

1. Введем ряд стандартных обозначений. Через  $A$  будем обозначать исследуемое множество неотрицательных чисел  $a_n$ ,  $n \geq 0$ . Как правило, в качестве  $a_n$  будут рассматриваться значения характеристической функции некоторого конечного множества целых чисел, которые мы будем обозначать той же буквой:

$$a_n = \chi_A(n) = \Pi_A(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n \in A, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

Далее,  $P$  — некоторое множество простых чисел: для всякого  $z \geq 2$  имеем

$$P(z) = \prod_{p \in P, p \leq z} p$$

(т.е.  $P(z)$  — произведение всех простых чисел из  $P$ , не превосходящих  $z$ ).

Основным объектом изучения будет сумма

$$S = S(A, P, z)$$

— сумма тех элементов  $a_n$ , которые отвечают числам  $n$ , не делимым на простые  $p \in P$ , не превосходящие  $z$ :

$$S(A, P, z) = \sum_{n: (n, P(z)) = 1} a_n$$

В случае, когда  $a_n = \Pi_A(n)$ , сумма  $S$  совпадает с числом элементов множества  $A$ , не делимых на простое число  $p \leq z$ ,  $p \in P$ . Это количество также называется числом "непроемных" элементов множества  $A$ .

2. Рассмотрим несколько типичных примеров. Через  $P$  далее будем обозначать множество всех простых чисел.

2.1. Пусть  $a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leq n \leq x, \\ 0, & n > x, \end{cases} \quad z = \sqrt{x}, P = P.$

Если  $n \leq x$  и  $(n, P(z)) = 1$ , то  $n$  — простое число с условием  $\sqrt{x} < n \leq x$ , так что

$$S(A, P, z) = S(A, P, \sqrt{x}) = \pi(x) - \pi(\sqrt{x}) + 1.$$

Т.о., "непроеянными" остались простые числа из промежутка  $(\sqrt{x}, x]$  и число  $n = 1$ .

2.2. Пусть  $a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = k(k+2) \text{ для} \\ & \text{некоторого целого } k, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$

$z = \sqrt{x+2}$ ,  $P = \mathbb{P}$ . Если целое  $n = k(k+2)$ ,  $k \leq x$ , удовлетворяет условию  $(n, P(z)) = 1$ , то, очевидно, оба числа  $k, k+2$  не делятся на простые  $p \leq \sqrt{x+2}$ . Следовательно,  $k$  и  $k+2$  — простые числа. Значит,  $S(A, P, z)$  совпадает с количеством простых чисел  $p$  промежутка  $(\sqrt{x+2}, x]$ , для которых  $p+2$  также простое число. Такие пары называются простыми близнецами. Обозначая количество пар  $p, p+2$  простых близнецов условием  $p \leq x$  через  $\pi_2(x)$ , будем иметь:

$$S(A, P, z) = \pi_2(x) - \pi_2(\sqrt{x+2}) \quad z = \sqrt{x+2}.$$

2.3. Пусть  $N \geq 2$  — четное число,  $P = \mathbb{P}$ , и пусть

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = k(N-k) \text{ для неко-} \\ & \text{торого } k > 1, \\ 0, & \text{иначе;} \end{cases}$$

Тогда из равенства  $(k(N-k), P(z)) = 1$ , где  $1 \leq k \leq N-1$  следует, что оба числа  $k, N-k$  не делятся на простые  $\leq \sqrt{N}$  и, следовательно, сами являются простыми числами:  $p_1 = k, p_2 = N-k$ . Для них имеем:  $p_1 + p_2 = N$ . Таким образом, сумма  $S(A, P, z)$  оказывается нижней оценкой для числа представлений  $N$  суммой двух простых чисел. В частности, из неравенства  $S(A, P, z) > 0$  следовала бы справедливость бинарной гипотезы Гольдбаха.

2.4. Пусть  $q \geq 3$ ,  $1 \leq a \leq q-1$  — целые числа с условием  $(q, a) = 1$   
 $P = \mathbb{P}$ ,  $z = \sqrt{x}$   
 $a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = qm + a \leq x \text{ для некоторого целого } m \geq 0, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$   
 $= \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv a \pmod{q}, n \leq x, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Тогда из условия  $(n, P(z)) = 1$  следует, что  $n$  — простое число относительно  $(\sqrt{x}, x)$ , принадлежащее арифметической прогрессии с разностью  $q$  и первым членом  $a$ . Обозначая число таких простых  $p$  с условием  $p \leq x$  через  $\pi(x; q, a)$ , будем иметь:  $S(A, P, z) = \pi(x; q, a) - \pi(\sqrt{x}; q, a)$ .

В силу основного свойства функции Мёбиуса, имеем:

$$S(A, P, z) = \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, P(z)) = 1}} a_n = \sum_{n \leq x} a_n \sum_{d | (n, P(z))} \mu(d) =$$

$$= \sum_{\substack{d | P(z) \\ d \leq x}} \mu(d) \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 \pmod{d}}} a_n = \sum_{\substack{d | P(z) \\ d \leq x}} \mu(d) |A_d|,$$

где  $|A_d| = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 \pmod{d}}} a_n$  (в смысле, когда  $a_n \equiv \mathbb{1}_A(n)$ ,

$|A_d|$  есть количество элементов множества  $A$ , кратных  $d$ ; этим оправдывается обозначение). Условие  $d \leq x$  в сумме по  $d$  можно опустить: если  $d > x$ , то сумма  $|A_d|$  является нулем, т.к. в ней участвуют лишь числа  $n \leq x$ . Итак, для любых  $A, P, z \leq x$  имеем:

$$S(A, P, z) = \sum_{d | P(z)} \mu(d) |A_d|.$$

Вернемся еще раз к примеру, рассмотренному на лекции<sup>1</sup> (назовем его условием "решетка Лежандра").

Пусть  $P = \mathbb{P}$  — множество всех простых чисел,  
 $a_n = 1$  для  $n \leq x$ ,  $a_n = 0$ , иначе, и пусть  $2 \leq z \leq \sqrt{x}$ .

Тогда  $S(A, P, z)$  есть количество чисел  $n$ ,  $z < n \leq x$ ,

не делящихся на простое число  $p$ ,  $p \leq z$ , к которым добавлено число  $n=1$ . Ясно, что все простые числа  $p$ ,  $z < p \leq x$ , находятся в этом множестве. Значит,  $S(A, P, z)$  есть верхняя оценка для числа  $\pi(x) - \pi(z) + 1$ . Следовательно,

$$\pi(x) \leq \pi(z) - 1 + S(A, P, z) \leq z + \sum_{d|P(z)} \mu(d) |A_d|.$$

$$\text{Очевидно, } A_d = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 \pmod{d}}} 1 = \left[ \frac{x}{d} \right] = \frac{x}{d} - \left\{ \frac{x}{d} \right\} = \frac{x}{d} + \theta,$$

Поэтому

$$\pi(x) \leq z + \sum_{d|P(z)} \mu(d) \left( \frac{x}{d} + \theta \right) = z + x \sum_{d|P(z)} \frac{\mu(d)}{d} +$$

$$+ \theta_1 \sum_{d|P(z)} 1 = z + x \prod_{p|P(z)} \left( 1 - \frac{1}{p} \right) + \theta_1 \pi(P(z)) =$$

$$= z + x \prod_{p \leq z} \left( 1 - \frac{1}{p} \right) + 2^{\pi(z)} < \frac{x}{O(z)} + z + 2^{\frac{1}{2}z}.$$

$$\text{Беря } z = O(x), \text{ получим: } \pi(x) \ll \frac{x}{O(x)}.$$

Таким образом, применяя итерации к получению более точной оценки  $\pi(x)$  сужим сильно большое число слагаемых в сумме по  $d$ .

3. Основная идея Вилло Врича (1885 - 1978) состояла в замене в равенстве для  $S(A, P, z)$  функции Мёбиуса  $\mu(d)$  некоторой другой функции со значениями  $\lambda = \{\lambda_d\}$ , "носителем" которой (т.е. множеством тех  $d$ , где  $\lambda_d \neq 0$ ) сравнительно мал. Это удается сделать, однако точное равенство для  $S(A, P, z)$  превращается в неравенство (верхнее и нижнее).

Итак, пусть последовательности  $\lambda^+ = \{\lambda_d^+\}$  и  $\lambda^- = \{\lambda_d^-\}$  таковы, что  $\lambda_1^+ = \lambda_1^- = 1$ , и при любых  $n \geq 2$  выполняются неравенства

$$\sum_{d|m} \lambda_d^- \leq 0 = \sum_{d|m} \mu(d) \leq \sum_{d|m} \lambda_d^+.$$

$$\text{Тогда } S(A, P, z) = \sum_{n \leq x} a_n = \sum_{n \leq x} a_n \sum_{d | (n, P(z))} g(d) \leq$$

$$\leq \sum_{n \leq x} a_n \sum_{d | (n, P(z))} \lambda_d^+ = \sum_{d | P(z)} \lambda_d^+ \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv 0 \pmod{d}}} a_n = \sum_{d | P(z)} \lambda_d^+ |A_d|.$$

Аналогично получается и неравенство

$$S(A, P, z) \geq \sum_{d | P(z)} \lambda_d^- |A_d|.$$

Чтобы сократить число слагаемых в этих неравенствах, задаются некоторым числом  $D > 1$  и полагают  $\lambda_d^+, \lambda_d^- = 0$  для всех  $d > D$ . Ввиду того, что в обеих суммах участвуют лишь бесквадратные  $d$ , можно зеведомо считать, что  $\lambda_d^\pm = 0$ , если  $d$  делится на квадрат простого числа.

Для дальнейших оценок необходимо сделать некоторые предположения о распределении элементов просеиваемого множества  $A$  по арифметическим прогрессиям.

Именно, пусть имеется некоторая величина  $X = X(x)$  такая, что  $X$  служит хорошим приближением к  $|A| = |A_1|$ , и пусть, далее, существует мультипликативная функция  $g(n)$  такая, что  $0 \leq g(n) < 1$  для всех  $n$ ,  $g(p) = 0$  для всех простых  $p \notin P$ , и

$$|A_d| = Xg(d) + \varepsilon_d$$

для всех  $d$ ,  $1 \leq d \leq D$ , здесь  $\varepsilon_d$  — некоторые величины, которые "в среднем" невелики, но более конкретные предположения относительно поведения  $\varepsilon_d$  будут сделаны ниже.

В дальнейшем для удобства ссылки будем обозначать эти условия как условия (g).

#### 4. Простейшее решение В. Бруна

Обозначим через  $\omega(n)$  количество различных простых делителей  $n$ , так что  $\omega(1) = 0$ ,  $\omega(2) = \omega(3) = \omega(4) = \omega(5) = 1$ ,  $\omega(6) = 2$ ,  $\omega(30) = 3$  и т.д. Далее, для заданного целого числа  $r \geq 1$  рассмотрим функцию

$$\lambda_d = \begin{cases} \mu(d), & \text{если } \omega(d) \leq r, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Очевидно,  $\lambda_1 = 1$  и для любого целого  $m \geq 2$  с условием  $\omega(m) \leq r$  имеем:

$$\sum_{d|m} \lambda_d = \sum_{d|m} \mu(d) = 0.$$

Предположим, что  $\omega(m) = s \geq r+1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{d|m} \lambda_d &= \sum_{\substack{d|m \\ \omega(d) \leq r}} \mu(d) = \sum_{k=0}^r \sum_{\substack{d|m \\ \omega(d)=k}} \mu(d) = \\ &= \sum_{k=0}^r (-1)^k \sum_{\substack{d|m \\ \omega(d)=k}} 1 = \sum_{k=0}^r (-1)^k C_s^k. \end{aligned}$$

Замечая, что  $C_s^k = C_{s-1}^{k-1} + C_{s-1}^k$  при  $1 \leq k \leq s-1$ , получим:

$$\begin{aligned} \sum_{d|m} \lambda_d &= C_s^0 - C_s^1 + C_s^2 - \dots + (-1)^{s-1} C_s^{s-1} + (-1)^s C_s^s = \\ &= C_{s-1}^0 - (C_{s-1}^0 + C_{s-1}^1) + (C_{s-1}^1 + C_{s-1}^2) + \dots + \\ &\quad + (-1)^{s-1} (C_{s-1}^{s-2} + C_{s-1}^{s-1}) + (-1)^s (C_{s-1}^{s-1} + C_{s-1}^s) = (-1)^s C_{s-1}^s \end{aligned}$$

Итак, целая сумма будет положительна или отрицательна в зависимости от того, будет ли  $r$  четным числом или нет. Это дает нам пример функций  $\lambda_d^+$  и  $\lambda_d^-$ .

# Задачи по курсу "Методы решения" (лекции 1 и 2)

- ① Числа  $F_n = 2^{2^n} + 1$  называются числами Ферма:  $F_0 = 3$ ,  $F_1 = 5$ ,  $F_2 = 17$ ,  $F_3 = 257$  и т.д. Доказать, что  $(F_m, F_n) = 1$  при  $m \neq n$ . Вывести отсюда еще одно доказательство того, что множество простых чисел бесконечно.

Указание:  $F_n = \frac{2^{2^{n+1}} - 1}{2^{2^n} - 1}$ , так что  $\prod_{n=0}^{m-1} F_n = 2^{2^m} - 1 = F_m - 2$

- ② Какую нижнюю оценку для  $\pi(x)$  можно получить из второго доказательства Теоремы Евклида?

Указание: если  $k = \pi(x)$ , то  $[x] \leq \left( \left[ \frac{e_1 x}{e_2} \right] + 1 \right)^k$ ,  
откуда  $\pi(x) \geq \frac{e_1 x}{e_1(2e_1 x)}$

- ③\* Доказать неравенство:  $\frac{1}{2} \sqrt{x} \leq 2^{\pi(x)}$ ; получить отсюда, что  $\pi(x) \geq \frac{7}{10} \frac{x}{\log x}$ .

Решение. Всякое целое число  $n \leq x$  единственным образом записывается в виде  $n = a^2 m$ , где  $a \leq \sqrt{n}$ , а  $m \geq 1$  — бесквадратное. Зафиксируем  $a$ ; тогда для числа  $m$  имеют не более  $2^{\pi(x)}$  возможностей (всякое  $p \leq x$  либо входит в разложение  $m$ , либо нет). Значит,  
 $[x] \leq 2^{\pi(x)} [\sqrt{x}]$ .

- ④ Функция  $\phi(x)$  (сравнимый порядок роста),  
 $\phi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ ,  $\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{если } n = p^k, \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

④а  $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$ ;

④б  $\pi(x) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \log [x]! = \sum_{dm \leq x} \Lambda(d) = \sum_{m \geq 1} \sum_{d \leq \frac{x}{m}} \Lambda(d)$   
 $= \sum_{m \geq 1} \phi\left(\frac{x}{m}\right)$ , т.е.

$\phi(x) + \phi\left(\frac{x}{2}\right) + \phi\left(\frac{x}{3}\right) + \dots = \pi(x)$ , откуда

$\pi(x) - 2\pi\left(\frac{x}{2}\right) = \phi(x) - \phi\left(\frac{x}{2}\right) + \phi\left(\frac{x}{3}\right) - \phi\left(\frac{x}{4}\right) + \phi\left(\frac{x}{5}\right) - \phi\left(\frac{x}{6}\right) + \dots$

④в  $\pi(x) = [x] \log [x] - [x] + \frac{1}{2} \log [x] + O(1) = v([x]) + O(1)$   
 $v(u) = u \log u - u + \frac{1}{2} \log u$ ;  $v'(u) = \log u + \frac{1}{2u}$

$$v(x) - v\left(\frac{x}{2}\right) = v'\left(\frac{x}{2}\right) \left\{x\right\} = \left(e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2^{\frac{x}{2}}}\right) \left\{x\right\} = O(e^x), \text{ т.е.}$$

$$\pi(x) = x e^x - x + O(e^x)$$

$$\begin{aligned} \pi(x) - 2\pi\left(\frac{x}{2}\right) &= x e^x - x - 2\left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}} - \frac{x}{2}\right) + O(e^x) = \\ &= x e^x - x - x e^{\frac{x}{2}} + x = x e^2 + O(e^x). \end{aligned}$$

таким же,

$$\psi(x) - \left(\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{3}\right)\right) - \left(\psi\left(\frac{x}{4}\right) - \psi\left(\frac{x}{5}\right)\right) - \dots = x e^2 + O(e^x)$$

$$\psi(x) \geq x e^2 + O(e^x);$$

с другой стороны

$$\left(\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right)\right) + \left(\psi\left(\frac{x}{3}\right) - \psi\left(\frac{x}{4}\right)\right) + \dots \geq \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \text{ и}$$

$$\psi(x) - \psi\left(\frac{x}{2}\right) \leq x e^2 + O(e^x)$$

$$\psi\left(\frac{x}{2}\right) - \psi\left(\frac{x}{2^2}\right) \leq \frac{x}{2} e^2 + O\left(e^{\frac{x}{2}}\right)$$

$$\text{откуда} \quad \psi(x) \leq 2x e^2 + O(e^{2x}). \quad \text{таким же}$$

$$x e^2 + O(e^x) \leq \psi(x) \leq 2x e^2 + O(e^{2x}).$$

откуда можем переписать для  $\pi(x)$ :

$$\begin{aligned} \pi(x) &= \sum_{p \leq x} \frac{e_p p}{e_p} = \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{e_n} - \sum_{n \geq 2} \sum_{p^k \leq x} \frac{e_p}{k e_p} = \\ &= \sum_{n \leq x} \frac{\Lambda(n)}{e_n} + O(\sqrt{x}) = \frac{\psi(x)}{e^x} - \int_2^x \psi(u) d \frac{1}{e u} \end{aligned}$$

$$+ O(\sqrt{x}) = \frac{\psi(x)}{e^x} + \int_2^x \frac{\psi(u)}{u e^{2u}} + O(\sqrt{x})$$

$$\pi(x) \geq \frac{x e^2 + O(e^x)}{e^x} + \int_2^x \frac{u e^2 + O(e^u)}{u e^{2u}} + O(\sqrt{x}) =$$

$$= e^2 \left( \frac{x}{e^x} + \int_2^x \frac{du}{e^{2u}} \right) + O(\sqrt{x}) = \text{Li}(x) \cdot (e^2) + O(\sqrt{x})$$

$$\pi(x) \leq 2(e^2) \cdot \text{Li}(x) + O(\sqrt{x}), \quad \text{т.е.}$$

$$\text{Li}(x) = \int_2^x \frac{du}{e u} \quad \text{— интегральный логарифм } x$$

(Упомянуты об асимптотическом поведении  $\pi(x)$ ; различные формы асимптотического закона распределения простых чисел, история и т.д.)



⑤ Свёртка двух функций. Формула обращения Мёбиуса.

5a) Пусть арифметические функции  $f, g$  таковы, что  

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d) \quad \text{для любого } n \geq 1. \quad \text{Тогда } g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$$
 для любого  $n$ .  
 обратно, пусть  $g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$  для любого  $n$ ; тогда  

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d).$$

5b)  $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$ , т.ч.  $1 = \sum_{d|n} \mu(d) \tau\left(\frac{n}{d}\right)$

$\tau_3(n) = \sum_{d|n} \tau(d)$ , т.ч.  $\tau(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \tau_3\left(\frac{n}{d}\right)$

$\varphi(n) = \sum_{d|n} \Lambda(d)$ , т.ч.  $\Lambda(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \varphi\left(\frac{n}{d}\right) = - \sum_{d|n} \mu(d) \varphi(d)$

$\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ , т.ч.  $n = \sum_{d|n} \mu(d) \sigma\left(\frac{n}{d}\right)$  и т.д.

5c)\* Пусть при любом  $x$  функции  $F, G$  связаны соотношением

$$F(x) = \sum_{n \leq x} G\left(\frac{x}{n}\right)$$

Верны и обратные соотношения.

Тогда  $G(x) = \sum_{m \leq x} \mu(m) F\left(\frac{x}{m}\right)$

Докажем, что:  

$$\sum_{m \leq x} \mu(m) F\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{m \leq x} \mu(m) \sum_{\substack{n \leq \frac{x}{m}}} G\left(\frac{x}{mn}\right) =$$

$$= \sum_{\substack{mn \leq x}} \mu(m) G\left(\frac{x}{mn}\right) = \sum_{k \leq x} G\left(\frac{x}{k}\right) \sum_{m|k} \mu(m) = G(x).$$

5d)\* Д-то, что  $\left| \sum_{m \leq x} \frac{\mu(m)}{m} \right| \leq 1$  при любом  $x$ .

Укажем:  $G(x) \equiv 1$  для всех  $x \Rightarrow f(x) = \sum_{n \leq x} 1 = [x] \Rightarrow$

$$\Rightarrow 1 = \sum_{n \leq x} \mu(n) \left[ \frac{x}{n} \right]$$

Откуда следует, что при любом  $x$

$$\sum_{n \leq x} \mu(n) \left( \frac{x}{n} - \left\{ \frac{x}{n} \right\} \right) = 1, \quad \text{т.е. } \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n} = 1 + \sum_{n \leq x} \mu(n) \left\{ \frac{x}{n} \right\}$$

$$= 1 + \sum_{m \leq x-1} \mu(m) \left\{ \frac{x}{m} \right\}, \quad \text{и } x \left| \sum_{m \leq x} \frac{\mu(m)}{m} \right| \leq 1 + \sum_{m \leq x-1} 1 = x,$$

$$\left| \sum_{m \leq x} \frac{\mu(m)}{m} \right| \leq 1.$$

⑥  $\sum_{d^2|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{если } n - \text{бесквадр.} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$

⑦\* Если  $\mu(n) \neq 0$ , то  $n$  - свободн. от квадратов.