



Задачи о конечномерных операторах в связи со сходимостью почти всюду общих ортогональных рядов

Б. С. Кашин

Математический институт им. В. А. Стеклова
Российской академии наук

kashin@mi-ras.ru

Обозначения: (X, μ) , $L^2(X, \mu)$

$\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ – О.Н.С. из $L^2(X, \mu)$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x), \quad \sum a_k^2 < \infty \quad (1)$$

Тогда при $n = 1, 2, \dots$

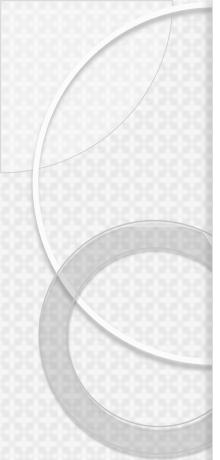
$$S_n(\{a_k\}) = \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x)$$

$$S_\Phi^*(\{a_k\}) = f(x) \equiv \sup_{J=J(x)} |S_J(\{a_k\})|$$

Для того, чтобы оператор S_Φ^* был определен на всем l^2 необходимо, чтобы каждый ряд (1) сходился для почти всех $x \in X$.

Пусть $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ – О.Н.С.,
 $\sigma = \{n_k\}_{k=1}^\infty$ – перестановка натурального ряда,
 $\Lambda \subset \mathbb{N}$, $\Lambda = \{k_1, k_2, \dots\}$, $k_1 < k_2 < \dots$.
 Тогда $\Phi(\sigma) = \{\varphi_{n_k}(x)\}_{k=1}^\infty$, $\Phi_\Lambda = \{\varphi_k(x)\}_{k \in \Lambda}$.

Аналогичные обозначения используются для конечных О.Н.С.
 $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N$. В этом случае оператор S^* определен
 для любых коэффициентов $\{a_k\}_{k=1}^N$ и действует в $L^2(X, \mu)$.



“Конечномерные” и “не конечномерные” результаты о сходимости (расходимости) почти всюду общих ортогональных рядов

В докладе рассматриваются только “конечномерные” факты.

Для пояснения характера результатов второго типа
приведем две известные “не конечномерные теоремы.”

ТЕОРЕМА А (Олевский, Ульянов, 1961)

Пусть $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная О.Н.С.

Существуют ряд вида (1) и перестановка $\sigma = \{n_k\}$ такие, что ряд $\sum a_{n_k} \varphi_{n_k}(x)$ расходится почти всюду.

ТЕОРЕМА В (Арутюнян, Погосян, 1977)

Пусть $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ – полная О.Н.С.,

для которой оператор $S^*: l^2 \rightarrow L^2(X, \mu)$ ограничен.

Тогда для любой измеримой функции $g(x)$ найдется ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} a_n \varphi_k(x)$, сходящийся к $g(x)$ почти всюду.

“Конечномерные” результаты

ТЕОРЕМА С (Меньшов – Радемахер)

Если $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ – O.H.C.

и для коэффициентов ряда (1) выполнено условие

$$\sum a_n^2 \log^2 n < \infty, \quad (2)$$

то ряд (1) сходится почти всюду.

ТЕОРЕМА D (Меньшов)

Существует O.H.C. $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая,

что для любой последовательности $w(n)$ с $w(n) = o(\log^2 n)$

найдется ряд (1), расходящийся почти всюду, хотя

$$\sum a_n^2 w(n) < \infty.$$

“Эквивалентные конечномерные” формулировки этих теорем:

ТЕОРЕМА С

Для любой О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N$, $N > 2$,

$$\|S_\Phi^*: l_2^N \rightarrow L^2(X, \mu)\| \leq C \log N.$$

ТЕОРЕМА Д

Для $N = 2, 3, \dots$ найдется О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N$ с

$$\|S_\Phi^*: l_2^N \rightarrow L^2(X, \mu)\| \geq c \log N. \quad (3)$$

ВАЖНО: Все примеры систем со свойством (3)

так или иначе связаны со свойствами матриц Гильберта H_N

$$(H_N)_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i-j}, & 1 \leq i, j \leq N, \quad i \neq j, \\ 0, & i = j, \quad i = 1, \dots, N, \end{cases}$$

хотя “внешне” эти системы никаких связей

с матрицами H_N не демонстрируют.

Например (Б.К., 1976), существует О.Н.С. $\Phi \subset L^2(0, 1)$,

$$\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N \quad \text{с} \quad |\varphi_k(x)| \equiv 1, \quad k = 1, \dots, N,$$

для которой имеет место (3).

Для $N \times N$ матрицы A через A_T обозначим

верхнюю треугольную матрицу, у которой

элементы над главной диагональю совпадают

с элементами матрицы A . Положим также

$$\|A\| = \|A: l_2^N \rightarrow l_2^N\|.$$

Вопрос о построении принципиально новых

примеров в теореме D фактически сводится

к нахождению новых примеров $N \times N$ матриц

(отличных от H_N), для которых

$$\frac{\|A_T\|}{\|A\|} \geq c \log N, \quad N \rightarrow \infty.$$

А. Паскевич (A. Paskiewicz) в 2005 г. указал примеры нового типа.

Однако А. Солодов сразу же нашел прямую аналогию между матрицами Гильберта и Паскевича.

Поясню эту связь.

Пусть G – компактная абелева группа, \widehat{G} – группа характеров.

Тогда \widehat{G} задает сложение \oplus на множестве целых чисел:

$$k = m \oplus n, \text{ если } \chi_k(x) = \chi_m(x)\chi_n(x)$$

(здесь элементы \widehat{G} занумерованы целыми числами так,

чтобы $\chi_0 \equiv 1$). Пусть \ominus – вычитание в этой группе.

Имеет место аналог классического факта

о теплицевых матрицах.

Пусть $\{h_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ – последовательность комплексных чисел,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h_k|^2 < \infty, \quad f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k \chi_k \in L^{\infty}(G).$$

Тогда $\|H^G\| \leq \|f\|_{L^{\infty}(G)}$, где

$$H^G = \{h_{m \ominus n}\}_{m,n=0}^{\infty}. \quad (3')$$

Если $G = T$, то с помощью этого утверждения проверяется ограниченность матрицы Гильберта.

Если $G = Z_3 \otimes Z_3 \otimes Z_3 \dots$, то утверждение может быть использовано для обоснования конструкции Паскевича.

В этом случае матрицы Паскевича – подматрицы матриц $(3')$ для специальных $\{h_k\}$.

Для системы функций $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N \subset L^2(X, \mu)$ положим

$$\alpha(\Phi) = \sup_{\sigma \in S(N)} \|S_{\Phi_\sigma}^*: l_2^N \rightarrow L^2(X, \mu)\| \quad (4)$$

$$\beta(\Phi) = \inf_{\sigma \in S(N)} \|S_{\Phi_\sigma}^*: l_2^N \rightarrow L^2(X, \mu)\|$$

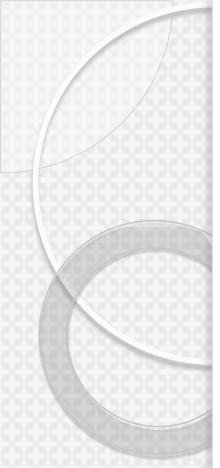
Поведением величин $\alpha(\Phi)$ интересовался в 60-е годы

Л. Карлесон в связи с поиском доказательства

своей замечательной теоремы

о сходимости почти всюду тригонометрических рядов класса L^2 .

Величина $\beta(\Phi)$ для ортогональной системы Φ естественно возникает в связи с одной старой задачей А. Н. Колмогорова (20-е годы XX-го века). Важно отметить, что изучение этих величин приводит к задачам, важным для других, весьма далеких от сходимости почти всюду тем.



Прежде чем привести некоторые результаты о величинах (4),
рассмотрим вопрос о “статистическом поведении”
 $\alpha(\Phi)$ для “случайных” систем.

Первым это делал Л. Карлесон
(это был, вероятно, первый результат о нормах случайных матриц).

Пусть M_N – семейство функциональных систем на $(0, 1)$,

порожденных матрицами с элементами ± 1 ,

$$\Phi \in M_N \iff \Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N,$$

$$\varphi_k(x) = \varepsilon_{ki} = \pm 1, \quad x \in \left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N} \right), \quad i, k = 1, \dots, N,$$

Ort_N – семейство ортонормированных систем,

порожденных ортогональными матрицами

$$\Phi \in \text{Ort}_N \iff \Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N,$$

$$\varphi_k(x) = N^{1/2} a_{ki}, \quad x \in \left(\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N} \right), \quad i, k = 1, \dots, N,$$

$\{a_{ki}\} \in O_N$ – группа ортогональных $N \times N$ матриц.

На M_N и Ort_N рассмотрим естественные меры

μ_N и, соответственно, m_N .

Карлесон показал, что для случайной системы $\Phi \in M_N$

$$\|S_{\Phi_\sigma}^*: l_2^N \rightarrow \text{weak } L^2\| \leq C - \text{abs. constant}, \quad (5)$$

$$\|f\|_{\text{weak } L^2} = \sup_{y>0} y^2 \cdot \text{meas } \{t \in (0, 1) : |f(t)| > y\}.$$

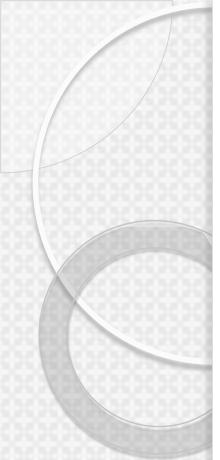
В (5) $\text{weak } L^2$ можно заменить на L^2 .

Карлесон предполагал, тем не менее,

что $\exists \gamma_N, \lim_{N \rightarrow \infty} \gamma_N = \infty$ такая, что $\forall \Phi \in M_N$

$$\alpha(\Phi) \geq \gamma_N.$$

Однако оказалось, что это не так.



ТЕОРЕМА (Б.К., 1980, 1985)

a) $\exists C_0$: *npu* $n = 1, 2, \dots$

$$\mu_N\{\Phi \in M_N : \alpha(\Phi) \geq C_0\} \leq 10^{-N}.$$

b) $\forall A > 0$, $\exists \gamma = \gamma(A) > 1$ u $K = K(A)$ *takue, что*

$$\mu_N\{\Phi \in M_N : \alpha(\Phi) \geq A \ln N \|\Phi\| \leq K \exp\{-N^\gamma\}.$$

ТЕОРЕМА (Р. Меграбян, 1988)

$\exists c_1, c_2 > 0$ u y_0 *takue, что при* $N = 1, 2, \dots$ u $y \geq y_0$

$$\mu_N\{\Phi \in M_N : \alpha(\Phi) \geq y \|\Phi\| \leq c_1 \exp[-\exp(c_2 y) \cdot N].$$

Приведенные результаты о системах из M_N

переносятся “в главном” на системы,

порожденные ортогональными матрицами.

В частности,

$$\int_{\text{Ort}_N} \alpha(\Phi) dm_N \leq C - \text{abs. constant.}$$

При этом не известно сколь-нибудь общих результатов,
гарантирующих возможность улучшения
оценки Меньшова–Радемахера
для любой конкретной системы Φ
из достаточно широкого класса
функциональных систем.

В частности для тригонометрической системы $T_N = \{e^{ikt}\}_{k=-N}^N$
для величины $\alpha(T_N)$ известно только, что
$$\alpha(T_N) \leq c \log N.$$

В связи с этим интерес представляет

ЗАДАЧА (Б.К., 1977)

Пусть $\Phi = \{\varphi_k(x)\varphi_k(y)\}_{k=1}^N$,

где $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N \subset L^2(X, \mu)$ – ортонормированные системы.

Верно ли, что

$$\|S_\Phi^*: l_2^N \rightarrow L^2(X \times X)\| \leq \gamma_N \log N,$$

где $\gamma_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$?

С 30-х годов XX-го века известна
теорема Меньшова–Марцинкевича.

ТЕОРЕМА Е

Для любой O.H.C. $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subset L^2(X, \mu)$

найдется подпоследовательность Λ

натурального ряда $\Lambda = \{k_j\}_{j=1}^{\infty}$ такая, что

$$\|S_{\Phi_{\Lambda}}^*: l_2 \rightarrow L^2(X, \mu)\| \leq C.$$

Представляет интерес вопрос о плотности
указанной в теореме Меньшова–Марцинкевича последовательности Λ .

Вполне возможно, что можно выбрать $\Lambda = \{k_j\}$
с $k_j \leq j^{1+\delta}$, $j = 1, 2, \dots$, где δ – произвольное положительное число.

Если исходная система Φ равномерно ограничена,

т.е. $\|\varphi_k\|_{L^\infty} \leq C$, $k = 1, 2, \dots$,

то нетрудно найти нужную последовательность Λ степенной плотности.

Однако для общих систем наилучший

известный результат такой (Г. Карагулян, 1988):

$\exists \Lambda = \{k_j\}_{j=1}^\infty$ с $k_j \leq \lambda^j$, $j = 1, 2, \dots$,

где $\lambda > 1$ – произвольная постоянная, для которых

$$\|S_{\Phi_\Lambda}^*: l_2 \rightarrow L^0(X, \mu)\| \leq C.$$

Рассмотрим теперь вопрос о поведении величин $\beta(\Phi)$.

Задача А.Н.Колмогорова в исходной постановке

имела следующий вид:

Верно ли, что для любой О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$

существует перестановка $\sigma \in S(\infty)$ такая,

что любой ряд вида

$$\sum a_k \varphi_{\sigma(k)}(x), \quad \sum a_k^2 < \infty,$$

сходится почти всюду.

Этот вопрос оказался связан
с возникшими позднее глубокими
проблемами функционального анализа и близок
к задаче об ограниченности (при $N \rightarrow \infty$) последовательности

$$C_N \equiv \sup_{\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N - \text{О.Н.С.}} \beta(\Phi), \quad N = 1, 2, \dots,$$

Точнее, задача Колмогорова эквивалентна

ограниченности последовательности

$$C'_N \equiv \sup_{\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^N - \text{О.Н.С.}} \beta'(\Phi),$$

$$\beta'(\Phi) = \inf_{\sigma \in S(N)} \|S_\Phi^*: l_2^N \rightarrow \text{weak}L^2(X, \mu)\|.$$



Одно из направлений в функциональном анализе,
возникшее в связи с задачей Колмогорова, —
оценки операторных норм подматриц данной матрицы.

Эта тема заслуживает отдельного доклада.

Я лишь поясню связь этой темы
со сходимостью почти всюду ортогональных рядов.

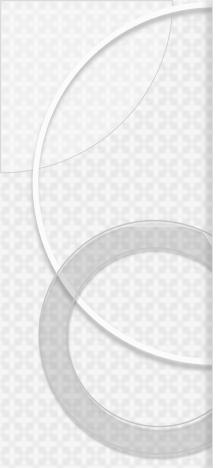


Задача Колмогорова остается открытой.

В 1989 г. Ж. Бургейн получил
следующий прорывной результат.

Для любой О.Н.С. $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N$ с
 $\|\varphi_k(x)\|_{L^\infty} \leq M, \quad k = 1, 2, \dots, N,$ (6)

$$\beta(\Phi) \leq C \ln \ln N. \quad (7)$$



Метод Бургейна использует усреднение
по группе перестановок $S(N)$.

Оценка (7) – наилучший результат,
который можно получить на таком пути.

Метод Бургейна может быть применен
для нахождения достаточно плотной подсистемы
с хорошей оценкой нормы оператора
мажоранты частных сумм в данной
равномерно ограниченной ортонормированной системе.

ТЕОРЕМА (Б.К., И. В. Лимонова, 2019)

При $\rho > 4$ для любой O.H.C. $\Phi = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^N$

со свойством (6) найдется $\Lambda \subset \langle N \rangle$,

$|\Lambda| \geq N[\log(N+3)]^{-\rho}$ такое, что

$$\|S_{\Phi_\Lambda}^*: l_\infty(\Lambda) \rightarrow L^2(X, \mu)\| \leq C(\rho, \mu) \cdot |\Lambda|^{1/2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ

При $\rho < 2$ утверждение теоремы теряет силу.