НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ. ПРИЛОЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ

А.Г.Сергеев

3 апреля 2020

ЛЕКЦИЯ 3

2.3. Псевдодифференциальные операторы

Псевдодифференциальные операторы являются обобщением обычных дифференциальных операторов. Напомним, что *дифференциальный оператор* порядка d в области $U \subset \mathbb{R}^n$ задается дифференциальным выражением вида

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \le d} a_\alpha(x) D^\alpha$$

с коэффициентами $a_\alpha(x)$, являющимися гладкими функциями в области U. Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ – мультииндекс $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ с неотрицательными целыми компонентами, а $D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = -i\partial/\partial x_j$. Пользуясь преобразованием Фурье, этот оператор можно переписать в виде

$$P(x, D)f = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x, \xi) f(y)\, dy\, d\xi, \tag{1}$$

где

$$p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \le d} a_\alpha(x) \xi^\alpha$$

есть *символ* оператора $P(x, D)$.

Для того, чтобы перенести последнее определение на псевдодифференциальные операторы, расширим предварительно класс допустимых символов. А именно, введем класс *символов* $S^d(U)$ порядка d, который состоит из функций $p(x, \xi) \in C^\infty(U \times \mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих на любом компакте $K \subset U$ следующей оценке: для любых мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n$

$$\left| D_x^\beta D_\xi^\alpha p(x, \xi) \right| \le C \left(1 + |\xi|^2\right)^{\frac{d - |\alpha|}{2}}$$

для всех $x \in K$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ с константой C, зависящей от α, β и K.

Определение 1. *Псевдодифференциальным оператором* порядка d в области $U \subset \mathbb{R}^n$ называется оператор P, задаваемый формулой (1) с символом $p \in S^d(U)$. Пространство всех таких операторов обозначается через $\Psi^d(U)$.

Непосредственно из определения следует, что оператор P корректно определен как линейный оператор, действующий непрерывно из пространства $\mathcal{D}(U)$ C^∞-гладких функций с компактными носителями в U в пространство $\mathcal{E}(U) \equiv C^\infty(U)$ C^∞-гладких функций в области U. По двойственности он продолжается до непрерывного линейного оператора $P : \mathcal{E}'(U) \to \mathcal{D}'(U)$, действующего на обобщенных функциях с компактными носителями в области U. Если, в частности, $U = \mathbb{R}^n$, то такой оператор продолжается до непрерывного линейного оператора, действующего в пространстве Шварца $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ медленно растущих обобщенных функций.

Ядром оператора P является обобщенная функция $k \in \mathcal{D}'(U \times U)$, задаваемая интегралом

$$k(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} p(x, \xi)\, d\xi,$$

понимаемым в смысле обобщенных функций. Заметим, что ядро k является гладким вне диагонали в $U \times U$. Если $k \in C^\infty(U \times U)$, то определяемый им псевдодифференциальный оператор называется *сглаживающим*, а его порядок полагается равным $-\infty$. Такой оператор продолжается до непрерывного линейного отображения из $\mathcal{E}'(U)$ в $\mathcal{E}(U)$.

Символы псевдодифференциальных операторов удобно задавать разложениями в асимптотические ряды. А именно, какова бы ни была последовательность символов $\{p_k\}_{k=0}^\infty$, $p_k \in S^{d_k}(U)$, где $\{d_k\}$ – убывающая последовательность вещественных чисел с $d_k \to -\infty$ при $k \to \infty$, существует символ $p \in S^{d_0}(U)$ такой, что

$$p - \sum_{k=0}^{n-1} p_{d_k} \in S^{d_n}(U) \quad \text{для всех } n = 0, 1, \dots,$$

причем этот символ определен однозначно по модулю пространства $S^{-\infty}(U)$ сглаживающих символов. В этом случае принято писать, что $p \sim \sum_{k=0}^\infty p_{d_k}$.

Стандартным примером являются т.н. *классические символы*, для которых показатели $d_k = d-k$, а $p_k(x, \xi)$ являются однородными функциями по ξ порядка d_k. Асимптотическое разложение символа принимает в этом случае вид

$$p(x, \xi) \sim \sum_{k=0}^\infty p_{d-k}(x, \xi).$$

Главный член $p_d(x, \xi)$ в этом разложении называется *главным символом*.

Псевдодифференциальные операторы образуют алгебру, о свойствах которой можно прочесть в книгах [12],[35]. Для нас наибольший интерес представляют эллиптические операторы, которые определяются следующим образом.

Определение 2. Псевдодифференциальный оператор $P \in \Psi^d(U)$ называется *эллиптическим*, если найдутся положительные непрерывные функции c и C в области U, для которых символ оператора P удовлетворяет оценке

$$|p(x,\xi)| \geq c(x)|\xi|^d \quad \text{при } |\xi| \geq C(x), x \in U.$$

Эллиптические псевдодифференциальные операторы обратимы по модулю сглаживающих, точнее, имеет место следующее

Предложение 1. *Псевдодифференциальный оператор $P \in \Psi^d(U)$ является эллиптическим тогда и только тогда, когда существует символ $q \in S^{-d}(U)$ такой, что отвечающий ему оператор $Q \in \Psi^{-d}(U)$ удовлетворяет соотношению*

$$P \circ Q = Q \circ P \equiv 1 \ mod \ \Psi^{-\infty}(U).$$

Для того, чтобы перенести определение псевдодифференциальных операторов на многообразия, необходимо изучить их поведение относительно замен, порождаемых гладкими диффеоморфизмами. Пусть $\varphi : U \to V$ есть диффеоморфизм области $U \subset \mathbb{R}^n$ на другую область $V \subset \mathbb{R}^n$. Если $P \in \Psi^d(U)$ – псевдодифференциальный оператор порядка d в области U, то формула

$$\varphi_* P(f) := P(\varphi^* f) \circ \varphi^{-1}$$

определяет псевдодифференциальный оператор в области V. На самом деле, справедливо следующее

Предложение 2. *Пусть оператор $P \in \Psi^d(U)$ обладает следующим свойством псевдолокальности: как сам оператор P, так и сопряженный к нему оператор P^*, отображают пространство $\mathcal{E}'(U)$ в себя. Тогда для заданного диффеоморфизма $\varphi : U \to V$ оператор $P_\varphi := \varphi_* P$ принадлежит $\Psi^d(V)$ и обладает тем же свойством псевдолокальности. Кроме того, символ p_φ этого оператора имеет асимптотическое разложение вида*

$$p_\varphi(x,\xi) \sim \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{1}{\alpha!} q_\alpha(x,\xi) D_\xi^\alpha(\psi(x), {}^t(\psi'(x)^{-1})\xi),$$

где $\psi := \varphi^{-1}$, $q_0(x,\xi) = 1$, а $q_\alpha(x,\xi)$ – полином по ξ степени$\leq \frac{1}{2}|\alpha|$.

Явные выражения для коэффициентов $q_\alpha(x,\xi)$ можно найти в [12], том III, теорема 18.1.17. Отметим только, что для главного символа $p_{\varphi,d}(x,\xi)$ формула замены переменных имеет вид

$$p_{\varphi,d}(\varphi(x),\xi) = p_d(x, {}^t\varphi'(x)\xi).$$

С учетом этого предложения мы можем определить псевдодифференциальные операторы на компактном многообразии (заметим, что эти операторы будут автоматически удовлетворять условию псевдолокальности из предыдущего предложения).

Определение 3. Пусть M есть компактное многообразие. Линейный оператор $P : \mathcal{D}(M) \to C^\infty(M)$ называется *псевдодифференциальным оператором* порядка d, если его ядро является гладким вне диагонали в $M \times M$ и для любой координатной карты (U, φ) оператор $\varphi_* P$, действующий из $\mathcal{D}(\varphi(U))$ в $C^\infty(\varphi(U))$, является псевдодифференциальным оператором из пространства $\Psi^d(\varphi(U))$. Такой оператор называется *классическим*, если все его локальные выражения являются псевдодифференциальными операторами с классическими символами.

Из приведенной выше формулы замены переменных в главном символе следует, что он инвариантно определен как функция на кокасательном расслоении $T^*M \to M$. Эллиптические псевдодифференциальные операторы определяются как операторы, локальные выражения которых являются эллиптическими операторами.

2.4. Вычет Водзицки и теорема Конна о следе

Важность следа Диксмье объясняется тем, что он корректно определен для широкого класса псевдодифференциальных операторов и совпадает в этом случае с вычетом Водзицки.

Прежде, чем перейти к определению указанного вычета, приведем несколько вспомогательных фактов об однородных функциях и формах на кокасательном расслоении гладкого многообразия.

Пусть M – гладкое компактное многообразие размерности $n > 1$ и T^*M – его кокасательное расслоение с локальными координатами (x, ξ), где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – локальные координаты на M, а $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ – координаты в слое $T^*_x M$. Обозначим через σ_ξ дифференциальную $(n-1)$-форму на $\mathbb{R}^n \setminus 0$ вида

$$\sigma_\xi := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \xi_j d\xi_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\xi_j} \wedge \ldots \wedge d\xi_n,$$

где "шляпка" над $d\xi_j$ означает, что этот член должен быть пропущен. Форма σ_ξ совпадает с внутренним произведением $\sigma_\xi = E \lrcorner\, d^n\xi$ формы объема $d^n\xi = d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_n$ и эйлерова векторного поля $E = \sum_{j=1}^n \xi_j \partial/\partial\xi_j$. Сужение σ_ξ на $T^*_x M$, $x \in M$, задает плотность (см. ниже) $|\sigma_\xi|$ на единичной сфере $S^{n-1} = \{|\xi| = 1\}$.

Свойство 1: для любой однородной функции $p_{-n}(\xi)$ порядка однородности $-n$ форма $p_{-n}\sigma_\xi$ на пространстве $\mathbb{R}^n \setminus 0$ замкнута.

Из этого свойства следует, что в интеграле вида

$$\int_{S^{n-1}} p_{-n}|\sigma_\xi|$$

можно заменить интегрирование по единичной сфере S^{n-1} интегралом по любому гомологичному циклу и, в частности, по любому сечению расслоения $\mathbb{R}^n \setminus 0 \to S^{n-1}$.

Напомним, что по теореме Эйлера для однородных функций f степени однородности λ имеет место тождество

$$\frac{1}{n+\lambda}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(\xi_j f)}{\partial \xi_j} = \frac{1}{n+\lambda}(nf + Ef) = f.$$

При $\lambda = -n$ это утверждение теряет смысл и заменяется следующим свойством.

Свойство 2: интеграл $\int_{S^{n-1}} p_{-n}|\sigma_\xi|$ обращается в нуль в том и только в том случае, когда функция p_{-n} является суммой производных.

Для формулировки теоремы Водзицки нам понадобится еще понятие плотности на многообразии. В случая вещественного векторного пространства V размерности n *плотностью* на V называется непрерывное отображение $\lambda : V^n \to \mathbb{R}$, обладающее свойством:

$$\lambda(Av_1, \ldots, Av_n) = |\det A|\lambda(v_1, \ldots, v_n)$$

для всех $v_1, \ldots, v_n \in V$, $A \in \operatorname{End} V$. Если ω – форма объема на V, то она определяет плотность $|\omega|$ на V по формуле: $|\omega|(v_1, \ldots, v_n) := |\omega(v_1, \ldots, v_n)|$.

Точно также на произвольном римановом многообразии M с римановой метрикой g существует единственная плотность $|\nu_g|$, принимающая значение 1 на всех ортонормированных базисах касательных пространств T_xM, $x \in M$. Если векторы $v_1, \ldots, v_n \in T_xM$, то

$$|\nu_g|(v_1, \ldots, v_n) = |\det(g_x(v_i, v_j))|^{1/2}.$$

Такую плотность естественно называть *римановой*.

Пользуясь римановой плотностью, можно ввести понятие интеграла, являющегося линейной формой на пространстве плотностей на M, инвариантной относительно диффеоморфизмов и совпадающей с интегралом Лебега на локальных картах.

Перейдем теперь к определению вычета Водзицки.

Теорема 1 (Водзицки)**.** *Пусть на гладком компактном многообразии M размерности n задан классический псевдодифференциальный оператор P. Тогда на M существует плотность $res_x P$, локальные выражения которой имеют вид*

$$res_x P = \left(\int_{|\xi|=1} p_{-n}(x,\xi)|\sigma_\xi| \right) |d^n x|. \tag{2}$$

Интеграл от этой плотности называется вычетом Водзицки оператора P:

$$Res\, P := \int_M res_x P. \tag{3}$$

Доказательство. Из формулы замены переменных в псевдодифференциальных операторах мы знаем, что под действием диффеоморфизма $\varphi : U \to V$ из области $U \subset \mathbb{R}^n$ на область $V \subset \mathbb{R}^n$ псевдодифференциальный оператор $P \in \Psi^d(U)$ преобразуется в псевдодифференциальный оператор $\varphi_* P \in \Psi^d(V)$. При этом символ $p(x,\xi)$ оператора P переходит в символ $p_\varphi(x,\xi) =: \tilde{p}(x,\xi)$ оператора $\varphi_* P$, задаваемый формулой

$$\tilde{p}(x, {}^t\psi'(x)\eta) = \sum_\alpha c_\alpha(x,\eta)\partial_\eta^\alpha p(\psi(x),\eta),$$

в которой $\xi = {}^t\psi'(x)\eta$ с $\psi := \varphi^{-1}$, $c_0(x,\eta) = 1$, а другие коэффициенты $c_\alpha(x,\eta)$ являются полиномами по η. Это означает, в частности, что коэффициент $\tilde{p}_{-n}(x, {}^t\psi'(x)\eta)$ отличается от коэффициента $p_{-n}(\psi(x),\eta)$ на сумму членов, являющихся производными по ξ.

Посмотрим теперь, как изменяется интеграл $\int_{|\xi|=1} p_{-n}(x,\xi)|\sigma_\xi|$ под действием невырожденных линейных замен по переменной ξ и фиксированном x. Пусть такая замена задается отображением h. Нетрудно видеть, что $h^*\sigma_\xi = (\det h)\sigma_{h\xi}$.

Заметим, что интеграл по сфере $S = \{\xi : \ |\xi| = 1\}$ от формы $p_{-n}|\sigma_\xi|$ совпадает (с точностью до знака) с интегралом от этой формы по образу $h(S)$:

$$\int_S p_{-n}(x,\xi)|\sigma_\xi| = \pm \int_{h(S)} p_{-n}(x,\xi),$$

поскольку $h(S)$ гомологично S (знак "плюс" отвечает случаю, когда h сохраняет ориентацию, знак "минус" ставится в противоположном случае). Поэтому

$$\int_S p_{-n}(x,\xi)|\sigma_\xi| = \pm \int_S h^*\left(p_{-n}(x,\xi)|\sigma_\xi|\right) = |\det h| \int_S p_{-n}(x,h\xi)|\sigma_{h\xi}|.$$

Полагая $y := \psi(x)$, $\xi = {}^t\psi'(x)\eta$, получим следующую формулу для преобразованного вычета:

$$\int_{|\xi|=1} \tilde{p}(x,\xi)|\sigma_\xi||d^n x| = |\det\psi'(x)| \int_{|\eta|=1} \tilde{p}_{-n}(x, {}^t\psi'(x)\eta)|\sigma_\eta||d^n x| =$$
$$\int_{|\eta|=1} \tilde{p}_{-n}(x, {}^t\psi'(x)\eta)|\sigma_\eta||d^n y| = \int_{|\eta|=1} p_{-n}(y,\eta)|\sigma_\eta||d^n y|,$$

где мы воспользовались тем, что циклы $|\xi| = 1$ и $|\eta| = 1$ гомологичны друг другу при фиксированном x и члены, состоящие из производных, не дают вклада в последний интеграл. Из приведенной выкладки следует, что плотность $\mathrm{res}_x P$ корректно определена, так что интеграл от нее не зависит от выбора локальных координат. □

Вычислим в качестве примера вычет Водзицки для оператора Лапласа-Бельтрами на компактном римановом многообразии.

Пусть $P = \Delta$ есть оператор Лапласа–Бельтрами на компактном римановом n-мерном многообразии (M, g). Тогда

$$\mathrm{Res}\,\Delta^{-n/2} = \Omega_n,$$

где $\Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ – площадь поверхности сферы S^{n-1}.

Действительно, так как Δ есть оператор второго порядка, то $\Delta^{-n/2}$ имеет порядок $-n$, а его главный символ имеет вид $(g^{ij}(x)\xi_i\xi_j)^{-n/2}$, где (g_{ij}) – метрический тензор многообразия M, (g^{ij}) – матрица, обратная к (g_{ij}). После замены $y = \psi(x)$, $\xi = {}^t\psi'(x)\eta$, в которой $\psi'(x) = (\det g)^{1/2}$, главный символ превратится в $|\eta|^{-n}$, а плотность вычета будет равна

$$\mathrm{res}_x P = \Omega_n|d^n y| = \Omega_n \det\psi'(x)|d^n x| = \Omega_n|\nu_g|,$$

где $|\nu_g|$ – риманова плотность. Отсюда следует, что $\mathrm{Res}\,\Delta^{-n/2} = \Omega_n$.

Обозначим через $\mathcal{P}(M)$ фактор-алгебру классических псевдодифференциальных операторов на многообразии M по идеалу сглаживающих операторов. Еще одна теорема Водзицки (доказательство которой можно найти в книге [11], теорема 7.6) утверждает, на алгебре $\mathcal{P}(M)$ (при $n > 1$) существует единственный след (с точностью до умножения на ненулевую константу), задаваемый вычетом Водзицки. Тем самым, вычет Водзицки должен совпадать (с точностью до константы) с введенным ранее следом Диксмье.

Это утверждение составляет содержание *теоремы Конна о следе*.

Теорема 2. *Пусть P – эллиптический псевдодифференциальный оператор порядка $-n$ на компактном римановом многообразии (M, g). Тогда оператор P принадлежит пространству $\mathcal{L}^{1,\infty}$ и измерим, а его след Диксмье связан с вычетом Водзицки формулой:*

$$Tr^+ P = \frac{1}{n(2\pi)^n} Res\, P. \tag{4}$$

Доказательство этой теоремы можно найти в оригинальной монографии Конна [9] и книге [11], теорема 7.18.

Из нее вытекает

Следствие 1. *Для произвольной гладкой функции $a \in C^\infty(M)$ имеет место равенство*

$$\int_M a(x)|\nu_g| = \frac{n(2\pi)^n}{\Omega_n} Tr^+(a\Delta_g^{-n/2}).$$

Действительно, $a\Delta^{-n/2}$ есть псевдодифференциальный оператор порядка $-n$ с главным символом $a_{-n}(x,\xi) := a(x)(g^{ij}\xi_i\xi_j)^{-n/2}$, поэтому плотность вычета Водзицки для него имеет вид

$$\mathrm{res}_x(a\Delta^{-n/2}) = \Omega_n a(x)|\nu_g|.$$

Следовательно, левая часть доказываемого равенства совпадает с $\Omega_n^{-1}\mathrm{Res}(a\Delta^{-n/2})$. Теперь утверждение вытекает из теоремы о следе.