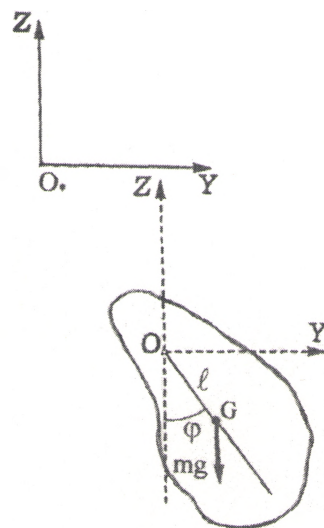


К ДИНАМИКЕ МАЯТНИКОВЫХ ЧАСОВ,
УСТАНОВЛЕННЫХ НА ПОДВИЖНОМ ОСНОВАНИИ

А.П. Маркеев

Институт проблем механики им А.Ю. Ишлинского
Российской Академии наук, Москва

Уравнения движения



Пусть J_X — момент инерции маятника относительно оси OX , перпендикулярной плоскости OYZ , mg — его вес, а ℓ — длина отрезка OG . Дифференциальное уравнение движения маятника имеет вид

$$J_X \ddot{\varphi} = -mg\ell \sin \varphi - m\ell(\ddot{Z}_0 \sin \varphi + \ddot{Y}_0 \cos \varphi) \quad (1)$$

Точкой обозначено дифференцирование по времени.

Функция Лагранжа для уравнения (1) можно взять такой:

$$L = \frac{1}{2} J_X \dot{\varphi}^2 + mg\ell \cos \varphi + m\ell(\dot{Z}_0 \sin \varphi + \dot{Y}_0 \cos \varphi) \dot{\varphi} \quad (2)$$

Предположим, что отклонение точки O подвеса маятника от точки O_* мало по сравнению с ℓ , а компоненты Y_0, Z_0 вектора $\mathbf{O}_*\mathbf{O}$ имеют по t период $2\pi/\Omega$, который мал по сравнению с величиной периода $2\pi\sqrt{\ell_r/g}$ малых (линейных) колебаний маятника при неподвижной точке подвеса (ℓ_r —приведенная длина маятника; $J_X = m\ell\ell_r$). Введем параметр ε ($0 < \varepsilon \ll 1$) и представим функции Y_0, Z_0 в виде

$$Y_0 = \varepsilon\ell\eta(\tau), \quad Z_0 = \varepsilon\ell\zeta(\tau); \quad \tau = \Omega t, \quad \Omega = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{\frac{g}{\ell_r}} \quad (3)$$

где η и ζ — 2π -периодические функции τ .

Функция Лагранжа (2) принимает вид

$$L = \frac{1}{2} J_X \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi + m\ell^2 \sqrt{\frac{g}{\ell_r}} (\zeta' \sin \varphi + \eta' \cos \varphi) \dot{\varphi} \quad (4)$$

Штрихом обозначается дифференцирование по τ

Динамика твердого тела, одна из точек которого совершает высокочастотные колебания малой амплитуды (вибрации), исследуется уже более ста лет. Особенно много исследований появилось после публикаций статей П.Л. Капицы [1,2] в 50-х годах прошлого века. В этих статьях, в частности, был рассмотрен вопрос о влиянии вертикальных вибраций на точность хода маятниковых часов. Основную библиографию по динамике твердого тела с заданным движением одной из его точек можно найти в монографиях [3-5] и недавних статьях [6,7].

Излагаемое в докладе исследование опирается на классическую теорию возмущений, методы Ляпунова и Пуанкаре и КАМ-теорию [8-11].

Функция Гамильтона и ее преобразование

Положим

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = J_X \dot{\varphi} + m\ell^2 \sqrt{\frac{g}{\ell_r}} (\zeta' \sin \varphi + \eta' \cos \varphi)$$

Функция Гамильтона F является преобразованием Лежандра функции L по переменной $\dot{\varphi}$. Получаем

$$F = \frac{p_\varphi^2}{2m\ell\ell_r} - mg\ell \cos \varphi - \frac{\ell}{\ell_r} \sqrt{\frac{g}{\ell_r}} (\zeta' \sin \varphi + \eta' \cos \varphi) p_\varphi + \frac{m\ell^3 g}{2\ell_r^2} (\zeta' \sin \varphi + \eta' \cos \varphi)^2 \quad (5)$$

Безразмерные координата и импульс:

$$\varphi = \chi, \quad p_\varphi = m\ell \sqrt{g\ell_r} p_\chi$$

За независимую переменную примем величину τ из (3). Выражение для функции Гамильтона в новых переменных (*это - точное выражение*):

$$\Gamma = \varepsilon \left[\frac{1}{2} p_\chi^2 - \cos \chi - \frac{\ell}{\ell_r} (\zeta' \sin \chi + \eta' \cos \chi) p_\chi + \frac{\ell^2}{2\ell_r^2} (\zeta' \sin \chi + \eta' \cos \chi)^2 \right] \quad (6)$$

Упростим функцию Гамильтона (6) при помощи близкой к тождественной, канонической замены переменных $\chi, p_\chi \rightarrow q, p$, задаваемой производящей функцией вида

$$S = \chi p + \varepsilon S_1(\chi, p, \tau) \quad (7)$$

Старые переменные выражаются через новые по формулам

$$\chi = q - \varepsilon \frac{\partial S_1(q, p, \tau)}{\partial p} + O(\varepsilon^2), \quad p_\chi = p + \varepsilon \frac{\partial S_1(q, p, \tau)}{\partial q} + O(\varepsilon^2) \quad (8)$$

Новая функция Гамильтона H задается равенством

$$H = \Gamma(\chi, p_\chi, \tau) + \varepsilon \frac{\partial S_1(\chi, p, \tau)}{\partial \tau} \quad (9)$$

в правой части которого величины χ, p_χ выражаются через новые переменные q, p по формулам (8).

Положим

$$S_1(q, p, \tau) = \frac{\ell}{\ell_r} (\zeta \sin q + \eta \cos q) p - \\ - \frac{\ell^2}{2\ell_r^2} \int [(\zeta' \sin q + \eta' \cos q)^2 - \langle (\zeta' \sin q + \eta' \cos q)^2 \rangle] d\tau$$

Угловыми скобками обозначена операция усреднения:

$$\langle (\zeta' \sin q + \eta' \cos q)^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\zeta' \sin q + \eta' \cos q)^2 d\tau$$

При таком выборе S_1 замена переменных $\chi, p_\chi \rightarrow q, p$, задаваемая равенствами (8), будет 2π - периодической по τ , а новая функция Гамильтона H в членах порядка ε не зависит от τ и записывается в виде

$$H = \varepsilon \left(\frac{1}{2} p^2 - \cos q - \frac{1}{2} \alpha \cos 2q + \frac{1}{2} \beta \sin 2q \right) + O(\varepsilon^2) \quad (10)$$

Здесь α и β — безразмерные параметры:

$$\alpha = \frac{\langle \dot{Z}_0^2 \rangle - \langle \dot{Y}_0^2 \rangle}{2g\ell_r}, \quad \beta = \frac{\langle \dot{Z}_0 \dot{Y}_0 \rangle}{g\ell_r} \quad (11)$$

Если в (10) пренебречь членами выше первой степени относительно ε , то придем к приближенной автономной гамильтоновой системе с одной степенью свободы. Ее решения $q(\tau), p(\tau)$ описывают плавные движения маятника. На эти плавные движения накладываются высокочастотные колебания малой амплитуды, определяемые заменой переменных (8).

При исследовании движения маятниковых часов наибольший интерес представляют движения, происходящие в окрестности вертикали (не обязательно малой). Следовательно, надо потребовать, чтобы приближенная система допускала частное решение $q = 0$. Это приводит к необходимости выполнения равенства $\beta = 0$, т.е. (см.(11)) вибрации точки подвеса должны удовлетворять условию

$$\langle \dot{Z}_0 \dot{Y}_0 \rangle = 0 \quad (12)$$

Далее считаем, что это условие выполнено и функцию Гамильтона (10) будем записывать в виде

$$H = \varepsilon \left(\frac{1}{2} p^2 + \Pi \right) + O(\varepsilon^2) \quad (13)$$

где

$$\Pi = -\cos q - \frac{1}{2} \alpha \cos 2q \quad (14)$$

О приближенной системе

Отбросив в функции (13) величины $O(\varepsilon^2)$, получим функцию Гамильтона приближенной системы

$$H = \varepsilon \left(\frac{1}{2} p^2 + \Pi \right) \quad (15)$$

Движения, описываемые уравнениями системы с функцией Гамильтона (15), рассматривались ранее (см. [5 – 9, 12 – 14] и др.). Положения равновесия определяются первым из уравнений (16). Вопрос об их устойчивости решается при помощи теорем Лагранжа и Ляпунова [11].

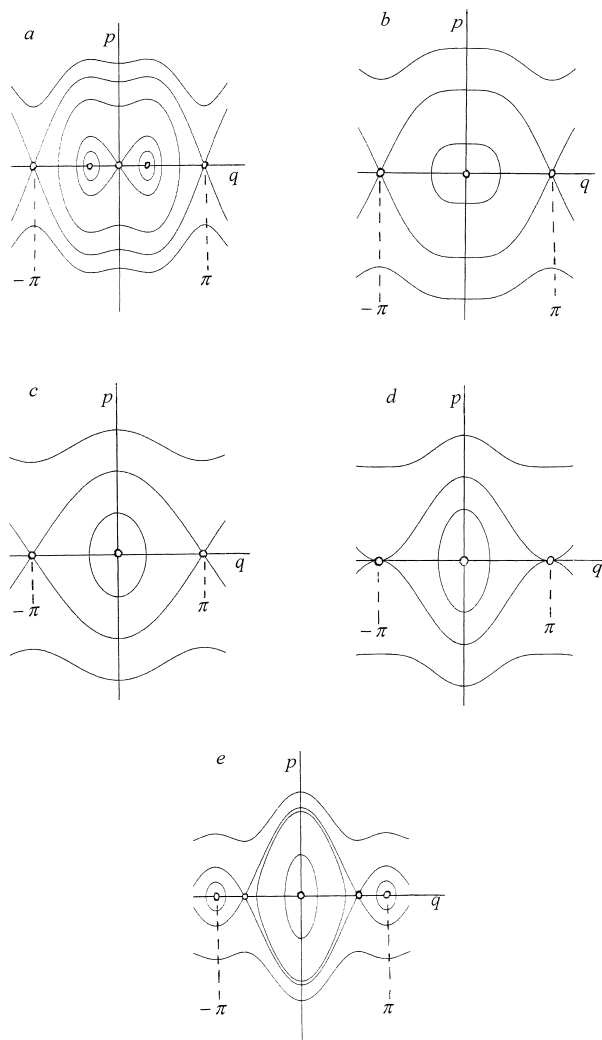
Бифуркационные значения параметра α и отвечающие им равновесные значения координаты q определяются [12, 15] системой уравнений

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = \sin q + \alpha \sin 2q = 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} = \cos q + 2\alpha \cos 2q = 0 \quad (16)$$

Существуют две точки бифуркации

$$\alpha = -\frac{1}{2}, q = 0 \quad \text{и} \quad \alpha = \frac{1}{2}, q = \pi \quad (17)$$

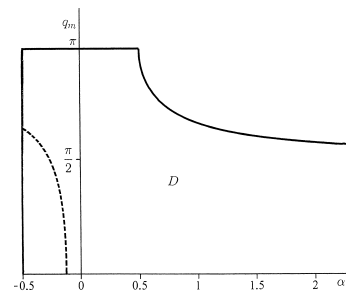
В точках бифуркации характеристическое уравнение линеаризованных уравнений движения имеет двойной нулевой корень.



На фрагментах a , b , c , d и e рисунка параметр α принят равным -1 , $-1/2$, 0 , $1/2$ и 1 соответственно.

Переменные действие-угол. Предполагая, что $\alpha > -1/2$, рассмотрим нелинейные колебания в окрестности устойчивого положения равновесия $q = 0$ (см. фрагменты c, d и e предыдущего рисунка). Через q_m обозначим амплитуду колебаний.

В области D возможных значений параметров α, q_m при $-1/2 < \alpha < 1/2$ выполняется неравенство $0 < q_m < \pi$, а при $\alpha \geq 1/2$ – неравенство $0 < q_m < \arccos(-1/(2\alpha))$.



Введем обозначения

$$\mu = \sin \frac{q_m}{2}, \quad k = \mu \sqrt{\frac{1 - 2\alpha\mu^2}{1 + 2\alpha - 4\alpha\mu^2}}, \quad n = -\frac{2\alpha\mu^2}{1 + 2\alpha - 4\alpha\mu^2}$$

Для переменной действие можно получить следующее выражение

$$I = \frac{2\sqrt{1 + 2\alpha - 4\alpha\mu^2}}{\pi\alpha} \left[2\alpha\mathbf{E}(k) - (1 + 2\alpha - 2\alpha\mu^2)\mathbf{K}(k) + \frac{1 - k^2}{1 - \mu^2}\mathbf{\Pi}(n, k) \right]$$

Это выражение определяют зависимость μ от I . В переменных действие–угол I, w гамильтониан приближенной системы зависит только от I :

$$H_1 = \varepsilon 2[(1 + 2\alpha)\mu^2(I) - 2\alpha\mu^4(I)]$$

Частота изучаемых нелинейных колебаний вычисляется по формуле

$$\omega = \omega(I) = \frac{\partial H}{\partial I} = \frac{\partial H}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial I} = \varepsilon \frac{\pi \sqrt{1 + 2\alpha - 4\alpha\mu^2}}{2\mathbf{K}(k)} \quad (18)$$

Переход от переменных q, p к переменным w, I осуществляется при помощи канонического, унивалентного, 2π - периодического по w преобразования (применяются стандартные обозначения для эллиптических функций [16–18]):

$$q = 2 \arcsin \left[k \operatorname{sn} \left(\frac{2\mathbf{K}(k)}{\pi} w, k \right) \sqrt{\frac{1 + 2\alpha - 2\alpha\mu^2}{1 - 2\alpha\mu^2 + 2\alpha k^2 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{2\mathbf{K}(k)}{\pi} w, k \right)}} \right] \quad (19)$$

$$p = 2\mu (1 - 2\alpha\mu^2) \frac{\sqrt{1 + 2\alpha - 2\alpha\mu^2}}{1 - 2\alpha\mu^2 + 2\alpha k^2 \operatorname{sn}^2 \left(\frac{2\mathbf{K}(k)}{\pi} w, k \right)} \operatorname{cn} \left(\frac{2\mathbf{K}(k)}{\pi} w, k \right) \quad (20)$$

При $\alpha = 0$ функции (19), (20) задают известную замену переменных для случая нелинейных колебаний математического маятника [19].

О невырожденности функции Гамильтона приближенной системы. Вычисления показывают, что для второй производной по I функции Гамильтона приближенной системы справедливо выражение

$$\frac{\partial^2 H}{\partial I^2} = \varepsilon \frac{\pi^2 F}{16\mu^2(1-\mu^2)(1-2\alpha\mu^2)(1+2\alpha-2\alpha\mu^2)\mathbf{K}^3(k)} \quad (21)$$

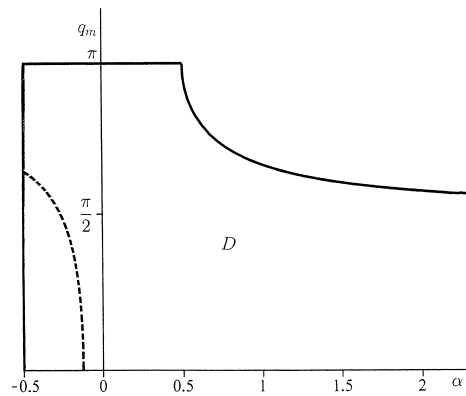
где

$$F = (1-\mu^2)(1-4\alpha\mu^2)(1+2\alpha-2\alpha\mu^2)\mathbf{K}(k) - [1+2\alpha-4\alpha\mu^2(1+2\alpha-2\alpha\mu^2)]\mathbf{E}(k)$$

Анализ этого выражения показывает, что в области D существует кривая, на которой производная $\partial^2 H / \partial I^2$ обращается в нуль (кривая вырождения).

Кривая вырождения начинается на левой границе области D в точке $\alpha = -1/2$, $q_m = 2.034$ и оканчивается на оси абсцисс в точке $\alpha = -1/8$, $q_m = 0$. Вблизи этой точки кривая задается уравнением

$$\alpha = -\frac{1}{8} - \frac{1}{32} q_m^2 - \frac{17}{3072} q_m^4 + O(q_m^6)$$



На рисунке кривая вырождения изображена штриховой линией. Правее и выше этой кривой производная $\partial^2 H / \partial I^2$ отрицательна, а левее и ниже — положительна.

Об условно-периодических движениях полной системы

Если параметры α и q_m не принадлежат кривой вырождения, то [8] из большинства фазовых траекторий приближенной системы при достаточно малых ε рождаются условно-периодические движения. *Это большинство фазовых траекторий приближенной системы не разрушается в полной системе, а лишь мало (на величину порядка ε) деформируется.* Согласно [22], мера Лебега разрушающихся при малых ε фазовых траекторий экспоненциально мала, она имеет порядок $\exp(-c\varepsilon^{-1})$ ($c > 0$ — const).

О точности хода маятниковых часов

Период колебаний маятника с неподвижной точкой подвеса определяется амплитудой колебаний q_m :

$$T_0 = 4\sqrt{\frac{\ell_r}{g}} \mathbf{K}\left(\sin \frac{q_m}{2}\right) \quad (22)$$

В полной системе с функцией Гамильтона (13) величина переменной действие при всех значениях времени t остается в ε -окрестности своего начального значения. Аналогичный вывод верен и для наибольшего отклонения маятника от его положения $q = 0$. Поэтому при оценке влияния вибраций точки подвеса на точность хода маятниковых часов период колебаний можно вычислять по формуле

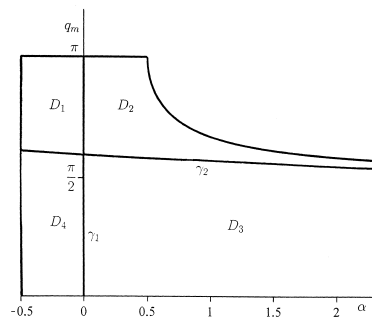
$$T = 4\sqrt{\frac{\ell_r}{g(1 + 2\alpha \cos q_m)}} \mathbf{K}\left(\sin \frac{q_m}{2} \sqrt{\frac{1 - \alpha + \alpha \cos q_m}{1 + 2\alpha \cos q_m}}\right) \quad (23)$$

получаемой при анализе приближенной системы с функцией Гамильтона (15). Часы при наличии вибраций спешат, если $T < T_0$ и отстают, если $T > T_0$.

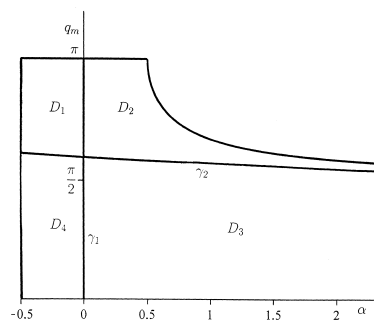
Точность хода часов при наличии вибраций зависит от амплитуды колебаний q_m и параметра α , характеризующего (см. (11)) соотношение интенсивностей вибраций точки подвеса по горизонтальному и вертикальному направлениям. При $\alpha > 0$ вертикальные вибрации более интенсивны, чем горизонтальные, а при $\alpha < 0$ более интенсивны горизонтальные вибрации.

Равенство $T = T_0$ реализуется в области D на двух кривых γ_1 и γ_2 . Кривая γ_1 — это интервал $0 < q_m < \pi$ оси $\alpha = 0$. Кривая γ_2 начинается на левой границе области D в точке $\alpha = -1/2$, $q_m = 1.908$, а при $\alpha \rightarrow \infty$ она имеет горизонтальную асимптоту и задается уравнением

$$q_m = \frac{\pi}{2} + \frac{\mathbf{K}(\sqrt{2}/2)}{\sqrt{2\alpha}} + O\left(\frac{\ln \alpha}{\alpha}\right)$$



Кривые γ_1 и γ_2 разбивают область D на четыре области D_1 , D_2 , D_3 и D_4 . При переходе через кривые γ_1 и γ_2 происходит качественное изменение отклика часов на вибрации точки подвеса: для значений α и q_m , лежащих в областях D_1 и D_3 часы спешат, а в областях D_2 и D_4 – отстают.



Два примера

Пример 1. Пусть $Y_0 \equiv 0$, т. е. вибрации точки подвеса происходят вдоль вертикали. Тогда величина $\alpha = \langle \dot{Z}_0^2 \rangle / (2g\ell_r)$ положительна и, в соответствии с [1,2], при не очень больших амплитудах колебаний (например таких, что маятник не поднимается выше горизонтали) часы с вибрирующим подвесом будут спешить.

Пример 2. Точка подвеса маятника движется по эллипсу:

$$Y_0 = a \cos \Omega t, \quad Z_0 = b \sin \Omega t$$

В этом случае

$$\alpha = \frac{(b^2 - a^2)\Omega^2}{4g\ell_r}$$

И при не очень больших амплитудах колебаний маятника:

- 1). $a = b$ (окружность), вибрации не влияют на точность хода часов;
- 2). $a < b$ (эллипс вытянут вдоль вертикали), часы спешат;
- 3). $a > b$ (эллипс вытянут вдоль горизонтали), часы отстают.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Капица П.Л.* Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ. 1951. Т.21. Вып. 5. С.588-597.
2. *Капица П.Л.* Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физ. наук. 1951. Т.44. Вып. 1. С.7 - 20.
3. *Стрижак Т.Г.* Методы исследования динамических систем типа "маятник". Алма-Ата: Наука, 1981. 253 с.
4. *Блехман И.И.* Вибрационная механика. М.: Наука, 1994. 394 с.
5. *Холостова О.В.* Задачи динамики твердых тел с вибрирующим подвесом. М.– Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2016. 308 с.
6. *Юдович В. И.* Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями // Успехи механики. 2006. Т.4. № 3. С. 26-158.
7. *Маркеев А. П.* Об уравнениях приближенной теории движения твердого тела с вибрирующей точкой подвеса // ПММ. 2011. Т.75. Вып. 2. С.193-203.

8. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. М.: Эдиториал УРСС, 2002. 414 с.

9. *Журавлев В.Ф., Климов Д.М.* Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988. 328 с.

10. *Джакалья Г.Е.О.* Методы теории возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 320 с.

11. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.

12. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.

13. *Рубановский В.Н., Самсонов В.А.* Устойчивость стационарных движений в примерах и задачах. М.: Наука, 1988. 304 с.

14. *Болотин С.В., Карапетян А.В., Кугушев Е.И., Трещев Д.В.* Теоретическая механика. М.: Издательский центр "Академия 2010. 432 с.

15. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М.: АН СССР, 1962. 535 с.

16. *Журавский А.М.* Справочник по эллиптическим функциям. М.;Л.: АН СССР, 1941. 235 с.

17. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962. 1100 с.

18. *Byrd P.F., Friedman M.D.* Handbook of Elliptic Integral for Engineers and Physicists. Berlin; Gottingen; Heidelberg: Springer , 1954. 355 p.

19. *Маркеев А. П.* Теоретическая механика. Москва; Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2007. 592 с.

20. *Малкин И.Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М.: Гостехиздат, 1956. 491 с.

21. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М.: Мир, 1973. 167 с.

22. *Нейштадт А.И.* Оценки в теореме Колмогорова о сохранении условно-периодических движений // ПММ. 1981. Т.45. Вып. 6. С.1016-1025.