# Задачи
# о конечномерных операторах в связи со сходимостью почти всюду общих ортогональных рядов

**Б. С. Кашин**

Математический институт им. В. А. Стеклова

Российской академии наук

kashin@mi-ras.ru

**Обзначения:** $(X, \mu)$, $L^2(X, \mu)$

$\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – О.Н.С. из $L^2(X, \mu)$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \qquad \sum a_k^2 < \infty \qquad (1)$$

Тогда при $n = 1, 2, \ldots$

$$S_n(\{a_k\}) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$$

$$S_\Phi^*(\{a_k\}) = f(x) \equiv \sup_{J=J(x)} |S_J(\{a_k\})|$$

Для того, чтобы оператор $S^*_\Phi$ был определен на всем $l^2$ необходимо, чтобы каждый ряд (1) сходился для почти всех $x \in X$.

Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – О.Н.С.,

$\sigma = \{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – перестановка натурального ряда,

$\Lambda \subset \mathbb{N},\ \ \Lambda = \{k_1, k_2, \dots\},\ \ k_1 < k_2 < \dots.$

Тогда $\Phi(\sigma) = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^{\infty}, \quad \Phi_\Lambda = \{\varphi_k(x)\}_{k\in\Lambda}.$

Аналогичные обозначения используются для конечных О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{N}$. В этом случае оператор $S^*$ определен для любых коэффициентов $\{a_k\}_{k=1}^{N}$ и действует в $L^2(X, \mu)$.

**“ Конечномерные” и “ не конечномерные” результаты о сходимости (расходимости) почти всюду <u>общих</u> ортогональных рядов**

В докладе рассматриваются только “конечномерные” факты. Для пояснения характера результатов второго типа приведем две известные “не конечномерные теоремы.”

**ТЕОРЕМА A** (Олевский, Ульянов, 1961)

*Пусть* $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *– полная О.Н.С.*

*Существуют ряд вида* (1) *и перестановка* $\sigma = \{n_k\}$ *такие,*

*что ряд* $\sum a_{n_k}\varphi_{n_k}(x)$ *расходится почти всюду.*

**ТЕОРЕМА B** (Арутюнян, Погосян, 1977)

*Пусть* $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *– полная О.Н.С.,*

*для которой оператор* $S^*\colon l^2 \to L^2(X,\mu)$ *ограничен.*

*Тогда для любой измеримой функции* $g(x)$ *найдется ряд*

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_n\varphi_k(x)$, *сходящийся к* $g(x)$ *почти всюду.*

# “ Конечномерные” результаты

**ТЕОРЕМА С** (Меньшов – Радемахер)

*Если* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – *О.Н.С.*

*и для коэффициентов ряда* (1) *выполнено условие*

$$\sum a_n^2 \log^2 n < \infty, \qquad (2)$$

*то ряд* (1) *сходится почти всюду.*

**ТЕОРЕМА D** (Меньшов)

*Существует О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ *такая,*

*что для любой последовательности* $w(n)$ *с* $w(n) = o(\log^2 n)$

*найдется ряд* (1), *расходящийся почти всюду, хотя*

$$\sum a_n^2 w(n) < \infty.$$

“Эквивалентные конечномерные” формулировки этих теорем:

**<u>ТЕОРЕМА С</u>**

*Для любой О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N, \quad N > 2,$

$$\|S_\Phi^* \colon l_2^N \to L^2(X, \mu)\| \leqslant \mathrm{C} \log N.$$

**<u>ТЕОРЕМА D</u>**

*Для* $N = 2, 3, \ldots$ *найдется О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N$ *с*

$$\|S_\Phi^* \colon l_2^N \to L^2(X, \mu)\| \geqslant \mathrm{c} \log N. \qquad (3)$$

**ВАЖНО**: Все примеры систем со свойством (3)

так или иначе связаны со свойствами матриц Гильберта $H_N$

$$(H_N)_{ij} = \begin{cases} \dfrac{1}{i-j}, & 1 \leqslant i, j \leqslant N, \quad i \neq j, \\ 0, & \qquad i = j, \qquad i = 1, \ldots, N, \end{cases}$$

хотя "внешне" эти системы никаких связей

с матрицами $H_N$ не демонстрируют.

Например (Б.К., 1976), существует О.Н.С. $\Phi \subset L^2(0,1)$,

$\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{N}$ с $|\varphi_k(x)| \equiv 1, \quad k = 1, \ldots, N,$

для которой имеет место (3).

Для $N \times N$ матрицы $A$ через $A_T$ обозначим верхнюю треугольную матрицу, у которой элементы над главной диагональю совпадают с элементами матрицы $A$. Положим также

$$\|A\| = \|A\colon l_2^N \to l_2^N\|.$$

Вопрос о построении принципиально новых примеров в теореме D фактически сводится к нахождению новых примеров $N \times N$ матриц (отличных от $H_N$), для которых

$$\frac{\|A_T\|}{\|A\|} \geqslant c \log N, \qquad N \to \infty.$$

А. Паскевич (A. Paskiewicz) в 2005 г. указал примеры нового типа.

Однако А. Солодов сразу же нашел прямую аналогию

между матрицами Гильберта и Паскевича.

Поясню эту связь.

Пусть $G$ – компактная абелева группа, $\widehat{G}$ – группа характеров.

Тогда $\widehat{G}$ задает сложение $\oplus$ на множестве целых чисел:

$k = m \oplus n$, если $\chi_k(x) = \chi_m(x)\chi_n(x)$

(здесь элементы $\widehat{G}$ занумерованы целыми числами так,

чтобы $\chi_0 \equiv 1$). Пусть $\ominus$ – вычитание в этой группе.

Имеет место аналог классического факта

о теплицевых матрицах.

Пусть $\{h_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ – последовательность комплексных чисел,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k|^2 < \infty, \qquad f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \chi_k \in L^\infty(G).$$

Тогда $\|H^G\| \leqslant \|f\|_{L^\infty(G)}$, где

$$H^G = \{h_{m \ominus n}\}_{m,n=0}^{\infty}. \qquad (3')$$

Если $G = T$, то с помощью этого утверждения проверяется ограниченность матрицы Гильберта.

Если $G = Z_3 \otimes Z_3 \otimes Z_3 \ldots$, то утверждение может быть использовано для обоснования конструкции Паскевича.

В этом случае матрицы Паскевича – подматрицы матриц $(3')$ для специальных $\{h_k\}$.

Для системы функций $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N \subset L^2(X,\mu)$ положим

$$\alpha(\Phi) = \sup_{\sigma \in S(N)} \|S^*_{\Phi_\sigma} : l_2^N \to L^2(X,\mu)\|$$

$$\beta(\Phi) = \inf_{\sigma \in S(N)} \|S^*_{\Phi_\sigma} : l_2^N \to L^2(X,\mu)\| \tag{4}$$

Поведением величин $\alpha(\Phi)$ интересовался в 60-е годы

Л. Карлесон в связи с поиском доказательства

своей замечательной теоремы

о сходимости почти всюду тригонометрических рядов класса $L^2$.

Величина $\beta(\Phi)$ для ортогональной системы $\Phi$ естественно возникает в связи с одной старой задачей А. Н. Колмогорова (20-е годы XX-го века). Важно отметить, что изучение этих величин приводит к задачам, важным для других, весьма далеких от сходимости почти всюду тем.

Прежде чем привести некоторые результаты о величинах (4),

рассмотрим вопрос о “статистическом поведении”

$\alpha(\Phi)$ для “случайных” систем.

Первым это делал Л. Карлесон

(это был, вероятно, первый результат о нормах случайных матриц).

Пусть $M_N$ – семейство функциональных систем на $(0,1)$,

порожденных матрицами с элементами $\pm 1$,

$$\Phi \in M_N \quad \longleftrightarrow \quad \Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N,$$

$$\varphi_k(x) = \varepsilon_{ki} = \pm 1, \qquad x \in \left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right), \quad i, k = 1, \dots, N,$$

$\mathrm{Ort}_N$ – семейство ортонормированных систем,

порожденных ортогональными матрицами

$$\Phi \in \mathrm{Ort}_N \quad \longleftrightarrow \quad \Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N,$$

$$\varphi_k(x) = N^{1/2} a_{ki}, \qquad x \in \left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}\right), \quad i, k = 1, \dots, N,$$

$\{a_{ki}\} \in O_N$ – группа ортогональных $N \times N$ матриц.

На $M_N$ и $\mathrm{Ort}_N$ рассмотрим естественные меры

$\mu_N$ и, соответственно, $m_N$.

Карлесон показал, что для случайной системы $\Phi \in M_N$

$$\|S^*_{\Phi_\sigma} : l_2^N \to \text{weak} \;\; L^2\| \leqslant \text{C} - \text{abs. constant}, \qquad (5)$$

$$\|f\|_{\text{weak } L^2} = \sup_{y>0} y^2 \cdot \text{meas}\{t \in (0,1) : |f(t)| > y\}.$$

В (5) weak $L^2$ можно заменить на $L^2$.

Карлесон предполагал, тем не менее,

что $\exists\, \gamma_N,\ \lim\limits_{N\to\infty} \gamma_N = \infty$ такая, что $\forall\, \Phi \in M_N$

$$\alpha(\Phi) \geqslant \gamma_N.$$

Однако оказалось, что это не так.

**ТЕОРЕМА** (Б.К., 1980, 1985)

a) $\exists \mathrm{C}_0$: *при* $n = 1, 2, \ldots$

$$\mu_N\{\Phi \in M_N \colon \alpha(\Phi) \geqslant \mathrm{C}_0\} \leqslant 10^{-N}.$$

b) $\forall A > 0$, $\exists \gamma = \gamma(A) > 1$ *и* $\mathrm{K} = \mathrm{K}(A)$ *такие, что*

$$\mu_N\{\Phi \in M_N \colon \alpha(\Phi) \geqslant A \ln N \|\Phi\| \leqslant \mathrm{K} \exp\{-N^\gamma\}.$$

**ТЕОРЕМА** (Р. Меграбян, 1988)

$\exists \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2 > 0$ *и* $y_0$ *такие, что при* $N = 1, 2, \ldots$ *и* $y \geqslant y_0$

$$\mu_N\{\Phi \in M_N \colon \alpha(\Phi) \geqslant y \|\Phi\| \leqslant \mathrm{c}_1 \exp[-\exp(\mathrm{c}_2 y) \cdot N].$$

Приведенные результаты о системах из $M_N$

переносятся “в главном” на системы,

порожденные ортогональными матрицами.

В частности,

$$\int_{\mathrm{Ort}_N} \alpha(\Phi)\, dm_N \leqslant \mathrm{C} \text{ – abs. constant.}$$

При этом не известно сколь-нибудь общих результатов,

гарантирующих возможность улучшения

оценки Меньшова–Радемахера

для любой конкретной системы $\Phi$

из достаточно широкого класса

функциональных систем.

В частности для тригонометрической системы $T_N = \{e^{ikt}\}_{k=-N}^{N}$

для величины $\alpha(T_N)$ известно только, что

$$\alpha(T_N) \leqslant \mathrm{c} \log N.$$

В связи с этим интерес представляет

**ЗАДАЧА** (Б.К., 1977)

*Пусть* $\Phi = \{\varphi_k(x)\varphi_k(y)\}_{k=1}^N$,

*где* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N \subset L^2(X,\mu)$ – *ортонормированные системы.*

*Верно ли, что*

$$\|S_\Phi^*\colon l_2^N \to L^2(X\times X)\| \leqslant \gamma_N \log N,$$

*где* $\gamma_N \to 0$ *при* $N \to \infty$?

С 30-х годов XX-го века известна

теорема Меньшова–Марцинкевича.

**ТЕОРЕМА E**

*Для любой О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(X, \mu)$

*найдется подпоследовательность* $\Lambda$

*натурального ряда* $\Lambda = \{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ *такая, что*

$$\|S^*_{\Phi_\Lambda} : l_2 \to L^2(X, \mu)\| \leqslant \mathrm{C}.$$

Представляет интерес вопрос о плотности

указанной в теореме Меньшова–Марцинкевича последовательности $\Lambda$.

Вполне возможно, что можно выбрать $\Lambda = \{k_j\}$

с $k_j \leqslant j^{1+\delta}$, $j = 1, 2, \ldots$, где $\delta$ – произвольное положительное число.

Если исходная система $\Phi$ равномерно ограничена,

т.е. $\|\varphi_k\|_{L^\infty} \leqslant \mathrm{C}$, $k = 1, 2, \ldots$,

то нетрудно найти нужную последовательность $\Lambda$ степенной плотности.

Однако для общих систем наилучший

известный результат такой (Г. Карагулян, 1988):

$\exists \Lambda = \{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ с $k_j \leqslant \lambda^j$, $j = 1, 2, \ldots$,

где $\lambda > 1$ – произвольная постоянная, для которых

$\|S^*_{\Phi_\Lambda} : l_2 \to L^0(X, \mu)\| \leqslant \mathrm{C}$.

Рассмотрим теперь вопрос о поведении величин $\beta(\Phi)$.

Задача А.Н.Колмогорова в исходной постановке

имела следующий вид:

Верно ли, что для любой О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$

существует перестановка $\sigma \in S(\infty)$ такая,

что любой ряд вида

$$\sum a_k \varphi_{\sigma(k)}(x), \qquad \sum a_k^2 < \infty,$$

сходится почти всюду.

Этот вопрос оказался связан

с возникшими позднее глубокими

проблемами функционального анализа и близок

к задаче об ограниченности (при $N \to \infty$) последовательности

$$C_N \equiv \sup_{\Phi=\{\varphi_k\}_{k=1}^N \text{ – О.Н.С.}} \beta(\Phi), \qquad N = 1, 2, \ldots,$$

Точнее, задача Колмогорова эквивалентна

ограниченности последовательности

$$C'_N \equiv \sup_{\Phi=\{\varphi_k\}_{k=1}^N \text{ – О.Н.С.}} \beta'(\Phi),$$

$$\beta'(\Phi) = \inf_{\sigma \in S(N)} \|S^*_\Phi \colon l_2^N \to \mathrm{weak}L^2(X, \mu)\|.$$

Одно из направлений в функциональном анализе,

возникшее в связи с задачей Колмогорова, –

– оценки операторных норм подматриц данной матрицы.

Эта тема заслуживает отдельного доклада.

Я лишь поясню связь этой темы

со сходимостью почти всюду ортогональных рядов.

Задача Колмогорова остается открытой.

В 1989 г. Ж. Бургейн получил

следующий прорывной результат.

Для любой О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N$ с

$$\|\varphi_k(x)\|_{L^\infty} \leqslant \mathrm{M}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N, \qquad (6)$$

$$\beta(\Phi) \leqslant \mathrm{C} \ln \ln N. \qquad (7)$$

Метод Бургейна использует усреднение

по группе перестановок $S(N)$.

Оценка (7) – наилучший результат,

который можно получить на таком пути.

Метод Бургейна может быть применен

для нахождения достаточно плотной подсистемы

с хорошей оценкой нормы оператора

мажоранты частных сумм в данной

равномерно ограниченной ортонормированной системе.

**ТЕОРЕМА** (Б.К., И. В. Лимонова, 2019)

*При* $\rho > 4$ *для любой О.Н.С.* $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N$

*со свойством* (6) *найдется* $\Lambda \subset \langle N \rangle$,

$|\Lambda| \geqslant N[\log(N+3)]^{-\rho}$ *такое, что*

$$\|S^*_{\Phi_\Lambda} : l_\infty(\Lambda) \to L^2(X,\mu)\| \leqslant \mathrm{C}(\rho,\mu) \cdot |\Lambda|^{1/2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

При $\rho < 2$ утверждение теоремы теряет силу.