

Применим простейшее решето Бруна (Теорема 1 лем-
ма 3) к конкретной задаче.

Теорема 1. Существует абсолютная постоянная $c > 0$ такая,
что при всех достаточно больших x для числа $\pi_2(x)$
простых делителей справедлива оценка:

$$\pi_2(x) \leq cx \left(\frac{e^{-\gamma}}{x} \right)^2.$$

D-во. Возьмем в качестве A последовательность
$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m(m+2) \text{ для неко-} \\ & \text{торого } m, 1 \leq m \leq x, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

в качестве P - все множество простых чисел.
Тогда для всякого $d \geq 1$ величина A_d будет равна
количеству чисел m , $1 \leq m \leq x$, удовлетворяющих срав-
нению
$$m(m+2) \equiv 0 \pmod{d}. \quad (1)$$

Если m_0 - его решение, то все числа $m_0 + d, m_0 + 2d, \dots$
также будут его решениями. Следовательно, доста-
точно найти число его решений с условием

$0 \leq m \leq d-1$. Обозначим это число через $\chi(d)$.
В силу китайской теоремы об остатках, $\chi(d)$ есть
мультипликативная функция, так что для бесконеч-
ного $d = p_1 \dots p_r$ имеем: $\chi(d) = \chi(p_1) \dots \chi(p_r)$.

Следовательно, достаточно рассмотреть $\chi(p)$ для
простых $p \geq 2$. Если $p = 2$, то, очевидно, $\chi(p) = 1$
($m = 0$ будет единственным решением). Если же
 $p \geq 3$, то разложим (по модулю p) решени-
я и будут $m \equiv 0 \pmod{p}$, $m \equiv -2 \pmod{p}$, т.е.
 $m = 0$ и $m = p-2$, так что $\chi(p) = 2$. Итак,

$$\chi(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p = 2, \\ 2, & \text{если } p \geq 3, \end{cases} \quad \chi(d) = 2^{\omega_1(d)},$$

где $\omega_1(d)$ - количество нечетных простых дели-

Телес d . Далее, промежуток $1 \leq m \leq x$ разобьем на $[\frac{x}{d}]$ промежутков длины d , каждый из которых содержит в точности $2^{\omega_1(d)}$ решений (1), и на промежуток $d[\frac{x}{d}] < m \leq x$ длины $< d$, содержащий не более $2^{\omega_1(d)}$ решений (1). Значит,

$$|A_d| = [\frac{x}{d}] \cdot 2^{\omega_1(d)} + \theta_1 \cdot 2^{\omega_1(d)}, \quad \text{где } 0 \leq \theta_1 \leq 1.$$

Узавлекаясь от знака целой части, получим:

$$|A_d| = \left(\frac{x}{d} - \left\{ \frac{x}{d} \right\} \right) 2^{\omega_1(d)} + \theta_1 \cdot 2^{\omega_1(d)} =$$

$$= x \frac{2^{\omega_1(d)}}{d} + \theta \cdot 2^{\omega_1(d)}, \quad \text{где } \theta = \theta_1 - \left\{ \frac{x}{d} \right\},$$

так что $-1 \leq \theta \leq 1$. Итак, условие (g) выполнено с $g(d) = \frac{2^{\omega_1(d)}}{d}$, $\tau_d = \theta \cdot 2^{\omega_1(d)}$.

Соответственно,

$$V = \prod_{p \leq x} \left(1 - g(p) \right) = \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{2^{\omega_1(p)}}{p} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \prod_{3 \leq p \leq x} \left(1 - \frac{2}{p} \right).$$

Заметим следующее:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2}{p} \right) &= \left(1 - \frac{1}{p} \right)^2 \left(1 - \frac{1}{p} \right)^{-2} \left(1 - \frac{2}{p} \right) = \left(1 - \frac{1}{p} \right)^2 \cdot \\ &\cdot \frac{1 - \frac{2}{p}}{\left(1 - \frac{1}{p} \right)^2} = \left(1 - \frac{1}{p} \right)^2 \cdot \frac{1 - \frac{2}{p}}{1 - \frac{2}{p} + \frac{1}{p^2}} = \left(1 - \frac{1}{p} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{p^2(1 - \frac{2}{p})}} \\ &= \left(1 - \frac{1}{p} \right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{p(p-2)}}. \quad \text{Значит,} \end{aligned}$$

$$V = \frac{1}{2} \prod_{3 \leq p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p} \right)^2 \cdot \prod_{3 \leq p \leq x} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)} \right)^{-1} =$$

$$= 2 \prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \cdot \prod_{p \geq 3} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right)^{-1} \prod_{p \geq z} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right).$$

Несложно видеть, что последнее произведение не превосходит

$$\exp \left\{ \sum_{p \geq z} \frac{1}{p(p-2)} \right\} < \exp \left\{ \sum_{p \geq z} \frac{1}{p(p-2)} \right\} <$$

$$< \exp \left\{ \sum_{n \geq z} \frac{1}{(n-1)(n-2)} \right\} = \exp \left\{ \sum_{n \geq z} \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} \right) \right\} <$$

$$< \exp \left\{ \frac{1}{z-2} \right\} < 1 + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{z-2} \right)^2 + \dots < 1 + \frac{2}{z},$$

и в то же время оценивается снизу единицей.

Таким

$$V = 2 \prod_{p \geq 3} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right)^{-1} \left(1 + \frac{2\theta}{z}\right) \left\{ \frac{e^{-\theta}}{a z} (1 + O(e^{-c\sqrt{a z}})) \right\}$$

$$= \frac{a}{(a z)^2} \left(1 + \frac{2\theta}{z}\right) (1 + O(e^{-c\sqrt{a z}})) =$$

$$= \frac{a}{(a z)^2} (1 + O(e^{-c\sqrt{a z}})), \text{ где}$$

$$a = 2e^{-2\theta} \prod_{p \geq 3} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right)^{-1}.$$

Следовательно, $\frac{1}{V} = \frac{1}{a} (a z)^2 (1 + O(e^{-c\sqrt{a z}})),$

$$a \frac{1}{V} = 2a a z + a \frac{1}{a} + O(e^{-c\sqrt{a z}}),$$

$$\mathfrak{D} = z^{[4a \frac{1}{V}] + 1} \leq \exp \left\{ (a z) (8a a z + 4a \frac{1}{a} + O(\cdot)) \right\}$$

$$< \exp \{ g(a z) a a z \}$$

Выбирая $z = \exp \left(\frac{1}{10} \frac{a x}{a a x} \right)$, получим:

$$\mathfrak{D} < \exp \left\{ \frac{g}{10} \cdot \frac{a x}{a a x} - a a x \right\} = x^{\frac{g}{10}},$$

поэтому $R \leq \sum_{d \in \mathfrak{D}} |z_d| \leq \sum_{d \in \mathfrak{D}} 2^{\omega(d)} \leq \sum_{d \in \mathfrak{D}} 2^{\omega(d)} \leq$

$$\leq \sum_{d \leq \sqrt{x}} \tau(d) \ll \mathcal{O}(\sqrt{x}) \ll x^{\frac{1}{2}} \ll x. \quad \text{Окончательно получим}$$

$$S(A, P, z) = x(V + O(V^{3/2})) + O(R) = \frac{ax}{(Rz)^2} (1 + O(e^{-c\sqrt{Rz}}))$$

$$= O\left(\frac{x}{(Rz)^3}\right) + O\left(x^{\frac{9}{10}} \ll x\right) = \frac{ax}{(Rz)^2} + O\left(\frac{x}{(Rz)^3}\right) =$$

$$= 10^2 a \frac{x}{(Rz)^2} (Rz)^2 + O\left(x \left(\frac{Rz}{Rz}\right)^3\right).$$

ко сумма $S(A, P, z)$ есть количество целых чисел m , $1 \leq m \leq x$, таких, что оба числа $m, m+2$ не делятся на простые числа, не превосходящие z , R и x число, очевидно, содержат и все простые близнецов p , $z < p \leq x$. Значит,

$$\pi_2(x) - \pi_2(z) \leq S(A, P, z) = 10^2 a x \left(\frac{Rz}{Rz}\right)^2 + O\left(x \left(\frac{Rz}{Rz}\right)^3\right).$$

откуда $\pi_2(x) \leq 10^2 a x \left(\frac{Rz}{Rz}\right)^2 + O\left(x \left(\frac{Rz}{Rz}\right)^3\right),$

что и требовалось.

Следствие. Ряд $\sum_p' \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p+2}\right)$, составленный из обратных и простым близнецам, конечно либо сходится.

Доказ. Возлагая сумму ряда через S , будем иметь:

$$\begin{aligned} S &\leq \sum_p' \frac{2}{p} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{2 < p \leq x} \frac{1}{p} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi_2(x)}{x} - \int_2^x \frac{\pi_2(u)}{u^2} du \right) = \\ &= \int_2^{+\infty} \frac{\pi_2(u)}{u^2} du \leq c \int_2^{+\infty} \frac{u \left(\frac{Rz}{Rz}\right)^2}{u^2} du = c \int_2^{+\infty} \frac{(Rz)^2}{u(Rz)^2} du \end{aligned}$$

$< +\infty$, что и требовалось.

Замечание. Сумма ряда S называется константой Брунса

Её приближенное значение равно предположительно 1.902160583104... (покадровое 10^{16} пер. битов)

Гораздо более точные верхние оценки получаются с помощью Т.к. решётки Бруна - Херм. В первоначальном решётке Бруна в качестве носителя функции λ_d^+ брались все делители d числа $P(z) = \prod_{p \in z, p \in P} p$, у которых число простых сомножителей канонического разложения $\omega(d)$ не превосходило некоторого заданного числа c . Теперь на носитель λ_d^+ накладываются более сильные ограничения.

Предположим, что множество простых чисел p , лежащих в P и не превосходящих z , разбито на непересекающиеся подмножества:

$$P \cap (1, z] = P_1 \sqcup P_2 \sqcup \dots \sqcup P_t.$$

Тогда всякий делитель d числа $P(z)$ единственным образом разлагается в произведение $d = d_1 \dots d_t$, где d_n либо равно 1, либо состоит из всех простых делителей числа d , принадлежащих множеству P_n . Полагая $P_n = \prod_{p \in P_n} p$, будем, следовательно, иметь: $d_n | P_n$ для всякого n , и

$$\mu(d) = \mu(d_1) \dots \mu(d_t).$$

Очевидно также, что для всякого $n \geq 1$ справедливо равенство $(n, P(z)) = (n, P_1) \dots (n, P_t)$. Следовательно,

$$\sum_{d | (n, P(z))} \mu(d) = \prod_{n=1}^t \sum_{d_n | (n, P_n)} \mu(d_n).$$

Пусть теперь $k_1, \dots, k_t \geq 2$ - произвольные целые числа. Тогда, как было установлено ранее,

$$\sum_{d_n | (n, P_n)} \mu(d_n) \leq \sum_{\substack{d_n | (n, P_n) \\ \omega(d_n) \leq k_n}} \mu(d_n), \quad n = 1, \dots, t.$$

Так как все члены последнего неравенства неотрицательны, то перемножив их, получим:

$$\begin{aligned} \sum_{d | (n, P(z))} \mu(d) &= \prod_{n=1}^t \sum_{d_n | (n, P_n)} \mu(d_n) \leq \prod_{n=1}^t \sum_{\substack{d_n | (n, P_n) \\ \omega(d_n) \leq k_n}} \mu(d_n) = \\ &= \sum_{\substack{d_n | (n, P_n), \omega(d_n) \leq k_n \\ n=1, \dots, t}} \mu(d_1) \dots \mu(d_t) \end{aligned}$$

Средователно, когато $d \mid P(z)$

$$\lambda_d^+ = \begin{cases} \mu(d_1 \dots d_t), & \text{еко } d = d_1 \dots d_t \text{ и } \omega(d_m) \leq k_m \\ & \text{еко } 1 \leq m \leq t, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

поэтому:

$$\sum_{d \mid (n, P(z))} \mu(d) \leq \sum_{d \mid (n, P(z))} \lambda_d^+$$

для всякого $n \geq 1$.

Таким образом, при формальном "условии g "

$$S(A, P, z) = \sum_{\substack{n \in A \\ (n, P(z))=1}} a_n = \sum_{n \in A} a_n \sum_{d \mid (n, P(z))} \mu(d) \leq$$

$$\leq \sum_{n \in A} a_n \sum_{d \mid (n, P(z))} \lambda_d^+ = \sum_{d \mid P(z)} \lambda_d^+ |A_d| =$$

$$= \sum_{\substack{d_1 \mid P_1 \\ \omega(d_1) \leq k_1}} \dots \sum_{\substack{d_t \mid P_t \\ \omega(d_t) \leq k_t}} \mu(d_1) \dots \mu(d_t) |A_{d_1 \dots d_t}| =$$

$$= \sum_{\substack{d_1 \mid P_1 \\ \omega(d_1) \leq k_1}} \dots \sum_{\substack{d_t \mid P_t \\ \omega(d_t) \leq k_t}} \mu(d_1) \dots \mu(d_t) (X g(d_1) \dots g(d_t) + \varepsilon_{d_1 \dots d_t})$$

$$= X \left(\sum_{\substack{d_1 \mid P_1 \\ \omega(d_1) \leq k_1}} \mu(d_1) g(d_1) \right) \dots \left(\sum_{\substack{d_t \mid P_t \\ \omega(d_t) \leq k_t}} \mu(d_t) g(d_t) \right) + R =$$

$$= X \sum_1 \dots \sum_t + \theta, \text{ где сумм обозначения } \sum_m \text{ архивен,}$$

$$\theta = \sum_{\substack{d_1 \mid P_1 \\ \omega(d_1) \leq k_1}} \dots \sum_{\substack{d_t \mid P_t \\ \omega(d_t) \leq k_t}} \varepsilon_{d_1 \dots d_t} \mu(d_1 \dots d_t).$$

поэтому $Y_m = \sum_{d \mid P_m} \mu(d) g(d) = \prod_{p \in P_m} (1 - g(p))$, в силу

средства lemma 1 получим 3. θ имеет место:

$$0 < Y_m \leq \sum_m \leq Y_m + \frac{1}{(k_m+1)!} \left(e \frac{1}{Y_m} \right)^{k_m+1},$$

преобразуем правую часть неравенства; получим:

$$\sum_m \leq Y_m \left(1 + \frac{Y_m^{-1}}{(k_m+1)!} \left(e \frac{1}{Y_m} \right)^{k_m+1} \right) =$$

$$= V_m \left(1 + \frac{e^{\frac{1}{V_m}}}{(k_m+1)!} \left(\frac{1}{V_m} \right)^{k_m+1} \right) = V_m \left(1 + \frac{e^{L_m} L_m^{k_m+1}}{(k_m+1)!} \right),$$

где $L_m = \frac{1}{V_m}$, используя неравенство $1+x \leq e^x$, получим:

$$\Sigma_m \leq V_m \exp \left(\frac{e^{L_m} L_m^{k_m+1}}{(k_m+1)!} \right), \quad m=1, \dots, t.$$

До некоторого момента множество P_m было произвольным, для дальнейшего нам потребуется сделать некоторые предположения относительно k_m . Именно, пусть $\max_{p \in P_m} p \leq z_m$, где $z_1, \dots, z_t$ — некоторые числа, $2 \leq z_1, \dots, z_t \leq z$. Тогда для всякого m имеем:

$$d_m = \prod_{p|d_m, p \in P_m} p \leq z_m^{\omega(d_m)} \leq z_m^{k_m},$$

Следовательно, для всякого рассматриваемого d имеем $d = d_1 \dots d_t \leq z_1^{k_1} \dots z_t^{k_t} = \mathfrak{D}$.

$$\text{Итак, } S(A, \mathfrak{P}, z) \leq XV(z)e^E + R, \quad \text{где}$$

$$V(z) = V_1 \dots V_t = \prod_{p \in \mathfrak{P}, p \leq z} (1 - g(p)),$$

$$E = \sum_{m=1}^t \frac{e^{L_m} L_m^{k_m+1}}{(k_m+1)!}, \quad R = \sum_{\substack{d|P(z) \\ d \leq \mathfrak{D}}} |Z_d|.$$

Для дальнейшего работы с этим общим неравенством необходимы дополнительные предположения относительно функции g . Именно, будем считать, что существуют положительные постоянные B и α такие, что для любых $u < v$ справедливы

$$\frac{z}{2} \leq u < v \quad \text{выполнена оценка}$$

$$\prod_{u < p \leq v} (1 - g(p))^{-1} \leq B \left(\frac{v}{u} \right)^\alpha \quad (1)$$

Это означает, грубо говоря, что $g(p) \leq \frac{\alpha}{p}$ "в среднем" (по p).

Далее, для большинства применений подходящий оказывается выбор параметра z_m в виде

$$z_1 = z, \quad z_2 = \sqrt{z_1} = z^{2^{-1}}, \quad z_3 = \sqrt{z_2} = z^{2^{-2}}, \dots, \text{ и вообще,}$$

$$z_m = \sqrt{z_{m-1}} = z^{2^{1-m}}, \quad m \leq t,$$

где целое t определяется из условий

$$z_{t+1} < 2 \leq z_t, \quad \text{или, что то же, условия}$$

$$\log_2 \log_2 z < t \leq \log_2 \log_2 z + 1$$

(действительно, имеем:

$$z^{\frac{1}{2^t}} < 2 \leq z^{\frac{1}{2^{t-1}}}, \quad \frac{e z}{2^t} < e z \leq \frac{e z}{2^{t-1}},$$

$$2^{t-1} \leq \log_2 z < 2^t, \quad t-1 \leq \log_2 \log_2 z < t).$$

При этом полагают $P_m = P \cap (z_{m+1}, z_m]$. Если выполнены условия (1), то тогда

$$L_m = e \frac{1}{V_m} = e \prod_{p \in P_m} (1 - g(p))^{-1} \leq e \left\{ B \left(\frac{e z_m}{e z_{m+1}} \right)^\alpha \right\} =$$

$$= e \left\{ B \left(\frac{2^{1-m} e z}{2^{-m} e z} \right)^\alpha \right\} = e \{ B \cdot 2^\alpha \} = L$$

наконец, зафиксируем некоторое целое число θ , $\theta \geq 2$, и для всякого m , $1 \leq m \leq t$, положим $k_m = \theta + 2(m-1)$.

Тогда

$$E = \sum_{m=1}^t \frac{e^{L_m} L_m^{k_m+1}}{(k_m+1)!} \leq \sum_{m=1}^t \frac{e^L L^{\theta+2(m-1)+1}}{(\theta+2(m-1)+1)!} =$$

$$= e^L \sum_{m=1}^t \frac{L^{\theta+2m-1}}{(\theta+2m-1)!} = \frac{e^L L^\theta}{\theta!} \sum_{m=1}^t \frac{L^{2m-1} \theta!}{(\theta+2m-1)!}$$

имеем, далее:

$$\frac{\theta!}{(\theta+2m-1)!} = \frac{\theta! (2m-1)!}{(\theta+2m-1)!} \cdot \frac{1}{(2m-1)!} = \frac{\left(C_{\theta+2m-1}^\theta \right)^{-1}}{(2m-1)!} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\theta+1} \cdot \frac{1}{(2m-1)!}, \quad \text{так что}$$

$$E \leq \frac{e^L L^\theta}{(\theta+1)!} \sum_{m=1}^t \frac{L^{2m-1}}{(2m-1)!} < \frac{e^L L^\theta}{(\theta+1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L^n}{n!} < \frac{e^{2L} L^\theta}{(\theta+1)!} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(b+1)!} \exp(2a(B \cdot 2^x)) a^b(B \cdot 2^x) = \frac{(B \cdot 2^x)^2 a^b(B \cdot 2^x)}{(b+1)!} =$$

$$= \frac{B^2 \cdot 2^{2x} a^b(B \cdot 2^x)}{(b+1)!} = c_1.$$

Канонич., $\frac{k_m}{2^{m-1}} = \frac{1}{2^{m-1}} (b + 2^{(m-1)})$, откуда

$$z_m = z_m^{\frac{k_m}{2^{m-1}}} = z^{\frac{1}{2^{m-1}} (b + 2^{(m-1)})}$$

$$\mathcal{D} = z_1^{k_1} \dots z_t^{k_t} \leq z^c, \quad c = \sum_{m=1}^t \frac{b + 2^{(m-1)}}{2^{m-1}} = 2b + 4, \text{ т.е.}$$

$$\mathcal{D} \leq z^{2b+4}.$$

Собирая полученные результаты вместе, приходим к следующему общему утверждению:

Теорема 2 (лемма Бруна - Хелм). Пусть для тройки A, P, z выполнены "условия", причем функции g при некоторых $B, x > 0$ удовлетворяет условию $\frac{3}{2} \leq u < v$ неравенству

$$\prod_{u < p \leq v} (1 - g(p))^{-1} \leq B \left(\frac{v}{u} \right)^x.$$

Тогда для произвольного целого числа $b \geq 2$ справедливы оценки:

$$S(A, P, z) \leq c_1 X V(z) + R,$$

где $V(z) = \prod_{\substack{p \leq z \\ p \in P}} (1 - g(p))$, $R = \sum_{\substack{d | P(z) \\ d \leq z^{2b+4}}} |z_d|$,

$$c_1 = c_1(b; B, x) = \frac{B^2 \cdot 2^{2x} a^b(B \cdot 2^x)}{(b+1)!}$$