НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ. ПРИЛОЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ

А.Г.Сергеев

19 июня 2020 г.

ЛЕКЦИЯ 2

РАЗДЕЛ 2: НЕКОММУТАТИВНЫЙ ИНТЕГРАЛ

2.1. Идеалы в алгебре компактных операторов

Для построения некоммутативной версии анализа на C^*-алгебрах, необходимо, прежде всего ввести, как и в классическом анализе, понятие "бесконечно малых" элементов. Их роль в алгебре ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве будут играть компактные операторы. Порядок их "малости" определяется скоростью убывания сингулярных чисел этих операторов. Напомним их определение.

Пусть T есть компактный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $|T| = \sqrt{T^*T}$ – положительный квадратный корень из T^*T (мы отождествляем понятия "положительный"и "неотрицательный"операторы). Обозначим через $\{\mu_n(T)\}$ последовательность *сингулярных чисел* (s-чисел) оператора T, задаваемых собственными значениями оператора $|T|$, упорядоченными по убыванию:

$$\mu_0(T) \geq \mu_1(T) \geq \dots,$$

так что $\mu_n(T) \to 0$ при $n \to \infty$.

Сингулярные числа оператора T можно найти, пользуясь следующим эквивалентным определением:

$$\mu_n(T) = \inf_E \{\|T|E^\perp\| : \dim E = n\}, \tag{1}$$

где нижняя грань берется по всем n-мерным подпространствам $E \subset \mathcal{H}$, а через $E^\perp$ обозначается ортогональное дополнение к пространству E. На самом деле, эта нижняя грань достигается на подпространстве E_n, порожденном первыми n собственными векторами оператора $|T|$, отвечающими собственным значениям $\mu_0, \dots, \mu_{n-1}$.

По-другому, $\mu_n(T)$ можно определить как расстояние от оператора T до подпространства Fin_n операторов ранга$\leq n$, т.е.

$$\mu_n(T) = \inf_R \{\|T - R\| : R \in \mathrm{Fin}_n\}. \tag{2}$$

Свойства s-чисел:

1. $|\mu_n(T_1)-\mu_n(T_2)| \le \|T_1-T_2\|$, откуда следует, что функционал $\mu_n(T)$ непрерывен по T в равномерной топологии при любом n.

2. $\mu_{n+m}(T_1+T_2) \le \mu_n(T_1)+\mu_m(T_2)$, поскольку $\mathrm{Fin}_n+\mathrm{Fin}_m \subset \mathrm{Fin}_{n+m}$.

3. $\mu_{n+m}(T_1T_2) \le \mu_n(T_1)\mu_m(T_2)$, откуда следует, что
$$\mu_n(T_1T_2) \le \mu_n(T_1)\|T_2\|, \quad \mu_n(T_1T_2) \le \|T_1\|\mu_n(T_2),$$
так как $\mu_0(T)=\|T\|$.

Определение 1. Пусть T есть компактный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Будем говорить, что T принадлежит пространству $\mathcal{L}^p=\mathcal{L}^p(\mathcal{H})$, $1 \le p < \infty$, если
$$\sum_{n=0}^{\infty}\mu_n(T)^p < \infty.$$

Пространство $\mathcal{L}^p$ является идеалом в алгебре $\mathcal{K}=\mathcal{K}(\mathcal{H})$ компактных операторов и в алгебре $\mathcal{L}=\mathcal{L}(\mathcal{H})$ ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.

Наиболее известными примерами указанных идеалов являются класс $\mathcal{L}^1$ *ядерных операторов*, наделенный нормой
$$\|T\|_1 := \mathrm{Tr}|T| = \sum_{n=0}^{\infty}\mu_n(T),$$
и класс $\mathcal{L}^2$ *операторов Гильберта–Шмидта*, наделенный нормой
$$\|T\|_2^2 := \sum_{n=0}^{\infty}\mu_n(T)^2,$$
относительно которой $\mathcal{L}^2$ является гильбертовым пространством.

Введем величину, которая играет важную роль в последующем:
$$\sigma_N(T) := \sum_{n=0}^{N-1}\mu_n(T). \tag{3}$$
По-другому, ее можно определить как
$$\sigma_N(T) = \sup_E\{\|TP_E\|_1 : \ \dim E = N\}, \tag{4}$$

где P_E – ортогональный проектор на N-мерное подпространство E, а верхняя грань достигается снова на подпространстве E_N, порожденном первыми N собственными векторами оператора $|T|$.

Из последнего определения вытекает, что σ_N удовлетворяет неравенству треугольника

$$\sigma_N(T_1 + T_2) \leq \sigma_N(T_1) + \sigma_N(T_2)$$

и, следовательно, задает *полунорму* на $\mathcal{K}$.

Приведем еще одно, необходимое для дальнейшего, определение этой величины:

$$\sigma_N(T) = \inf\{\|R\|_1 + N\|S\| : \ R, S \in \mathcal{K}, R + S = T\}. \tag{5}$$

Оно позволяет распространить определение σ_N как функции натурального параметра N на произвольные неотрицательные значения $\lambda \in [0, \infty)$, полагая

$$\sigma_\lambda(T) = \inf\{\|R\|_1 + \lambda\|S\| : \ R, S \in \mathcal{K}, R + S = T\}. \tag{6}$$

Можно показать, что функция $\sigma_\lambda(T)$ обладает следующими свойствами:

1. $\sigma_\lambda(T)$ кусочно линейна и выпукла; более того, если $\lambda = N + t$ с $0 \leq t < 1$, так что $N = [\lambda]$, то
$$\sigma_\lambda(T) = (1 - t)\sigma_N(T) + t\sigma_{N+1}(T);$$
2. $\sigma_\lambda(S + T) \leq \sigma_\lambda(S) + \sigma_\lambda(T)$;
3. $\sigma_{\lambda+\mu}(S + T) \geq \sigma_\lambda(S) + \sigma_\mu(T)$ для положительных операторов $S.T \in \mathcal{K}$.

Из двух последних свойств вытекает неравенство, выполняющееся для произвольных компактных положительных операторов S, T:

$$\sigma_\lambda(S + T) \leq \sigma_\lambda(S) + \sigma_\lambda(T) \leq \sigma_{2\lambda}(S + T). \tag{7}$$

Это свойство субаддитивности функции $\sigma_\lambda(T)$ на конусе положительных компактных операторов сыграет важную роль при определении следа Диксмье.

Помимо идеалов $\mathcal{L}^p$ введем еще интерполяционные идеалы $\mathcal{L}^{p,q}$.

Определение 2. Определим $\mathcal{L}^{p,q} = \mathcal{L}^{p,q}(\mathcal{H})$ при $1 < p < \infty$, $1 \leq q < \infty$, как интерполирующее пространство между $\mathcal{K}$ и $\mathcal{L}^1$. А именно, будем говорить, что оператор $T \in \mathcal{L}^{p,q}$, если

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^{(\alpha-1)q-1}\sigma_N(T)^q < \infty\,,$$

где $\alpha = 1/p$. Дополним это определение при $q = \infty$, полагая, что $T \in \mathcal{L}^{p,\infty}$, если последовательность чисел $\{N^{\alpha-1}\sigma_N(T)\}_{N=1}^{\infty}$ ограничена.

Каждое из введенных пространств $\mathcal{L}^{p,q}$ является двусторонним идеалом в алгебре $\mathcal{K}$ компактных операторов. При $p_1 < p_2$ и при $p_1 = p_2$, $q_1 < q_2$ имеются включения

$$\mathcal{L}^{p_1,q_1} \subset \mathcal{L}^{p_2,q_2}.$$

Рассмотрим подробнее некоторые конкретные примеры пространств $\mathcal{L}^{p,q}$.

Пространство $\mathcal{L}^{p,p}$, $1 \leq p < \infty$, совпадает с идеалом Шаттена $\mathcal{L}^p$. Пространство $\mathcal{L}^{p,\infty}$, $1 < p < \infty$, состоит из компактных операторов T, для которых $\sigma_N(T) = O(N^{1-\alpha})$, т.е. $\mu_n(T) = O(n^{-\alpha})$. На этом пространстве имеется естественная норма

$$\|T\|_{p,\infty} = \sup_N \frac{1}{N^{1-\alpha}} \sigma_N(T).$$

Пространство $\mathcal{L}^{p,1}$ состоит из компактных операторов T, для которых сходится ряд

$$\sum_{N=1}^{\infty} N^{\alpha-2} \sigma_N(T),$$

что эквивалентно сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1} \mu_{n-1}(T)$.

Между этими пространствами имеются следующие вложения:

$$\mathcal{L}^{p-} \equiv \mathcal{L}^{p,1} \subset \mathcal{L}^p \equiv \mathcal{L}^{p,p} \subset \mathcal{L}^{p,\infty} \equiv \mathcal{L}^{p+}.$$

Дополним их определение пространств $\mathcal{L}^{p,q}$ для при $p = 1$, $q = \infty$, полагая

$$\mathcal{L}^{1,\infty} = \{T \in \mathcal{K} : \ \sigma_N(T) = O(\log N)\}$$

и наделим его нормой

$$\|T\|_{1,\infty} = \sup_{N \geq 2} \frac{\sigma_N(T)}{\log N}. \tag{8}$$

Если эта норма конечна, то $\mu_n(T) = O(1/n)$. Пространство $\mathcal{L}^{1,\infty}$ является идеалом, двойственным к идеалу

$$\mathcal{L}^{\infty,1} = \{T \in \mathcal{K} : \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n(T)}{n} < \infty\}.$$

Как было указано выше, для ядерных операторов $T \in \mathcal{L}^1$ определен след, задаваемый суммой s-чисел этого оператора и именно след играет роль некоммутативного интеграла в алгебре компактных операторов. Однако с точки зрения приложений класс ядерных операторов слишком узок, поэтому в следующем пункте мы введем след Диксмье, который определен для более широкого класса операторов $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$.

2.2. След Диксмье

Пусть T есть положительный оператор, принадлежащий идеалу $\mathcal{L}^{1,\infty}$. Нам хотелось бы определить его след по формуле

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\log N}\sum_{n=0}^{N-1}\mu_n(T)=\lim_{N\to\infty}\frac{\sigma_N(T)}{\log N}. \tag{9}$$

При этом возникают два вопроса:

1) Существует ли предел в формуле (9) для всех операторов $T\in\mathcal{L}^{1,\infty}$?

2) Является ли функционал, задаваемый формулой (9), линейным?

Заметим, что решение вопроса о линейности указанного функционала тесно связано с ответом на вопрос о существовании предела в формуле (9). Действительно, для установления линейности нам необходимо сравнить величину

$$\gamma_N=\frac{\sigma_N(T_1+T_2)}{\log N}$$

с суммой величин

$$\alpha_N=\frac{\sigma_N(T_1)}{\log N}\quad \text{и}\quad \beta_N=\frac{\sigma_N(T_2)}{\log N}.$$

Из неравенства треугольника для $\sigma_N(T)$ вытекает, что $\gamma_N\le\alpha_N+\beta_N$, а из отмеченного в п. неравенства $\sigma_N(T_1)+\sigma_N(T_2)\le\sigma_{2N}(T_1+T_2)$ вытекает, что

$$\alpha_N+\beta_N\le\frac{\log(2N)}{\log N}\,\gamma_{2N}.$$

Так как $\log(2N)/\log N\to 1$ при $N\to\infty$, мы видим, что существование предела в формуле (9) обеспечивает нам линейность функционала, задаваемого этой формулой.

Переходя к вопросу о существовании указанного предела, заметим, что для любого $T\in\mathcal{L}^{1,\infty}$ последовательность чисел

$$\left\{\frac{\sigma_N(T)}{\log N}\right\}$$

ограничена.

Это позволяет нам рассмотреть вопрос о существовании предела в формуле (9) в следующей, более общей постановке. А именно, будем искать на пространстве $\ell^\infty(\mathbb{N})$ ограниченных последовательностей $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty$ линейную форму, обозначаемую через

$$\mathrm{Lim}_\omega,$$

которая обладает следующими свойствами:

1. $\mathrm{Lim}_\omega a \geq 0$, если все $a_n \geq 0$;
2. $\mathrm{Lim}_\omega a = \lim_{n\to\infty} a_n$, если предел справа существует;
3. $\mathrm{Lim}_\omega(a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \ldots) = \mathrm{Lim}_\omega\{a_n\}$.

Единственным нетривиальным условием является последнее, которое трактуется как *асимптотическая масштабная инвариантность*. Для того, чтобы пояснить происхождение данного термина, перейдем от последовательностей $\{a_n\}$ к функциям вещественного параметра, как мы уже делали это в случае функции σ_N. А именно, построим по последовательности $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ ограниченную функцию $f_a(\lambda)$ на положительной вещественной полуоси, задаваемую следующим образом: если $\lambda = N + t$ с $0 \leq t < 1$, т.е. $[\lambda] = N$, то положим $f_a(\lambda) = (1-t)a_N + ta_{N+1}$. Тем самым, введенная функция $f_a(\lambda)$ является кусочно линейной.

Заменим теперь функцию $f(\lambda) \equiv f_a(\lambda)$ ее *чезаровским средним*

$$(Mf)(\lambda) = \frac{1}{\log \lambda}\int_3^\lambda \frac{f(t)}{t}\, dt.$$

Это среднее на ограниченных функциях f обладает следующим свойством асимптотической масштабной инвариантности:

$$|M(S_\mu f)(\lambda) - Mf(\lambda| \longrightarrow 0 \quad \text{при } \lambda \to +\infty,$$

где $(S_\mu f)(\lambda) := f(\mu\lambda)$ для любого $\mu > 0$. Возвращаясь к свойству (3) масштабной инвариантности, заметим, что последовательности $\tilde{a} = (a_1, a_1, a_2, a_2, a_3, a_3, \ldots)$ отвечает функция $f_{\tilde{a}} = S_{1/2}(f_a)$.

Сформулируем теперь более точно, какого рода предел мы хотели бы получить на пространстве $C_b(\mathbb{R}_+)$ ограниченных непрерывных функций на полуоси $\mathbb{R}_+ := [1, \infty)$. Поскольку нас интересуют только пределы указанных функций на бесконечности, перейдем от пространства $C_b(\mathbb{R}_+)$ к фактору

$$B_+ := C_b(\mathbb{R}_+)/C_0(\mathbb{R}_+)$$

по подпространству $C_0(\mathbb{R}_+)$ непрерывных функций функций, обращающихся в нуль на бесконечности.

Фиксируем положительную линейную форму ω на пространстве $C_b(\mathbb{R}_+)$ такую, что $\omega = 0$ на подпространстве $C_0(\mathbb{R}_+)$ и $\omega(1) = 1$. Такая форма спускается на B_+ и называется *состоянием* на C^*-алгебре B_+. Мы можем рассматривать $\omega(f)$ как "обобщенный предел" функции $f \in C_b(\mathbb{R}_+)$ на бесконечности. По форме ω мы можем определить предел $\mathrm{Lim}_\omega(a)$ последовательности $a \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ как

$$\mathrm{Lim}_\omega(a) := \omega(Mf_a).$$

Можно рассматривать $\mathrm{Lim}_\omega(a)$ как предел последовательности a по Чезаро.

Определение 3. Для любого состояния ω на C^*-алгебре $B_+ = C_b(\mathbb{R}_+)/C_0(\mathbb{R}_+)$ определим *след Диксмье* положительного оператора $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ по формуле

$$\mathrm{Tr}_\omega(T) = \mathrm{Lim}_\omega \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log \lambda}. \tag{10}$$

Свойства следа Диксмье:

1. *Аддитивность:* $\mathrm{Tr}_\omega(T_1 + T_2) = \mathrm{Tr}_\omega(T_1) + \mathrm{Tr}_\omega(T_2)$.

2. *Положительность:* след Диксмье можно продолжить на весь идеал $\mathcal{L}^{1,\infty}$ так, чтобы свойство $\mathrm{Tr}_\omega(T) \geq 0$ выполнялось на положительных операторах $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$.

3. *Унитарная инвариантность:* $\mathrm{Tr}_\omega(UTU^*) = \mathrm{Tr}_\omega(T)$ для любого унитарного оператора U.

4. *Коммутативность:* для любого ограниченного оператора $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и любого $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ справедливо равенство: $\mathrm{Tr}_\omega(ST) = \mathrm{Tr}_\omega(TS)$.

5. След $\mathrm{Tr}_\omega(T)$ равен нулю на подпространстве $\mathcal{L}_0^{1,\infty}$, совпадающем с замыканием по норме $\|\cdot\|_{1,\infty}$ пространства Fin операторов конечного ранга. В частности, этот след зануляется на всех ядерных операторах из пространства $\mathcal{L}^1$.

Пояснения требует только второе свойство. Для того, чтобы продолжить след Диксмье на весь идеал $\mathcal{L}^{1,\infty}$, нужно представить произвольный оператор $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ в виде разности двух положительных операторов из этого класса и, тем самым, продолжить след Диксмье на весь идеал $\mathcal{L}^{1,\infty}$ с сохранением свойства положительности.

В общем случае, след Tr_ω зависит от выбора состояния ω.

Определение 4. Будем называть оператор $T \in \mathcal{L}^{1,\infty}$ *измеримым*, если существует предел

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log\lambda} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_n(T)}{\log n}.$$

В этом случае след Диксмье $\mathrm{Tr}_\omega(T)$ не зависит от ω, поэтому будем обозначать его через

$$\mathrm{Tr}^+ T = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\sigma_\lambda(T)}{\log\lambda}.$$

Приведем в качестве примера формулу для следа оператора Лапласа-Бельтрами на сфере S^n, наделенной стандартной метрикой. Собственные числа этого оператора равны $l(l+n-1)$, где l – натуральное число, и имеют кратность $m_l = \binom{l+n}{n} - \binom{l+n-2}{n}$. Оператор $\Delta^{-n/2}$ измерим, а его след Диксмье равен

$$\mathrm{Tr}^+ \Delta^{-n/2} = \frac{2}{n!}\,.$$