

УСТОЙЧИВОСТЬ СТРУКТУРЫ НЕЙТРАЛЬНО УСТОЙЧИВЫХ УДАРНЫХ ВОЛН (УВ)

Введение. УВ - разрыв в течении газа

①

$\vec{v}_{x1}$

$\rho_1, p_1, v_{y1} = 0$

$v_{x1} > c_1$

②

$\vec{v}_{x2}$

$\rho_2, p_2, v_{y2} = 0$

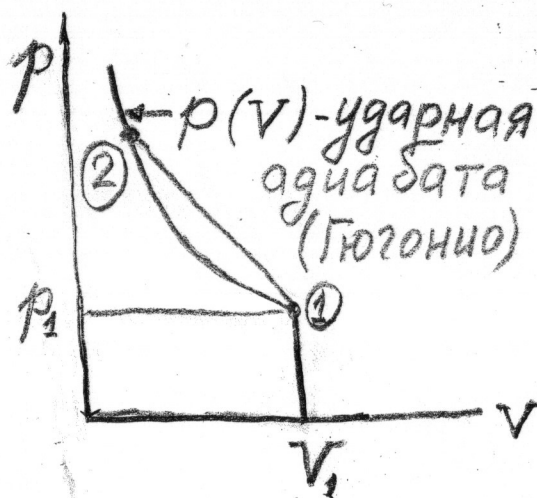
$v_{x2} < c_2$

Закон сохранения

$$\begin{cases} [\text{поток массы}] = 0 & (1 \text{ соотн.}) \\ [\text{поток импульса}] = 0 & (2 \text{ соотн.}) \\ [\text{поток энергии}] = 0 & (1 \text{ соотн.}) \end{cases} \quad [S] \geq 0$$

Внутренняя энергия единицы массы газа

$\epsilon = \epsilon(\rho, p)$



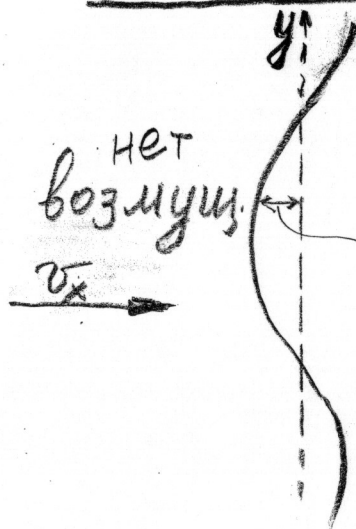
$$V = \frac{1}{\rho}$$

Устойчивость ударных волн (лин.)

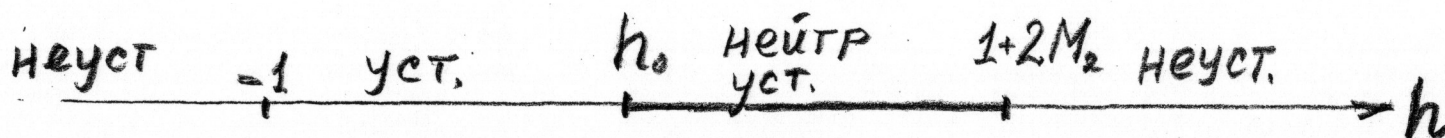
Дьяков С.П. (1954)

Конторович В.М. (1957)

Иорданский С.В. (1957)



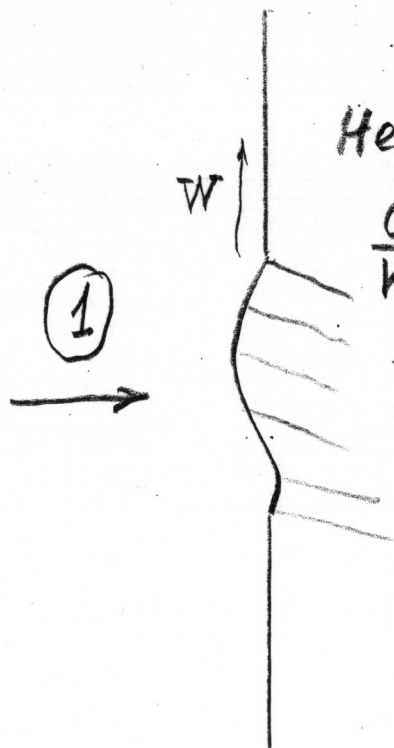
возмущения
 $\delta p, \delta \rho, \delta v_x, \delta v_y \sim e^{i(k_y y - \omega t)}$
 $\text{Im } k_y = 0$



$$M = \frac{v_x}{c}$$

$$h_0 = \frac{1 - M_2^2 - M_1 M_2}{1 - M_2^2 + M_1 M_2}$$

$$h = \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2} \left(\frac{\partial V_0}{\partial P_2} \right)_h$$



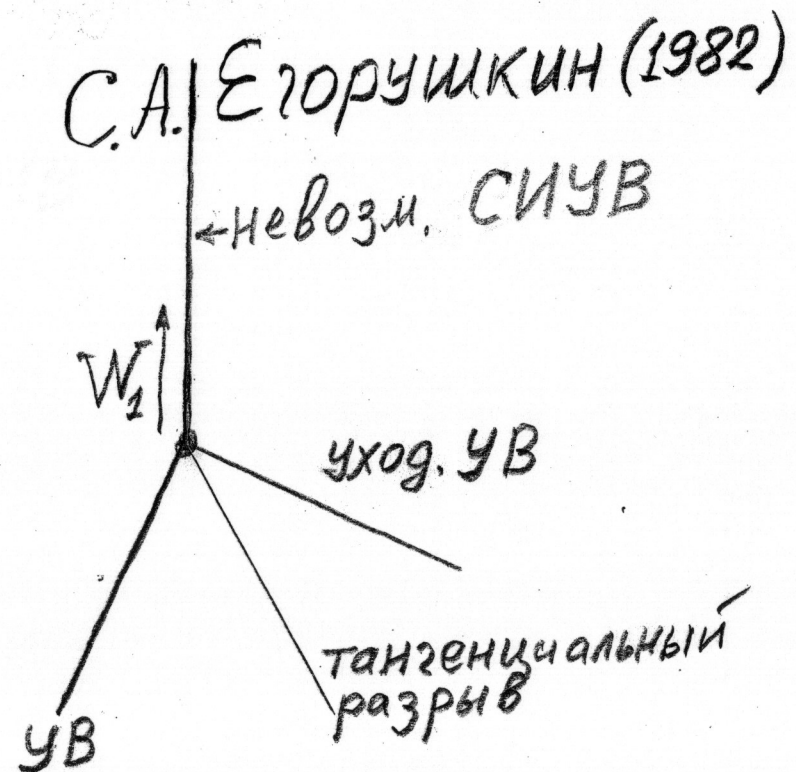
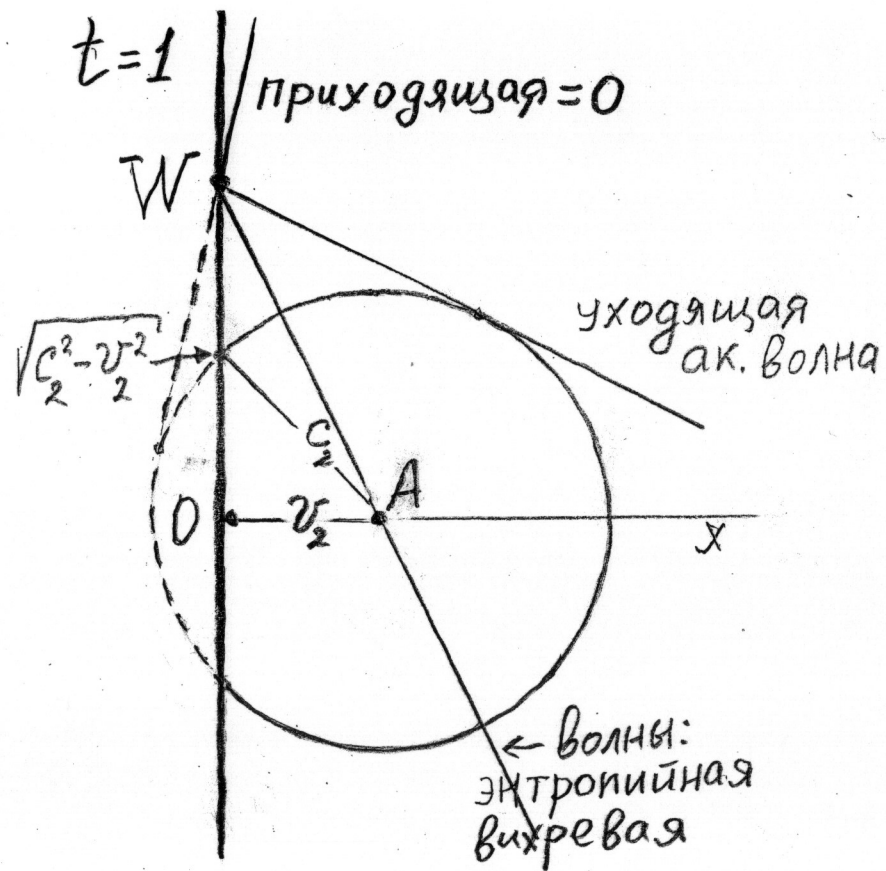
Нейтр. уст.

$$\frac{\omega}{k_y} = W, W > \sqrt{c_2^2 - v_{x2}^2}$$

W - сверхзвуковая скорость

"Спонтанно излучающая УВ"
 СИУВ

C.S. Gardner (1963)
 Н. М. Кузнецов (1985)



Кузнецов Н.М. (1989)

«Спонтанных возмущений фронта УВ... не существует. Такие решения не удовлетворяют принципу причинности»

А.В. Конюхов, А.П. Лихачев, В.Е. Фортов, А.М. Опарин, С.И. Анисимов (2008)

В расчетах „... спонтанной генерации акустических волн не наблюдалось. Это позволяет предположить невозможность спонтанного излучения звука ударной волной даже в случае её нейтральной устойчивости.“

О работах Кузнецова:

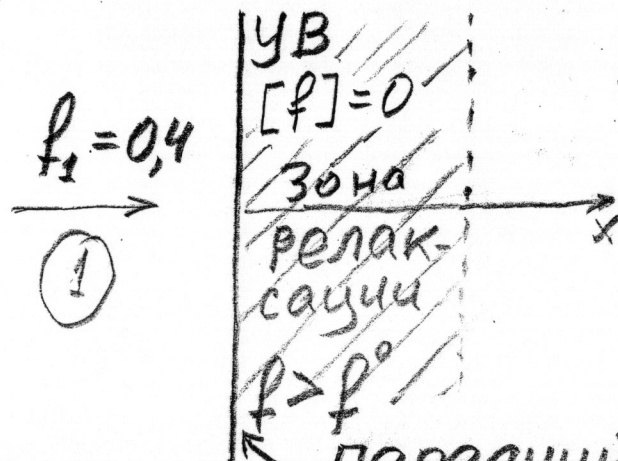
„Результаты этих работ носят предположительный и в известной степени противоречивый характер, не позволяя сформулировать окончательные выводы о формах проявления нейтральной устойчивости в реальных условиях.“

Предлагаемый подход. Рассмотреть структуру СИУВ и её устойчивость.

Структура: релаксационные процессы

Изменение (уменьшение) γ $pV = (\gamma - 1)E$ E - вн. эн. ед. м.

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\lambda(\gamma - \gamma^e(n, p)) \quad \gamma - 1 = f$$



$$f_2 = f^e(V_2, p_2) = 0.2$$

Для простоты принималось, что в зоне релаксации

$$\frac{\partial f^e}{\partial p} = \text{const}, \quad \frac{\partial f^e}{\partial V} = \text{const}$$

① → ② СИЧВ

передний фронт структуры - УВ с $f = 0.4$ ($\delta = 1.4$)

Законы сохранения дают:

$$\text{ударная адиабата: } \varepsilon - \varepsilon_1 - \frac{1}{2}(V_1 - V)(p + p_1) = 0$$

$$\varepsilon = \frac{1}{f} pV, \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{f_1} pV$$

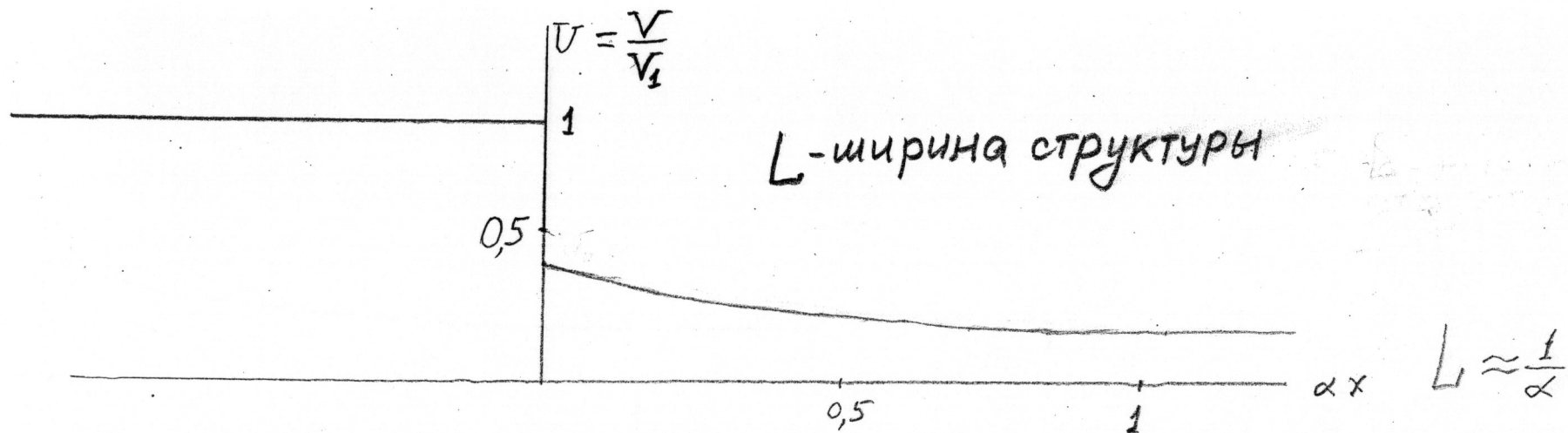
прямая Михельсона

при V на прямой Михельсона $f = f(V)$

$$\frac{p - p_1}{V_1 - V} = j^2 = \text{const}, \quad j = \rho v_x$$

Все величины - функции f

$$\frac{df}{dt} = -\lambda(f - f^e) \rightarrow \alpha x = -\int_{V_0}^V \frac{v f'(v) dv}{f(v) - f^e(v)}, \quad V = \frac{v}{V_1}, \quad \alpha = \frac{\lambda}{j V_1} = \frac{\lambda}{v_x}$$



Устойчивость структуры

Уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y) = 0 \\ \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v_x \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + v_y \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \frac{p}{\rho} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial t} + v_x \frac{\partial f}{\partial x} + v_y \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda [f - f^e(p, \rho)] = 0 \quad p = \rho \varepsilon f \end{array} \right.$$

Линеаризация: $\rho = \rho_0(x) + \delta \rho$, $v_x = v_{0x}(x) + \delta v_x$, δv_y , $\varepsilon = \varepsilon_0(x) + \delta \varepsilon$, $f = f_0(x) + \delta f$

$$\begin{pmatrix} \delta \rho \\ \delta v_x \\ \delta v_y \\ \delta \varepsilon \\ \delta f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \\ u_4(x) \\ u_5(x) \end{pmatrix} e^{i(k_y y - \omega t)}$$

$u = u(x)$ - столбец

$\frac{du}{dx} = \overset{\text{матрица}}{C}(x, k_y, \omega) u$ (1)

$$u = \sum_{i=1}^5 a_i F^i(x)$$

Граничные условия. Ударная волна при $x = \xi e^{i(k_y y - \omega t)}$
(4 закона сохранения и условие $f = f_1$)

После сноса граничных условий на $x=0$ и исключения ξ получим 4 условия для $u_i(0)$ $i=1,2,3,4,5$.

Условие непримешдения возмущений 1) При $x < 0$ возмущений нет
Это означает, что условия при $x=0$ однородны

$$\sum_{j=1}^5 \mathcal{H}_{ij} u_j(0) = 0 \quad i=1,2,3,4 \quad (2)$$

2) Условие непримешдения ак. возмущения из $x = \infty$.

Будет показано, что это условие может быть преобразовано к виду

$$\sum_{j=1}^5 \mathcal{H}_{5j} u_j(0) = 0 \quad (3)$$

Было $\frac{du}{dx} = C(x)u(1)$ При $x \rightarrow \infty$ $C \rightarrow C_\infty = \text{const}$
 $u = \sum_{i=1}^5 c_i z^i e^{M_i x} (4)$

$$(C_\infty - M_i I) z^i = 0, \quad |C_\infty - M_i I| = 0 \quad M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$$

возмущения: энтропийные, вихревые, δf , ак. уход., ак. приходящие
 ак. приход. $M = M$. $\text{Im } M_\alpha > 0$. $\text{Im } M_\alpha \leq 0$ $\alpha = 1, 2, 3, 4$.

Отсутствие приходящего возм. в решении (4)
 $c_5 = 0$ (5)

Сопряженное к (1) уравнение $\frac{dZ}{dx} = -ZC(x) (6)$

При $x \rightarrow \infty$ $\frac{dZ}{dx} = -ZC_\infty (8)$ $\frac{d}{dx}(u \cdot Z) = 0 (7)$

Решение ур. (8) $Z = \sum_{i=1}^5 b_i \ell^i e^{-M_i x}$ $\ell^i (C_\infty - M_i I) = 0$

Вектор ℓ^5 ортогонален z^1, z^2, z^3, z^4

При $x \gg L$ условие непримождения $c_s = 0$ записывается

$$(u \cdot l^5) = c_s (z \cdot l^5) = 0 \quad (9)$$

Рассмотрим решение $z = G^5(x)$ ур. (6), такое что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G^5(x) e^{M_1 x} = l^5$$

Тогда при $x \gg L$ $(u(x) \cdot G^5(x)) = 0$. Поскольку $\frac{d}{dx}(u(x) \cdot G^5(x)) = 0$,

получим $(u(0) \cdot G^5(0)) = 0$,

то есть в (3)

$$\mathcal{H}_{5j} = G_j^5$$

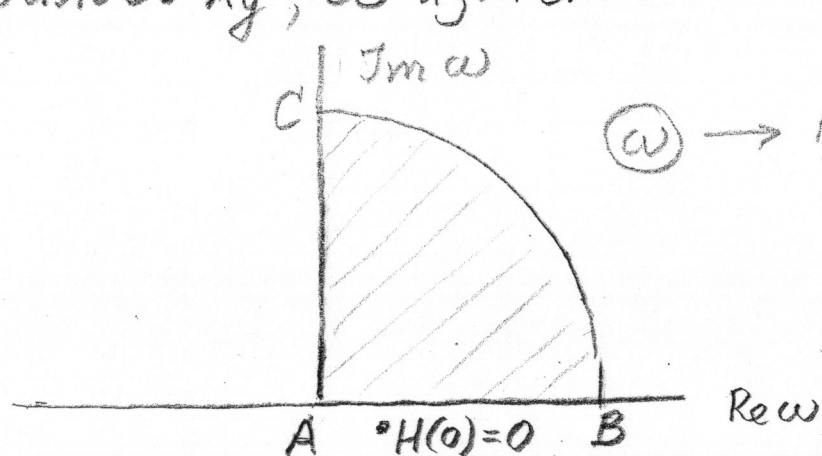
Уравнения (2) и (3) записываются

$$\mathcal{H}u(0) = 0 \text{ или } \mathcal{H}_{ij} u_j(0) = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, 5$$

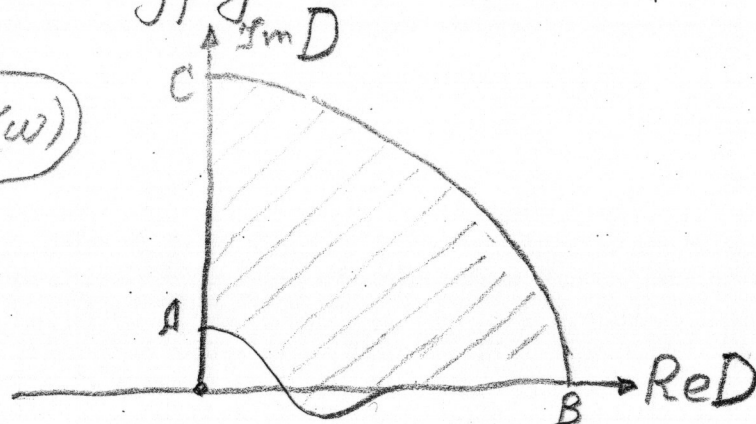
$$\text{Дисп. ур.: } |\mathcal{H}_{ij}(\kappa_y, \omega)| \equiv D(\kappa_y, \omega) = 0$$

Устойчивость Принцип аргумента

Задавалось K_y , ω изменялось по контуру $\omega \rightarrow \mathcal{H}(\omega)$



$$\omega \rightarrow D(\omega)$$



K	$\text{Re } \omega / K$	$\text{Im } \omega / K^2$
0.001	1.65	-0.800
0.003	1.65	-0.800
0.01	1.65	-0.800
0.0254	1.65	-0.805
0.1	1.65	-0.833
0.15	1.65	-0.838

$$\omega = W K - i b K^2 \text{ для } K \ll 1 (\lambda \gg L)$$

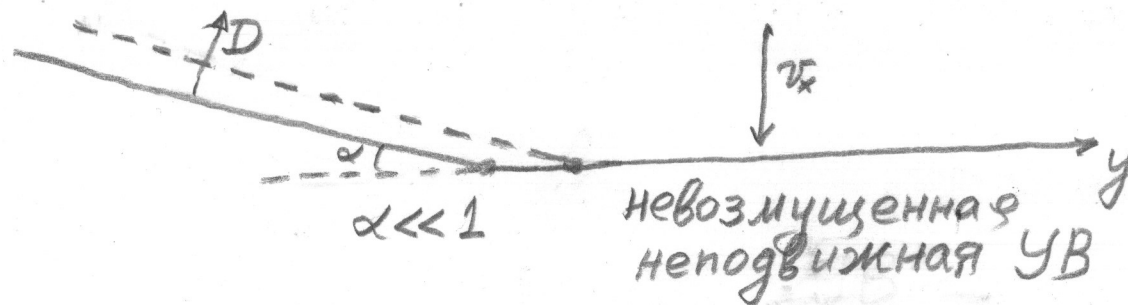
$$K = K_y L$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + W \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial x} = b \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial x^2}$$

W соответствует случаю $L=0$. (Дьяков)

Выводы. Огранич. результ. — конкретная УВ и её структура.

1. Устойчивость: $\text{Im } \omega \leq 0$, если $\text{Im } k_y = 0$
 2. При $k_y \rightarrow 0$ $\text{Im } \frac{\omega}{k_y} \rightarrow 0$, значение $\frac{\omega}{k_y}$ соответствует W при $L=0$.
 3. Можно строить устойчивые решения, описывающие волны, распространяющиеся по невозмущенному фону.
- СИУВ может передавать возмущения со сверхзвуковой скоростью.



$$W = \frac{\partial D}{\partial \alpha}$$