

Вспомогательным, что даёт простейшее решето В. Бруна в задаче оценки величины $\pi(x)$, Пусть $z = 2m$ - четное число, и пусть $2 < z \leq \sqrt{x}$ (такие значения m и z будут выбраны далее).

В качестве множества P возьмем все множество простых чисел P , в качестве величин a_n - функцию

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \leq x, \\ 0, & \text{если } n > x. \end{cases}$$

Тогда $P = \prod_{p \leq z} p$ и сумма $S(A, P, z)$ совпадает

с количеством целых $n \leq x$, взаимно простых с P , т.е. не делящихся на простое число $p \leq z$, итак,

$$\pi(x) - \pi(z) + 1 \leq S(A, P, z).$$

Беря $\lambda_d^+ = \begin{cases} \mu(d), & \text{если } \omega(d) \leq z, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$ получаем:

$$S(A, P, z) \leq \sum_{d|P(z)} \lambda_d^+ |A_d| = \sum_{\substack{d|P \\ \omega(d) \leq z}} \mu(d) |A_d|.$$

Заменяя $|A_d|$ на $\left[\frac{x}{d}\right] = \frac{x}{d} - \theta$, где $0 \leq \theta < 1$, получаем:

$$\begin{aligned} \pi(x) &\leq \pi(z) + \sum_{\substack{d|P \\ \omega(d) \leq z}} \mu(d) \left(\frac{x}{d} - \theta \right) = \pi(z) + x \sum_{\substack{d|P \\ \omega(d) \leq z}} \frac{\mu(d)}{d} + \\ &+ \theta_1 \sum_{\substack{d|P \\ \omega(d) \leq z}} 1, \quad |\theta_1| \leq 1. \end{aligned}$$

Все делители d числа P с условием $\omega(d) \leq z$ удовлетворяют, очевидно, неравенству $d \leq z^z$. Следовательно, последняя сумма не превосходит z^z .

Далее, имеем:

$$\sum_{\substack{d|P \\ \omega(d) \leq z}} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{d|P} \frac{\mu(d)}{d} - \sum_{\substack{d|P \\ \omega(d') > z}} \frac{\mu(d)}{d} = \sigma_1 - \sigma_2.$$

Очевидно, $\sigma_1 = \prod_{p|P} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, так что

в силу леммы 5 лекции 1 имеем: $\sigma_1 \leq \frac{1}{\ln z}$.

Далее, сумму σ_2 оценим по абсолютной величине с помощью следующего приёма:

Пусть $s \geq 1$ — целое число. Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{s!} \left(\sum_{p \leq z} \frac{1}{p} \right)^s. \quad (1)$$

Всякое бесквадратное произведение $d = p_{i_1} \cdots p_{i_s}$, где $1 < p_{i_1} < \cdots < p_{i_s} \leq z$, встретится в сумме при раскрытии скобок с коэффициентом $\frac{1}{s!} \cdot s! = 1$.

Кроме того, в сумме встретятся и слагаемые, отвечающие всевозможным произведениям

вида $p_{i_1}^{\alpha_1} \cdots p_{i_t}^{\alpha_t}$ с условием $\alpha_1 + \cdots + \alpha_t = s$,

так $\max(\alpha_1, \dots, \alpha_t) \geq 2$, причем коэффициент при та-

ком слагаемом совпадает с величиной

$$\frac{1}{s!} \cdot \frac{(s!)!}{\alpha_1! \cdots \alpha_t!} = \frac{1}{s!} \cdot \frac{s!}{\alpha_1! \cdots \alpha_t!} = \frac{1}{\alpha_1! \cdots \alpha_t!} > 0$$

Следовательно, рассматриваемое выражение (1) служит верхней оценкой суммы

$$\sum_{\substack{d|P \\ \omega(d)=s}} \frac{1}{d}.$$

Таким образом,

$$|\sigma_2| \leq \sum_{s \geq z+1} \frac{1}{s!} \left(\sum_{p \leq z} \frac{1}{p} \right)^s.$$

Считая z достаточно большим, из формулы Мертенса получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{p \leq z} \frac{1}{p} &= \ln z + M + O\left(\frac{1}{\ln z}\right) \leq \ln z + \frac{1}{2} \leq \\ &\leq \ln \sqrt{x} + \frac{1}{2} < \ln x = w \end{aligned}$$

(здесь $M = 0.26149721, \dots$ — постоянная Мертенса)

Пользуясь формулой Стирлинга, находим

$$\begin{aligned} |\sigma_2| &\leq \sum_{s \geq z+1} \frac{1}{s!} w^s \leq \sum_{s \geq z+1} \frac{w^s}{\sqrt{2\pi s} \left(\frac{s}{e}\right)^s} < \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{s \geq z+1} \left(\frac{ew}{s}\right)^s \\ &< \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{s=z+1}^{\infty} \left(\frac{ew}{z}\right)^s \end{aligned}$$

Если теперь предположить, что $x \geq 2ew$, то тогда

$$|\sigma_2| < \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{s=z+1}^{\infty} 2^{-s} = \frac{2^{-z}}{\sqrt{2\pi z}} \leq \frac{2^{-2ew}}{\sqrt{4\pi ew}} < 2^{-2ew} =$$

$$= (e\pi)^{-2ew/2} < (e\pi)^{-\frac{15}{4}} \quad (\text{для этого достаточно выбрать } z = 2([ewex] + 1)).$$

Окончательно получим:

$$\pi(x) \leq \pi(z) + x(\sigma_1 + |\sigma_2|) + z^z < x(\sigma_1 + |\sigma_2|) + 2z^z <$$

$$< x \left(\frac{1}{e\pi z} + (e\pi)^{-15/4} \right) + 2z^z < \frac{2x}{e\pi z} + 2z^z,$$

Возьмем теперь $z = \exp\left(\frac{1}{6} \frac{e\pi}{e\pi x}\right)$. Тогда

$$z^z < \exp\left(\frac{e\pi x}{6e\pi x} (2e\pi e\pi + 2)\right) = \exp\left(\frac{e}{3} e\pi + \frac{1}{3} \frac{e\pi}{e\pi x}\right)$$

$$< x^{8/9}, \text{ если только } x \text{ достаточно велико.}$$

Итак,

$$\pi(x) < \frac{12x}{e\pi x} e\pi x + 2x^{8/9} < \frac{14x}{e\pi x} (e\pi x).$$

Таким образом, уже простейший вариант решета Бруна позволяет существенно улучшить оценку величины $\pi(x)$, получаемой решетом Лежандра-Эратосфена. Вместе с тем, и эта оценка не является точной по порядку из-за наличия множителя $14e\pi x$. В этом смысле простейшее решето не дает ничего нового по сравнению с теоремой Чебышева в задаче о поведении $\pi(x)$. Однако применение простейшего решета к задаче о простых близнецах сразу же приводит к нетривиальному результату относительно $\pi_2(x)$.

Простейшему решению В. Бруна можно придать универсальную форму, которая будет удобна для применения. Для этого вновь предположим, что для заданных $A = \{a_n\}$, P выполняется "условие (g)", т.е. существует мультипликативная функция g , такая, что $0 \leq g(n) < 1$ для всех n , $g(p) = 0$ для всех простых чисел $p \notin P$ и такая, что для всякого бесквадратного d условиям $1 \leq d < \infty$ выполняется равенство:

$$|A_d| = Xg(d) + \varepsilon_d$$

(здесь $X = X(n)$ следует понимать как скорректированную аппроксимацию величины $|A| = |A_1|$; обычно X зависит от x линейным образом: $X = cx$, $0 < c < 1$).

Пусть $p^+(n)$ и $p^-(n)$ для целого $n \geq 2$ обозначают, соответственно, наибольший и наименьший простые делители n (так что, например, $p^\pm(2) = 2$, $p^+(15) = 5$, $p^-(15) = 3$).

Лемма 1 Пусть Q — произвольное конечное множество простых чисел, $P = \prod_{p \in Q} p$, и пусть f — произвольная мультипликативная функция. Тогда при любом целом $k \geq 1$ справедливо тождество:

$$\sum_{\substack{d|P \\ \omega(d) \leq k}} \mu(d) f(d) = \prod_{p \in Q} (1 - f(p)) + (-1)^k \sum_{\substack{\delta | P \\ \omega(\delta) = k+1}} f(\delta) \prod_{\substack{p \in Q \\ p < p^-(\delta)}} (1 - f(p)),$$

До-во. Действительно,

$$\prod_{p \in Q} (1 - f(p)) = \sum_{d|P} \mu(d) f(d) = \left\{ \sum_{\substack{d|P \\ \omega(d) \leq k}} + \sum_{\substack{d|P \\ \omega(d) \geq k+1}} \right\} \mu(d) f(d),$$

так что

$$\sum_{\substack{d|P \\ \omega(d) \leq k}} \mu(d) f(d) = \prod_{p \in Q} (1 - f(p)) - \sum_{\substack{d|P \\ \omega(d) \geq k+1}} \mu(d) f(d).$$

Замечание Полезно рассмотреть два частных случая доказанного предложения.

Пусть $n \geq 2$ - целое, Q - множество всех простых делителей n , $\omega(n) = \prod_{p \in Q} p = \prod_{p|n} p = \text{rad}(n)$ - радикал n . Положим $f(d) \equiv 1$ для всех $d \geq 1$. Тогда сумма $\sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leq \tau}} \mu(d) f(d)$ совпадает с λ_n^+ и λ_n^- в зависимости от того, будет ли τ четным или нет.

Пусть $\omega(n) = s, \geq \tau+1$. По доказанному,

$$\sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leq \tau}} \mu(d) f(d) = \sum_{\substack{d|P \\ \omega(d) \leq \tau}} \mu(d) = \sum_{d|P} (1-1) + (-1)^\tau W,$$

$$\text{где } W = \sum_{\substack{\delta|P \\ \omega(\delta) = \tau+1}} 1 \cdot \prod_{\substack{p < P^{-(\delta)} \\ p|P}} (1-1), \text{ где } p_1 - \text{наименьший простой делитель } n. \text{ Ясно, что члены вида } W \text{ вносят лишь те слагаемые, для которых произведение по } p|P, p < P^{-(\delta)} \text{ равно 1. Это будет лишь в случае, когда } \delta \text{ делится на } p_1: \delta = p_1 \Delta. \text{ Т.е. } \omega(\Delta) = \omega(\delta) - 1 = \tau, \text{ и } \omega(n) = s, \text{ по явн., это значение } \Delta \text{ (а вместе с ним и } \delta) \text{ можно выбрать } C_\tau^s \text{ способами. Итак, } W = C_\tau^s, \text{ и}$$

$$\sum_{\substack{d|n \\ \omega(d) \leq \tau}} \mu(d) = (-1)^\tau C_\tau^s.$$

Пусть теперь Q - множество всех простых $p \leq \tau$, $\tau \geq 2$, и пусть $f(d) = \frac{1}{d}$. Тогда имеем:

$$\sum_{\substack{d|P \\ \omega(d) \leq \tau}} \frac{\mu(d)}{d} = \prod_{p \leq \tau} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + (-1)^\tau W,$$

$$W = \sum_{\substack{d|P \\ \omega(d) = \tau+1}} \frac{1}{d} \prod_{p|P} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

$$\text{Но очевидно, что } 0 \leq W \leq \sum_{\substack{d|P \\ \omega(d) = \tau+1}} \frac{1}{d} \leq \frac{1}{(\tau+1)!} \left(\sum_{p \leq \tau} \frac{1}{p} \right)^{\tau+1}$$

(дальнейшая оценка м.б. проведена, как выше).

Преобразуя последнюю сумму, заметим следующее, всякое d , делящее P и удовлетворяющее условию $\omega(d) \geq k+1$, можно единственным образом представить в виде $d = \delta n$, где $\omega(\delta) = k+1$, а все простые делители n не превосходят наименьшего простого делителя числа δ : $P^+(n) < P^-(\delta)$. В силу этого, все рассматриваемое d — безквадратное, имеем: $\mu(d)f(d) = \mu(\delta n)f(\delta n) = \mu(\delta)f(\delta) \cdot \mu(n)f(n)$, так что целая сумма принимает вид:

$$\sum_{\substack{d|P \\ \omega(d) \geq k+1}} \mu(d)f(d) = \sum_{\substack{\delta|P \\ \omega(\delta) = k+1}} \mu(\delta)f(\delta) \sum_{\substack{n| \frac{P}{\delta} \\ P^+(n) < P^-(\delta)}} \mu(n)f(n) =$$

$$= (-1)^{k+1} \sum_{\substack{\delta|P \\ \omega(\delta) = k+1}} f(\delta) \prod_{\substack{p \in Q \\ p < P^-(\delta)}} (1 - f(p)), \text{ что и требовалось.}$$

с. 4а

Следствие. Пусть Q — произвольное конечное множество простых чисел, g — мультипликативная функция с условием $0 \leq g(p) < 1$ для всякого $p \in Q$. Тогда при любом целом $k \geq 1$ имеет место равенство

$$\sum_{\substack{d|P \\ \omega(d) \leq k}} \mu(d)g(d) = V + (-1)^k W,$$

в котором

$$V = \prod_{p \in Q} (1 - g(p)), \quad 0 \leq W \leq \frac{(e \frac{1}{V})^{k+1}}{(k+1)!}$$

До, Согласно лемме,

$$\sum_{\substack{d|P \\ \omega(d) \leq k}} \mu(d)g(d) = V + (-1)^k U, \text{ где}$$

$$U = \sum_{\substack{\delta|P \\ \omega(\delta) = k+1}} g(\delta) \prod_{\substack{p \in Q \\ p < P^-(\delta)}} (1 - g(p)).$$

Очевидно,

$$0 \leq U \leq \sum_{\omega(\delta) = k+1} g(\delta)$$

Положив там же U и V и W , получим;

$$\sum_{\substack{\delta | P \\ \omega(\delta) = k+1}} g^{(\delta)} \leq \frac{1}{(k+1)!} \left(\sum_{p \in Q} g^{(p)} \right)^{k+1}, \quad \text{Далее,}$$

$$- \varrho (1 - g(p)) = g(p) + \frac{g^2(p)}{2} + \frac{g^3(p)}{3} + \dots \geq g(p),$$

$$\text{так что } \sum_{p \in Q} g(p) \leq - \sum_{p \in Q} \varrho (1 - g(p)) = -\varrho \prod_{p \in Q} (1 - g(p)) \\ = -\varrho V = \varrho \frac{1}{V}, \quad \text{откуда}$$

$$0 \leq V \leq \frac{1}{(k+1)!} \left(\varrho \frac{1}{V} \right)^{k+1} \quad \text{Следствие доказано.}$$

Теорема 1 (упрощенное решение Бруна). Пусть для заданных A, P и z выполнены условия (g). Тогда для функции $S(A, P, z)$ справедлива формула

$$S(A, P, z) = X(V + O(V^{3/2})) + O(R),$$

$$\text{где } V = \prod_{\substack{p \leq z \\ p \in P}} (1 - g(p)), \quad R = \sum_{\substack{d | P(z) \\ d \in Q}} |A_d|, \quad \text{а константа } Q = z^{[4\varrho \frac{1}{V}] + 1}.$$

где в знаменателе O не превосходит единицы.

Доказ. Зададимся четным $k \geq 2$, четным $m \geq 1$ и возьмем в качестве $\lambda_d^\pm$, соответственно, функции

$$\lambda_d^+ = \begin{cases} \mu(d), & \omega(d) \leq k \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad \lambda_d^- = \begin{cases} \mu(d), & \omega(d) \leq m \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

В силу доказанного ранее,

$$S^-(A, P, z) \leq S(A, P, z) \leq S^+(A, P, z),$$

где

$$S^+ = S^+(A, P, z) = \sum_{d | P(z)} \lambda_d^+ |A_d| = \sum_{\substack{d | P(z) \\ \omega(d) \leq k}} \mu(d) |A_d|,$$

$$S^- = S^-(A, P, z) = \sum_{d | P(z)} \lambda_d^- |A_d| = \sum_{\substack{d | P(z) \\ \omega(d) \leq m}} \mu(d) |A_d|.$$

В силу сделанных предположений получим:

$$S^+ = \sum_{\substack{d|P(z) \\ \omega(d) \leq k}} \mu(d) \left(X g(d) + \sum_{\substack{d|P(z) \\ \omega(d) \leq k}} g(d) \varepsilon d \right) = X \sum_{\substack{d|P(z) \\ \omega(d) \leq k}} \mu(d) g(d) + \sum_{\substack{d|P(z) \\ \omega(d) \leq k}} g(d) \varepsilon d$$

Вторая сумма не превосходит некоторую величину

$$\sum_{\substack{d|P(z) \\ d \leq z^k}} |\varepsilon d| = R_1,$$

В силу следствия леммы 1, первая сумма не превосходит $V + W_1$, где

$$V = \prod_{\substack{p \leq z \\ p \in \mathcal{P}}} (1 - g(p)), \quad W_1 = \frac{1}{(k+1)!} \left(e \frac{1}{V} \right)^{k+1}.$$

Следовательно,

$$S^+ \leq X(V + W_1) + R_1.$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} S^- &= X \sum_{\substack{d|P(z) \\ \omega(d) \leq k}} \mu(d) g(d) + \sum_{\substack{d|P(z) \\ \omega(d) \leq m}} g(d) \varepsilon d \geq \\ &\geq X(V - W_2) - R_2, \end{aligned}$$

$$\text{где } W_2 = \frac{1}{(m+1)!} \left(e \frac{1}{V} \right)^{m+1}, \quad R_2 = \sum_{\substack{d|P(z) \\ d \leq z^m}} |\varepsilon d|.$$

Пусть теперь k и m — соответственно, четное и нечетное число из пары четных чисел

$$\left[4e \frac{1}{V} \right], \quad \left[4e \frac{1}{V} \right] + 1.$$

Тогда

$$z^k, z^m \leq z^{\left[4e \frac{1}{V} \right] + 1} = \mathcal{O}, \quad \text{откуда } R_1, R_2 \in \mathcal{O}.$$

Далее, в силу формулы Стирлинга

$$\begin{aligned} W_1 &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi(k+1)}} \left(\frac{e}{k+1} e \frac{1}{V} \right)^{k+1} \leq \left(\frac{e}{4} \right)^{k+1} \leq \left(\frac{e}{4} \right)^{4e \frac{1}{V}} \\ &= \left(\frac{1}{V} \right)^{4e \frac{e}{4}} = V \cdot 4e \frac{1}{e} < V \end{aligned}$$

(аналогичное неравенство выполняется и для W_2),
Теорема доказана.