

Целочисленные матрицы измерений с малыми по величине элементами

С.В. Конягин, МИАН;
К.С. Рютин, МГУ им. М.В. Ломоносова, лаб.
"Многомерная аппроксимация и приложения"

2020, Москва

Напоминания, обозначения

- $\|z\|_p = (|z_1|^p + \dots + |z_N|^p)^{1/p}$ для $z \in \mathbb{R}^N$ и $p \geq 1$
- $\|z\|_0 = \#\{i : z_i \neq 0\}$
(количество ненулевых координат) для $z \in \mathbb{R}^N$
- $x \in \mathbb{R}^N$ является k -разреженным (sparse), если $\|x\|_0 \leq k$
- $c, C, C_1, C_2, \dots$ — абсолютные положительные постоянные

Compressed Sensing

Всюду далее $1 \leq k \leq n < N$. Пусть задана $n \times N$ матрица Φ . Рассматривается задача восстановления k -разреженного вектора $x \in \mathbb{R}^N$ по вектору $y = \Phi x \in \mathbb{R}^n$. Эта задача является важной частью теории, называемой в русскоязычной литературе теорией сжатых измерений (“Compressed Sensing” или “Compressive Sampling”). Естественно было бы решать такую задачу:

$$\|z\|_0 \rightarrow \min, \quad z \in \mathbb{R}^N, \quad \Phi z = y. \quad (P_0)$$

К сожалению, она является NP-сложной. Единственность восстановления для k -разреженных векторов равносильна условию $k < \frac{1}{2}\text{spark}(\Phi)$, где $\text{spark}(\Phi)$ — минимальное число линейно зависимых столбцов.

Для построения эффективных алгоритмов вычисления x Чен, Донохо и Сандерс (2001) рассмотрели следующую задачу ℓ_1 -минимизации:

$$\|z\|_1 \rightarrow \min, \quad z \in \mathbb{R}^N, \quad \Phi z = y. \quad (P_1)$$

Задача относится к выпуклой (линейной) оптимизации и, тем самым, может эффективно решаться.

Отметим, что задача ℓ_1 -минимизации связана и с задачей восстановления вектора $x \in \mathbb{R}^N$, принадлежащего заданному подпространству размерности n , если при задании вектора x разрешается допускать ошибки не более чем в k координатах.

Всплеск активности в этом направлении начался с работ Донохо, Элада, Кандеса, Ромберга, Тао (2005-2006). В них были указаны приложения этого подхода (передача сигналов, кодирование изображений), дано теоретическое обоснование метода (указаны необходимые условия на матрицу), показано, что эти условия выполнены для известных классов случайных матриц (Бернулли, Гаусс, Фурье).

В приложениях x — коэффициенты разложения по ортонормированной системе или же фрейму.

Рассматриваются различные модификации основной задачи: например, "сжимаемые" сигналы (хорошо приближаемые разреженными), задача восстановления разреженного вектора по малому числу линейных измерений.

Данная проблематика изучалась в работах Candés, Romberg, Tao (2006), Donoho (2006), Kashin, Temlyakov (2007), Cohen, Dahmen, DeVore (2009), Foucart, Pajor, Rauhut, Ullrich (2010), Linial, Novik (2011) и многих других. Имеются книги и обзоры по теории сжатых измерений: упомянем Fornasier, Rauhut (2011) и Davenport, Duarte, Eldar, Kutyniok (2012). В основе работы по геометрии банаховых пространств и теории приближений (теории поперечников) 70–80хх.

Нас будут интересовать следующие вопросы.

1. При каких k, n, N существуют $n \times N$ матрицы Φ , удовлетворяющие условию

($\star$) для любого k -разреженного вектора $x \in \mathbb{R}^N$ и $y = \Phi x$ решение задачи (P_1): $\|z\|_1 \rightarrow \min, \Phi z = y$, единственно и совпадает с x .

2. Явное построение матриц, удовлетворяющих условию ($\star$).

Достаточное условие существования матрицы с условием $(\star)$

Рядом авторов (Донохо, ДеВор, Кашин и Темляков) отмечалась связь между задачей сжатого измерения и оценками поперечников конечномерных множеств. Важную роль в этих вопросах играет ядро $\mathcal{N}(\Phi) = \{x: \Phi x = 0\}$. Обозначим

$$\sigma_k(x) = \min \|x - \tilde{x}\|_1,$$

где минимум берется по k -разреженным векторам $\tilde{x}$. Б.С. Кашин и В.Н. Темляков (2007) доказали, что следующие три свойства эквивалентны:

- *слабое свойство сжатого измерения*: для любого $x \in \mathbb{R}^N$ и любого решения z задачи (P_1) имеет место неравенство $\|x - z\|_2 \leq C_1 k^{-1/2} \|x\|_1$;
- *сильное свойство сжатого измерения*, определяемое более сильным неравенством $\|x - z\|_2 \leq C_2 k^{-1/2} \sigma_k(x)$;
- *свойство поперечника*: $\|x\|_2 \leq C_3 k^{-1/2} \|x\|_1$,
 $\forall x \in \mathcal{N}(\Phi)$.

Для k -разреженного вектора $\sigma_k = 0$, т.е. при выполнении сильного свойства сжатого измерения, восстановление точное.

В той же работе было отмечено, что из известных оценок Б.С. Кашина (1977) и А.Ю. Гарнаева и Е.д. Глускина (1984) Колмогоровских поперечников конечномерных множеств следует, что сильное свойство сжатого измерения имеет место при k , удовлетворяющих неравенству

$$k \leq C_1 n / \log(2N/n)$$

для подходящих матриц Φ и не имеет места для $k \geq C_2 n / \log(2N/n)$. Отсюда вытекает, что при выполнении того же неравенства существует $n \times N$ матрица Φ , удовлетворяющая $(\star)$. Другое доказательство этого факта дали Канделес, Ромберг и Тао (2006) на основе понятия свойства ограниченной изометрии (restricted isometry property).

Если при данных k, n, N существует $n \times N$ матрица Φ , обладающая свойством $(\star)$, то $k \leq \max(1, Cn/\log(2N/n))$.

Отметим, что в случае $n = 1$ даже при $k = 1$ соответствующей матрицы не существует.

Для подпространства $M \subset \mathbb{R}^N$ положим $k^*(M) = \min \{ |I| : \sum_{i \in I} |x_i| \geq \frac{1}{2} \|x\|_1 \text{ для некоторого } x \in M \setminus \{0\} \}$.

Максимальное k , при котором существует матрица Φ со свойством $(\star)$, равно $k_{n,N}^* - 1$, где

$$k_{n,N}^* = \max_{\Phi} k^*(\mathcal{N}(\Phi)) = \max_{L \subset \mathbb{R}^N, \dim L \geq N-n} k^*(L).$$

Свойство ограниченной изометрии

Кандес и Тао (2005) ввели свойство k -ограниченной изометрии с константой $\delta_k \in [0, 1)$ для матрицы Φ , которое заключается в том, что для всех k -разреженных векторов x выполнено неравенство

$$(1 - \delta_k) \|x\|_2^2 \leq \|\Phi x\|_2^2 \leq (1 + \delta_k) \|x\|_2^2.$$

Они показали, что если $\delta_k + \delta_{2k} + \delta_{3k} < 1$, то для матрицы Φ выполняется свойство $(\star)$. Этот результат был уточнен в ряде работ (достаточно $\delta_{2k} < 0.472$). Кроме того, Кандес, Ромберг и Тао (2006) доказали, что случайные матрицы (с некоторым распределением вероятностей) удовлетворяют свойству k -ограниченной изометрии с вероятностью, близкой к единице, при $k \asymp n / \log(2N/n)$. Известно, что при фиксированном δ эта оценка точна.

Оценки для случайных матриц

Пусть $n, N, k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon, \delta \in (0; 1)$ и $\Phi = (\varphi_{ij})$ – $n \times N$ матрица

- φ_{ij} независимые, одинаково распределенные (как ξ), субгауссовские: $P(|\xi| > t) \leq 2 \exp(-t^2/K^2)$,

$E\varphi_{ij} = 0$, $D\varphi_{ij} = 1$ и $n \geq C(\varepsilon, \delta, \xi)k \log(2N/k)$.

С вероятностью $\geq 1 - \varepsilon$ выполнено $\delta_k(\frac{\Phi}{\sqrt{n}}) \leq \delta$.

- Φ получено выбором n строк случайным образом из $N \times N$ матрицы дискретного преобразования Фурье и $n \geq C(\varepsilon, \delta)k \log^4(2N)$.

С вероятностью $\geq 1 - \varepsilon$ выполнено $\delta_k(\frac{\Phi}{\sqrt{N}}) \leq \delta$.

Предполагалось, что показатель 4 может быть понижен до 1.

Преодоление 1/2- барьера

Для фиксированного $a > 0$ были давно известны явные примеры матриц размера $n \times N$, $N \geq n^a$, со свойством $(\star)$ для некоторого $k \gg_a n^{1/2}$. Однако, 10 лет назад даже для $N = 2n$ не было примеров таких матриц с $k/n^{1/2} \rightarrow \infty$. Задача преодоления 1/2- барьера заключалась в явном построении таких матриц с $k \geq n^{1+\epsilon}$.

Теорема. (Ж. Бурген, С. Дилуорф, К. Форд, С. Конягин, Д. Куцарова, 2011) Существует число $\epsilon > 0$ такое, что для достаточно большого n и любых $n \leq N \leq n^{1+\epsilon}$, $k \leq n^{1/2+\epsilon}$, $\delta = n^{-\epsilon}$ можно явно построить $n \times N$ матрицу Φ со свойством k -ограниченной изометрии с константой δ .

Комплекснозначная матрица с указанными свойствами для простого $n = p$ строится следующим образом. В качестве столбцов берутся вектора $e_p(ax^2 + bx)$, $x = 0, \dots, p - 1$, где $e_p(u) = \exp(2\pi i u/p)$, a и b пробегают специально построенные множества A и B соответственно. Имея комплекснозначную матрицу порядка $n \times N$, легко построить действительнозначную матрицу порядка $(2n) \times (2N)$ со свойством ограниченной изометрии с теми же параметрами.

Целочисленные сжатые измерения.

Проблематику восстановления векторов по линейным измерениям, задаваемым целочисленными матрицами, вероятно, первыми рассмотрели Л. Фукшански, Д. Ниделл и Б. Судаков (2019).

Рассматривается уравнение

$$y = Ax,$$

где A — целочисленная $m \times d$ матрица (мы будем называть её матрицей измерений). Под $|A|$ понимается максимальный из модулей элементов матрицы $A = (a_{ij})$, вектор x предполагается s -разреженным, то есть его носитель имеет мощность s , а $M = \max |x_j|$.

Основные вопросы: когда можно построить целочисленную $m \times d$ матрицу A такую, что любой s -разреженный вектор $x \in \mathbb{Z}^d$ может быть однозначно восстановлен по вектору Ax ? Такую матрицу будем называть хорошей (или s -хорошей). Насколько маленькими можно сделать элементы такой матрицы? Представить алгоритм восстановления и оценить его сложность.

Опишем известные результаты: Фукшански, Ниделл и Судаков показали, что для матрицы из $A \in \mathbb{Z}^{m \times d}$, у которой $|A| \leq k$, а все $m \times m$ подматрицы имеют полный ранг, необходимым образом выполняется $d = O(k^2 m)$. Подобные матрицы обеспечивают однозначность восстановления векторов при $s \leq m/2$. Существование таких матриц авторами было доказано при $d = \Omega(\sqrt{k} m)$. Данные результаты были существенно улучшены в работах С.В. Конягина и Б. Судакова (2020). Точнее, там доказано, что при больших k для существования указанной выше матрицы необходимо, чтобы $d \leq 100k\sqrt{\log km}$ при $m \geq \log k$ и $d \leq 400k^{m/(m-1)}m^{3/2}$ при $2 \leq m < \log k$.

Из известных гипотез относительно свойств случайных матриц следует, что при $m \geq \log k$ эта оценка близка к оптимальной. Кроме того, в работе Конягина и Судакова предложена весьма естественная конструкция матрицы A с $|A| \leq k$, у которой все $m \times m$ подматрицы имеют полный ранг в предположениях $m < d \leq \max(k + 1, k^{m/(m-1)}/2)$.

Конструкция из работы Конягина и Судакова позволяет получить улучшения в задаче П. Брасса, У. Мозера и Дж. Паха (2005). Каково минимальное число M s -мерных линейных подпространств, достаточное для покрытия m -мерного куба, а именно $K = \{x \in \mathbb{Z}^m : \|x\|_\infty \leq k\}$? М. Балко, Дж. Цибулко и П. Валтр (2019) получили оценки на M . В случае $s = m - 1$ они показали, что

$$k^{m/(m-1)-o(1)} \leq M \leq C_m k^{m/(m-1)}.$$

Конструкция Конягина и Судакова даёт близкую к оптимальной нижнюю оценку.

Следствие

Пусть $k \geq m \geq 2$, тогда

$$M \geq k^{m/(m-1)} / (2m - 2).$$

В самом деле, уже множество векторов-столбцов матрицы A нельзя покрыть менее, чем $d/(m-1)$ гипер-подпространством т.к. любое подпространство содержит не более $m-1$ из наших векторов.

Конструкция.

Рассмотрим матрицу $\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_{m \times p}$ с элементами $\tilde{\phi}_{ij} = j^{i-1}$, $1 \leq j \leq p$, $1 \leq i \leq m$, где $p > 2$ – простое число и $m \leq p$. Все ее $m \times m$ подматрицы являются матрицами Вандермонда. Их определители легко вычислить и убедиться в том, что они не делятся на p . Далее заменим все элементы матрицы на сравнимые с ними по модулю p , определив матрицу $\Phi = \Phi_{m \times p}$ из элементов $\phi_{ij} \in \mathbb{Z}$, $\phi_{ij} \equiv j^{i-1} \pmod{p}$, $|\phi_{ij}| < p/2$, $1 \leq j \leq p$, $1 \leq i \leq m$. Это дает конструкцию для больших значений m .

Для малых значений m определение матрицы следует подкорректировать. Пусть $\Phi = \Phi_{m \times p}$ — матрица из элементов $\phi_{ij} \in \mathbb{Z}$, где $\phi_{ij} \equiv k_j j^{i-1} \pmod{p}$, $1 \leq j \leq p, 1 \leq i \leq m$, k_j — фиксированные целые числа, $1 \leq k_j < p$ (тем самым, зафиксирован некоторый представитель класса вычетов для каждого элемента матрицы). Именно такая конструкция рассматривалась в Конягиным и Судаковым. При этом элементы выбирались так, чтобы $|\phi_{ij}| \leq p^{1-1/m}$.

Алгоритм восстановления.

Мы хотим восстановить вектор $x \in \mathbb{Z}^p$, с s ненулевыми координатами ($s \leq m/2$) по данному вектору $y = (y_0, \dots, y_{m-1}) = \Phi x \in \mathbb{Z}^m$. Мы не знаем значение s и оценку трудоемкости алгоритма проводим в терминах $m, p, M = \max |x_j|$. Известно, что за $O(t^\omega)$ операций в конечном поле F можно решить заданную систему $t \times t$ линейных неоднородных уравнений, где наилучшее известное на сегодня $\omega < 2.4$.

Теорема. Существует детерминированный алгоритм, позволяющий находить по вектору y вектор x за $O(m^\omega \log_p M + m^{2+o(1)} p^{1/2+o(1)})$ арифметических операций в поле $\mathbb{F}_p$ и за $O(m^2 \log_p M)$ операций в кольце $\mathbb{Z}$. При этом в $\mathbb{Z}$ вычисления производятся с числами не большими по модулю, чем $\max\{Mp, \max_j |y_j| + mp^{1-1/m}\}$.

Цель: построить хорошие матрицы измерений с как можно меньшими по величине элементами. Например, булевы матрицы. Оказывается, имеется простая конструкция, которая по заданной $m \times d$ целочисленной матрице A и числу $z \in \mathbb{N}, 2 \leq z < |A|$ строит $(mr) \times d$ матрицу $\tilde{A}$ с $|\tilde{A}| < z$, где $r = \lceil \log_z |A| \rceil + 1$.

Предложение. Пусть дана целочисленная $m \times d$ матрица A и алгоритм восстановления, который находит любой целочисленный вектор $x \in \mathbb{Z}^d$ с носителем размера не более s по известному Ax . Тогда имеется и алгоритм, позволяющий восстанавливать вектор x по $\tilde{y} = \tilde{A}x$ и при этом трудоемкость возрастает на $O(mr)$ арифметических операций в $\mathbb{Z}$ с числами, не превосходящими $\|\tilde{y}\|_\infty |A|$.

Следствие. При больших N и любом $s \leq c_1 N / \log N$ существует булева $(c_2 s \log N) \times N$ матрица с однозначным восстановлением любых векторов из $\mathbb{Z}^N$ с носителем мощности не более s .

Кроме того, применив обобщение конструкции матрицы Φ на случай поля $\mathbb{F}_{p^r}$, удалось показать, что выполнено

Предложение. Для любого простого числа p и чисел $r, s \in \mathbb{N}, s < p^r/2$ существует целочисленная матрица Φ размера $(r(2s - 1) + 1) \times p^r$ с элементами из $\{0, \pm 1, \dots, \pm \frac{p^r-1}{2}\}$ при $p > 2$ и $\{0, 1\}$ при $p = 2$, для которой по вектору $y = \Phi x$ однозначно определяется вектор x с носителем мощности не более s .

Интерес представляет случай $r(2s - 1) + 1 < p^r$ (количество измерений меньше размерности). Тем самым, $s < \frac{p^r-1}{2r} + \frac{1}{2}$.

Ещё один класс примеров хороших матриц измерения даёт вероятностная конструкция. Пусть $\Lambda_k(m \times d)$ случайная $m \times d$ -матрица, все элементы которой — независимые одинаково распределенные случайные величины принимающие равновероятно значения из $\{-k, \dots, k\}$. Такая конструкция рассматривалась в [2], где показано, что для достаточно больших m и $d = 1,2938m$ существует реализация A случайной матрицы Λ_1 , для которой $|A| = 1$ и она будет хорошей при $s \leq m/2$. При больших k авторы доказывают (с помощью Λ_k) существование хороших матриц при $s \leq m/2, d = \Omega(\sqrt{km})$. Оказывается справедливо

Предложение. При фиксированном k (и больших s) для $m > cs \log_k(ed/s)$ некоторая реализация случайной матрицы $\Lambda_k(m \times d)$ будет s -хорошей.

Применяется оценка для $p(k, s)$ — вероятности вырождения $s \times s$ -матрицы $\Lambda_k(s \times s)$ из работы Bourgain, Vu, Wood (2010): $p(k, s) \leq (1/\sqrt{2k} - o(1))^s$.

Для ± 1 -матриц наилучший результат получен в недавнем препринте К. Tikhomirov (2018). Соответствующая вероятность оценивается как

$$(1/2 + o_s(1))^s$$

Замечания.

1. Предполагается, что для конструкции с полем $\mathbb{F}_{p^r}$ тоже имеется эффективный алгоритм восстановления. В доказательстве применяется быстрый детерминированный алгоритм Bourgain, Konyagin, Shparlinski (2015) нахождения всех корней данного полинома в поле $\mathbb{F}_p$, но автору неизвестен аналог такого алгоритма в поле $\mathbb{F}_{p^r}$.
2. При s близких к d и малом k случайная конструкция даёт лучшие результаты (требуется меньшее число измерений). Отметим, однако, что для соответствующих матриц не приведены быстрые алгоритмы восстановления.
3. Результаты, даваемые предложенными конструкциями, близки к полученным в теории сжатых измерений. А именно, известно, что любой s -разреженный вектор из $\mathbb{R}^d$ может быть восстановлен (посредством l_1 -минимизации) по $s \log d$ случайным линейным измерениям.

Стратегия алгоритма восстановления.

Основная сложность — найти носитель I . Если он известен, коэффициенты вектора x находятся легко.

Имеем систему уравнений

$$\sum_{j \in I} k_j j^l x_j = y_l, \quad l = 0, \dots, m-1. \quad (1)$$

Последовательность y задаётся линейной рекурсией порядка $s = |I|$ в $\mathbb{F}_p$.

Мы будем последовательно находить куски носителя I и все лучшие p -адические приближения для координат вектора x .

Применяются следующие эффективные алгоритмы: вариант алгоритма Berlekamp-Massey (1969) нахождения минимальной рекурсии для заданной последовательности, алгоритмы быстрого решения систем линейных уравнений в конечных полях и следующий результат Bourgain, Konyagin, Shparlinski (2015): минимальное число операций, за которое можно найти все корни данного полинома степени t , если известно, что они все простые и из $\mathbb{F}_p$ оценивается как $tp^{1/2+o(1)}$. Кроме того, мы пользуемся известной оценкой $O(t^\omega)$ для сложности решения $t \times t$ -системы линейных уравнений в $\mathbb{F}_p$, $\omega < 2.4$.

СПАСИБО за внимание!

-  S. Foucart, H. Rauhut *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing.*, New York, Springer–Birkhauser, 2013. – 634 P.
-  L. Fukshansky, D. Needell, B. Sudakov. *An algebraic perspective on integer sparse recovery* // Appl. Mathem. and Comp. – 2019. – V. 340. – P. 31–42.
-  С.В. Конягин. *О восстановлении целочисленного вектора по линейным измерениям* // Матем. заметки, – 2018. – Т. 104. – вып. 6. – С. 863–871.
-  K.S. Ryutin. *The algorithm for the recovery of integer vector via linear measurements* , – 2019. – препринт <https://arxiv.org/abs/1905.02687>
-  S.V. Konyagin, B. Sudakov. *An extremal problem for integer sparse recovery*, 2019. – препринт <https://arxiv.org/abs/1904.08661>.



К.С. Рютин. *Целочисленные матрицы измерения с малыми элементами, обеспечивающие восстановление векторов*, 2019. – подано в Матем. заметки