкаре) Пусть векторное поле $\mathcal{X}$ принадлежит классу $A_{N,0}$. Тогда выполнено

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}) \leq \deg \mathcal{X} + 1.$$

Метод рядов Пюизё

Шаг 1.

$$P(x,y)y_x - Q(x,y) = 0$$

$$\{y_j(x), x = \infty\}$$

$$\{y_k(x), x = x_0\}$$

Шаг 2.

$$\left\{\mu(x)\prod_{j=1}^{N}\{y - y_j(x)\}\right\}_{-} = 0$$

Шаг 3.

$$\begin{cases} \mathcal{X}F(x,y) = \lambda(x,y)F(x,y) \\ F(x,y) = 0 \end{cases}$$

Метод рядов Пюизё

Экспоненциальные инварианты

$$\deg \varrho(x,y) \le \deg \mathcal{X} - 1$$

- $E = \exp(g): \quad \mathcal{X} g = \varrho(x,y)$
- $E = \exp(g/f): \mathcal{X} f = \lambda(x,y) f, \ \mathcal{X} g = \lambda(x,y) g + \varrho(x,y) f$

Теорема 5.

$$x = \infty$$

$$f(x, y(x)) = 0 \Rightarrow \frac{\lambda(x,y(x))}{P(x,y(x))} = \sum_{k=n}^{\infty} b_k x^{-k/n}, \ b_n \in \mathbb{Q}$$

$y(x)$ — Ряды Пюизё в окрестности бесконечности

Динамические системы Льенара

$$x_{tt} + f(x)x_t + g(x) = 0, \quad f(x), \quad g(x) \in \mathbb{C}[x]$$

$$(DL)$$

$$\deg f = m, \ \deg g = n$$

Уравнение Дуффинга: $x_{tt} + \alpha x_t + \varepsilon x^3 + \sigma x = 0$

Уравнение Дуффинга-Ван-дер-Поля: $x_{tt} + (3x^2 + \alpha)x_t + \varepsilon x^3 + \sigma x = 0$

Система ФитцХью-Нагумо:

$$\begin{cases} x_t = -x^3 + ex^2 + \sigma x - y + \delta, \\ y_t = \alpha x + \beta y \end{cases}$$

Динамические системы Льенара

Теорема [K. Odani, 1995]. Пусть $m \geq n,\ f \neq 0,\ g \neq 0,\ \dfrac{f}{g} \neq C.$

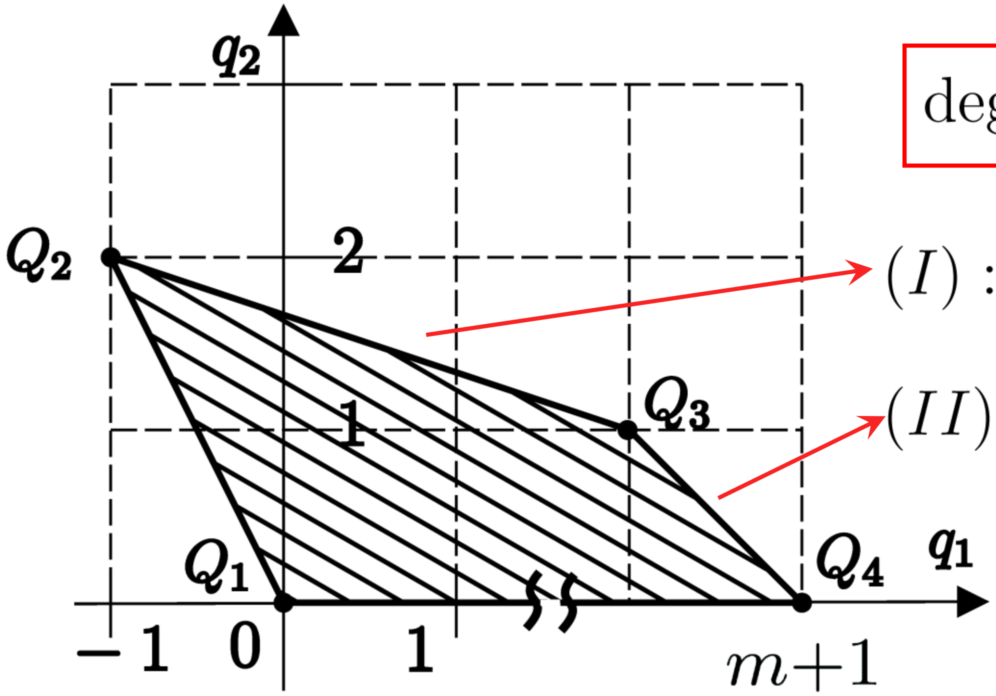
Тогда DL не имеет инвариантных алгебраических кривых.

~~*Теорема* [M. Hayashi, 1996]. Пусть $n = m + 1$. Тогда для неприводимых инвариантных алгебраических кривых DL выполнено $\deg_y F = 1.$~~

~~*Теорема* [H. Zoladek, 1998]. Пусть $m < n,\ n \neq 2m + 1.$ Тогда для неприводимых инвариантных алгебраических кривых DL выполнено $\deg_y F = 1$ или $\deg_y F = 2.$~~

Динамические системы Льенара

$$x_t = y,\ y_t = -f(x)y - g(x) \longleftrightarrow yy_x + f(x)y + g(x) = 0$$



$$\boxed{\deg f = m,\ \deg g = m+1}$$

$$(I):\quad y(x) = -\frac{f_0}{m+1}x^{m+1};$$

$$(II):\quad y(x) = -\frac{g_0}{f_0}x.$$

$$\boxed{x = \infty}$$

Динамические системы Льенара

Квадратичные динамические системы Льенара (QDL)

$$x_t = y, \quad y_t = -2xy + x^2 - \sigma x - \delta$$

Теорема 6. Степени неприводимых алгебраических инвариантов квадратичных динамических систем Льенара не ограничены.

$$\deg_y F = M, \quad \deg_x F = 2M - 1, \quad M \in \mathbb{N}.$$

$$\boxed{\sigma = -1, \quad \delta = \frac{(2M-3)(2M+1)}{16}}$$

Динамические системы Льенара

Замена переменных:

$$\boxed{n = m + 1}$$

$$\begin{cases} x = s,\ y = z - h(s) \quad \leftrightarrow \quad s = x,\ z = y + h(x) \\ h_x = f + \varrho, \quad \varrho = -\dfrac{(m+1)g_0}{f_0} \end{cases}$$

$$\boxed{s_t = z - h(s), \quad z_t = \varrho\{z - h(s)\} - g(s)} \qquad \boxed{(DLN)}$$

Теорема 7. Пусть $n = m + 1$ и $G(s, z)$ - неприводимая инвариантная алгебраическая кривая для *DLN*. Тогда $\deg_s G = 0$ или $\deg_s G = m + 1$.

Динамические системы Льенара

Уравнение Дуффинга- Ван-дер-Поля:

$$x_{tt} + (3x^2 + \alpha)x_t + \varepsilon x^3 + \sigma x = 0$$

Классификация:

- $\sigma = -\dfrac{\varepsilon}{9}(\varepsilon - 3\alpha), \quad \deg_y F = 1$
- $\sigma = \varepsilon(\alpha - \varepsilon), \quad \deg_y F = 1$
- $\alpha = 2\varepsilon, \quad \sigma = \dfrac{8\varepsilon^2}{9}, \quad \deg_y F = 2$
- $\alpha = -\dfrac{2\varepsilon}{3}, \quad \sigma = -\dfrac{4\varepsilon^2}{3}, \quad \deg_y F = 2$
- $\alpha = \dfrac{5\varepsilon}{2}, \quad \sigma = \dfrac{25\varepsilon^2}{18}, \quad \deg_y F = 3$
- $\alpha = \dfrac{40\varepsilon}{21}, \quad \sigma = \dfrac{125\varepsilon^2}{147}, \quad \deg_y F = 3$
- $\alpha = -\dfrac{20\varepsilon}{27}, \quad \sigma = -\dfrac{125\varepsilon^2}{81}, \quad \deg_y F = 3$

Динамические системы Льенара

Система Дуффинга – Ван-дер Поля:

$$x_t = y, \quad y_t = -(3x^2 + \alpha)y - (\varepsilon x^3 + \sigma x), \quad \varepsilon \neq 0$$

Теорема 8. Динамическая система Дуффинга – Ван-дер-Поля интегрируема по Лиувиллю тогда и только тогда, когда $\alpha = 4\varepsilon/3, \quad \sigma = \varepsilon^2/3.$

Обобщенная система Дуффинга:

$$x_t = y, \quad y_t = -\alpha y - \varepsilon x^m - \sigma x, \quad m \in \mathbb{N}, \quad m \geq 2$$

Теорема 9. Обобщенная система Дуффинга интегрируема по Лиувиллю тогда и только тогда, когда

$$m = 2,\ \sigma = \pm\frac{6\alpha^2}{25} \qquad \text{и} \qquad m > 2,\ \sigma = \frac{2\alpha^2(m+1)}{(m+3)^2}.$$

Дальнейшее развитие и обобщения

Обобщенные ряды Пюизё

$$l_0 \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- $y(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k(t) x^{\frac{l_0}{n} - \frac{k}{n}}, \quad x \in \dot{U}_{\varepsilon_1}(\infty), \quad t \in T$
- $y(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(t) (x - x_0)^{\frac{l_0}{n} + \frac{k}{n}}, \quad x \in \dot{U}_{\varepsilon_2}(x_0), \quad t \in T$

Неавтономные динамические системы:

$$x_t = P(x,y,t), \; y_t = Q(x,y,t)$$

$$P, \, Q \in \mathbb{M}(D)[x,y]$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{y_t + P(x,y,t) y_x - Q(x,y,t) = 0}$$

Дальнейшее развитие и обобщения

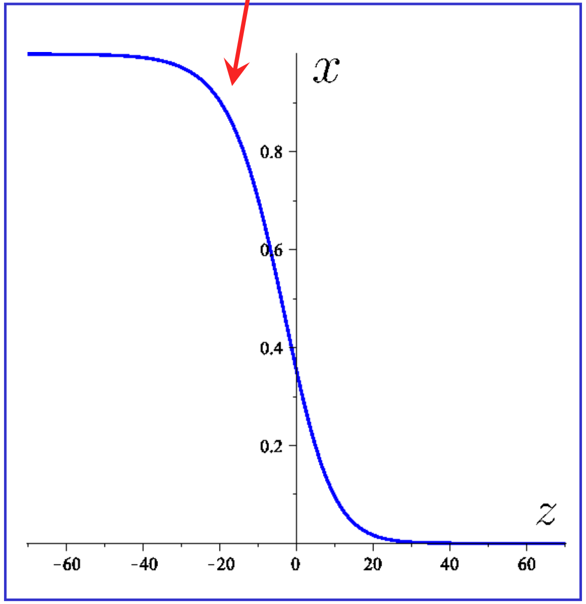
УЧП:

$$\boxed{u(s,\tau) = x(z),\ z = s + v_0\tau}$$

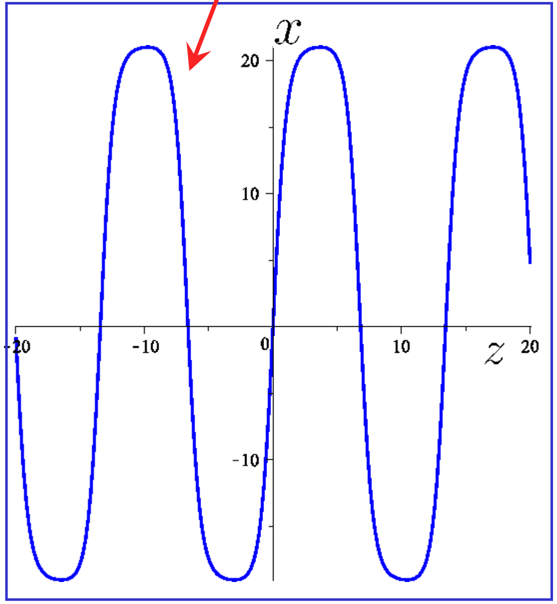
ОДУ:

$$E(u, u_\tau, u_s, u_{\tau\tau}, u_{s\tau}, u_{ss}, \ldots) = 0 \quad \Longrightarrow \quad R(x, x_z, x_{zz}, \ldots) = 0$$

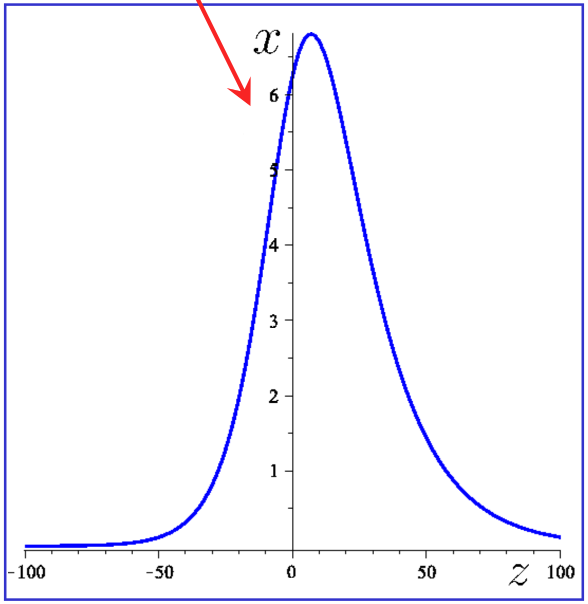
Кинк



Периодическая волна



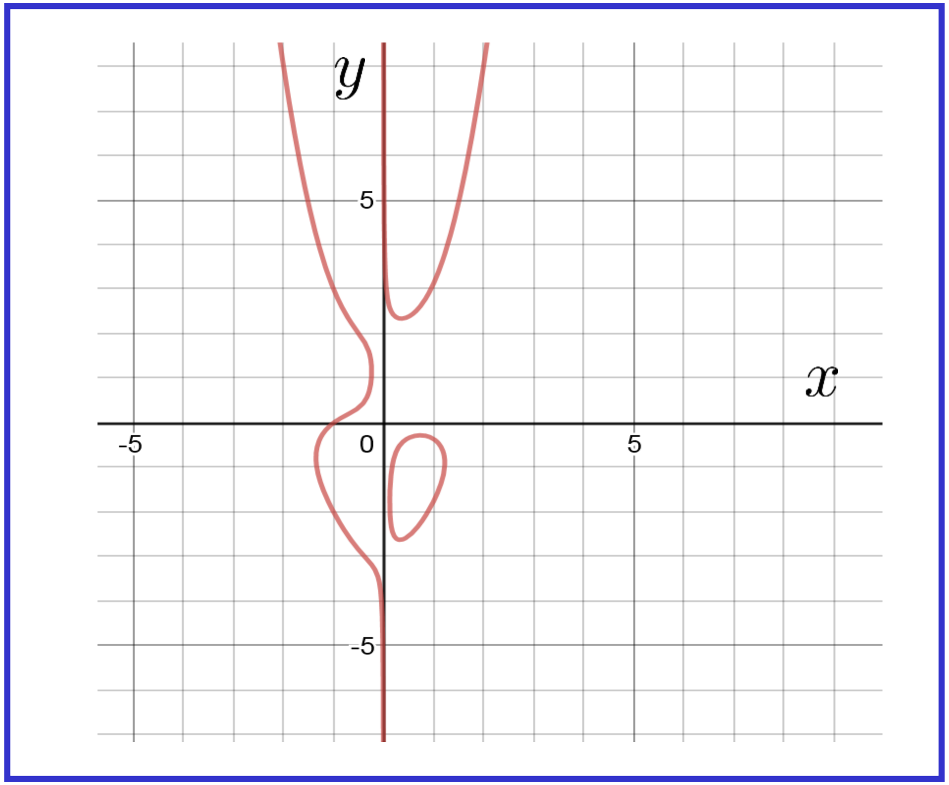
Уединённая волна



Дальнейшее развитие и обобщения

Алгебраическая формулировка второй части XVI-ой проблемы Гильберта

Для заданного векторного поля $\mathcal{X}$ найти оценку сверху для числа алгебраических предельных циклов.



Заключение

1. Предложен новый метод построения и классификации алгебраических инвариантов.

2. Выведено общее представление для алгебраических инвариантов и их кофакторов.

3. Решена проблема Пуанкаре для некоторых семейств динамических систем на плоскости.

4. Решена проблема интегрируемости по Дарбу и Лиувиллю для некоторых нелинейных осцилляторов, в том числе для осцилляторов Дуффинга и Дуффинга – Ван-дер-Поля.

5. Найдены новые точные решения для осциллятора Дуффинга – Ван-дер-Поля.