

В прошлый раз была доказана следующая фундаментальная теорема о решете Бруна:

Теорема 1. Пусть для тройки A, P, z выполнены условия и пусть функция g удовлетворяет при некоторых постоянных $B, \alpha > 0$ и модях $u, v, \frac{3}{2} \leq u < v$, неравенству

$$\prod_{u < p \leq v, p \in P} (1 - g(p))^{-1} \leq B \left(\frac{v^u}{u^v} \right)^\alpha.$$

Тогда для произвольного четного числа $B \geq 2$ справедлива оценка:

$$S(A, P, z) \leq c X V(z) + R,$$

$$\text{где } V(z) = \prod_{p \leq z, p \in P} (1 - g(p)), \quad R = \sum_{\substack{d | P(z) \\ d < \mathfrak{D}}} |r_d|,$$

$$\mathfrak{D} = z^{2B+4}, \quad c = c(B, \alpha) = \frac{B^2 \cdot 2^{2\alpha} (B \cdot 2^{2\alpha})^\alpha}{(B+1)!}$$

Применим полученный результат к некоторым конкретным теоретико-числовым задачам.

Теорема 2. Пусть $x \geq x_0 > 2$, $2 \leq a \leq x$ — произвольное четное число. Тогда для количества $\pi_a(x)$ простых чисел p , $p \leq x$, для которых число $p+a$ также будет простым, справедлива оценка

$$\pi_a(x) \leq \frac{x}{(Bx)^2} + \frac{a}{\varphi(a)},$$

где постоянная в знаке $\leq$ — абсолютная.

До-во. Пологая $a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv m(m+a), 1 \leq m \leq x, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$

$P = \mathbb{P}$ и задавшись некоторым z , $2 \leq z \leq \sqrt{x+a}$, докажем, что $\pi_a(x) \leq S(A, P, z)$. Далее, имеем:

$$|A_d| = \sum_{\substack{n(m+a) \equiv 0 \pmod{d} \\ m \leq x}} 1 = \left[\frac{x}{d} \right] \nu_a(d) + \theta_1 \nu_a(d) =$$

$$= \frac{x}{d} \nu_a(d) + \theta_2 \nu_a(d), \quad \text{где } 0 \leq \theta_1 \leq 1, \quad -1 \leq \theta_2 \leq 1,$$

$a \nmid d$ — количество решений сравнения

$$\begin{cases} m(m+a) \equiv 0 \pmod{d} \\ 1 \leq m \leq d \end{cases}$$

Если $d = p_1 \dots p_r$ — безквадратное, то $\chi_a(d) = \chi_a(p_1) \dots \chi_a(p_r)$,

так что достаточно рассмотреть $\chi_a(p)$ для простого p . Если $p \mid a$, то сравнение принимает вид

$m^2 \equiv 0 \pmod{p}$ и имеет единственное решение

$m \equiv 0 \pmod{p}$. Если $(a, p) = 1$, то сравнение имеет

два решения: $m \equiv 0 \pmod{p}$, и $m \equiv -a \pmod{p}$.

Итак,

$$\chi_a(p) = \begin{cases} 1, & p \mid a, \\ 2, & p \nmid a. \end{cases}$$

Значит, $\chi_a(d) = 2^{\omega_a(d)}$, где $\omega_a(d)$ — число

простых делителей d , не делящих a . Соответственно, функция g имеет вид: $g(d) = \frac{2^{\omega_a(d)}}{d}$.

Отсюда для произвольных $\frac{1}{2} \leq u \leq v$ имеем:

$$K = \prod_{u < p \leq v} (1 - g(p))^{-1} = \prod_{u < p \leq v} \left(1 - \frac{2^{\omega_a(p)}}{p}\right)^{-1} =$$

$$= \prod_{\substack{u < p \leq v \\ p \mid a}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \prod_{\substack{u < p \leq v \\ p \nmid a}} \left(1 - \frac{2}{p}\right)^{-1}.$$

Заметим, что $\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} < \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2}$, и при $p \geq 3$

$$\left(1 - \frac{2}{p}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right), \text{ следовательно,}$$

$$K < \prod_{\substack{u < p \leq v \\ p \mid a}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2} \prod_{\substack{u < p \leq v \\ p \nmid a}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right) \leq$$

$$\leq \prod_{p \geq 3} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right) \prod_{u < p \leq v} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-2} \leq B \left(\frac{e\sqrt{v}}{eu}\right)^2, \text{ где}$$

B — абсолютная постоянная, зависящая только

$v \geq 2$, из теоремы 1 имеем:

$$S(A, P, z) \leq c x V(z) + R, \quad \text{где } c = \frac{B^2 \cdot 2^{2 \cdot 2} (e(B \cdot 2^2))^6}{(B+1)!} =$$

$$= \frac{16B^2 (eB + e^4)^6}{(B+1)!} - \text{константа},$$

$$R \leq \sum_{\substack{d|P(z) \\ d \leq \mathfrak{D}}} \chi_a(d), \quad \mathfrak{D} = z^{2B+4}, \quad V(z) = \prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{2^{\omega_a(p)}}{p}\right).$$

покажем $\omega_a(d) \leq \omega(d)$, то $\chi_a(d) \leq 2^{\omega(d)} \leq \tau(d)$, и

$$R \leq \sum_{d \leq \mathfrak{D}} \tau(d) \ll \mathfrak{D} e \mathfrak{D} \ll z^{2B+4} e z.$$

Канонически,

$$V(z) = \prod_{p|a, p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{p \nmid a, p \leq z} \left(1 - \frac{2}{p}\right) < \prod_{p|a, p \leq z} \frac{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^2}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)} \prod_{p \nmid a, p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2$$

$$= \prod_{p|a, p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \leq \frac{a}{\varphi(a)} \prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \leq$$

$$\leq \frac{a}{\varphi(a)} \cdot \frac{e^{-2\gamma}}{(e z)^2} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{e z}\right) \right\}$$

Так канонизируем:

$$\pi_a(x) \leq S(A, P, z) + z \leq \frac{c e^{-2\gamma}}{(e z)^2} \cdot \frac{a}{\varphi(a)} \cdot x \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{e z}\right) \right\} +$$

$$+ O\left(z^{2B+4} e z\right).$$

Положим $B=2$, $z = x^{\frac{1}{9}}$, приходим к числовой оценке.

Теорема 3. Пусть $x \geq x_0$, a, b — взаимно простые, $1 \leq a, b \leq x$; тогда для числа $\pi_{a,b}(x)$ простых p , $p \leq x$, для которых $ap+b$ также будет простым, справедлива оценка:

$$\pi_{a,b}(x) \ll \frac{x}{(e x)^2} \frac{ab}{\varphi(ab)}, \quad \text{где константа } c \text{ — абсолютная.}$$

Д-во. Задавая некоторым z , $2 < z \leq \sqrt{ax+b}$, полагая $P = P$ и $a_n = \begin{cases} 1, & n = m(am+b), m \leq x \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$

Тогда $\pi_{a,b}(x) - \pi_{a,b}(z) \leq S(A, P, z)$. Далее,

$$|Ad| = \frac{x}{d} \chi_{a,b}(d) + \theta \cdot \chi_{a,b}(d), \quad \text{где } \chi_{a,b}(d) - \text{число решений ср.-з. } \begin{cases} m(am+b) \equiv 0(d) \\ 1 \leq m \leq d \end{cases}$$

Числа d , для которых выполняется $|Ad|$ - безквадратные. В силу мультипликативности $\chi_{a,b}(d)$ достаточно найти $\chi_{a,b}(d)$ в случае простого $d = p$.

Если $(p, ab) = 1$, то сравнение $x(am+e) \equiv 0 \pmod{p}$ имеет в числах m , $0 \leq m \leq p-1$, два решения:

$$m \equiv 0 \pmod{p} \text{ и } m \equiv -\bar{a}b \pmod{p}, \text{ где } a\bar{a} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Если $p|a$, то сравнение принимает вид $bx \equiv 0 \pmod{p}$ и в силу условия $(b, p) = 1$ имеет единственное решение: $x \equiv 0 \pmod{p}$.

Если, наконец, $p|b$, то $(a, p) = 1$, и в этом случае сравнение, имеющее вид $ax^2 \equiv 0 \pmod{p}$, имеет единственное решение $x \equiv 0 \pmod{p}$.

Таким образом,

$$\chi_{a,b}(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p|ab, \\ 2, & \text{если } p \nmid ab, \end{cases} \quad \chi_{a,b}(d) = 2^{\omega_{ab}(d)}$$

где, как обычно, $\omega_{ab}(d)$ означает число простых делителей d , не делящих ab . Следовательно,

$$g(d) = \frac{2^{\omega_{ab}(d)}}{d}, \text{ и при } u \leq v, \frac{3}{2} \leq u < v, \text{ имеем}$$

$$\prod_{u < p \leq v} \left(1 - g(p)\right)^{-1} = \prod_{\substack{u < p \leq v \\ p|ab}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{\substack{u < p \leq v \\ p \nmid ab}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \leq B \left(\frac{ev}{eu}\right)^2,$$

где B - абсолютная постоянная. Далее, как и выше, получим:

$$V(z) = \prod_{p \leq z} \left(1 - g(p)\right) \leq \frac{c}{(ez)^2} \cdot \frac{ab}{\varphi(ab)}.$$

Взяв $\epsilon = 2$ и используя теорему 1, получим:

$$\pi_{a,b}(x) \leq S(A, \varphi, z) + z \leq \frac{4x}{(ez)^2} \cdot \frac{ab}{\varphi(ab)} + O(z^2 \ln z), \text{ откуда}$$

получим $z = x^{1/9}$, придем к искомой оценке.

Следствие. Количество простых p , $p \leq x$, для которых число $2p+1$ также будет простым, не превосходит $\frac{cx}{(ex)^2}$.

Замечание. Простые p с таким свойством называются простыми числами Соси Жермен.

Во многих задачах величина τ_d подчинена условию: $|\tau_d| \leq d_g(d) = \nu(d)$ (так было, в частности, в задачах о простых делителях вида $p, p+1$, и в задаче о простых числах вида $ap+b$). Это условие улучшает величину R точнее, чем это сделано в Теореме 1. Соответствующее утверждение, в свою очередь, играет роль в некоторых приложениях.

По ходу доказательства Т.1 возникло выражение

$$\rho = \sum_{\substack{d_1 | P_1 \\ \omega(d_1) \leq k_1}} \dots \sum_{\substack{d_t | P_t \\ \omega(d_t) \leq k_t}} \tau_{d_1 \dots d_t} \mu(d_1 \dots d_t),$$

оценим его по абсолютной величине следующим образом:

$$|\rho| \leq \sum_{\substack{d_1 | P_1 \\ \omega(d_1) \leq k_1}} \nu(d_1) \dots \sum_{\substack{d_t | P_t \\ \omega(d_t) \leq k_t}} \nu(d_t) = \rho_1 \dots \rho_t.$$

Далее, очевидно,

$$\rho_m \leq \left(1 + \sum_{z_{m+1} < p \leq z_m} \nu(p) \right)^{k_m} = \sigma_m.$$

Предположим, далее, что $\nu(p) \leq A$ для некоторых абсолютной постоянной $A > 1$ и всех $p \geq 2$.

Тогда

$$\sigma_m \leq 1 + A(\pi(z_m) - \pi(z_{m+1}))$$

Если $1 \leq m \leq t-1$, то $z_{m+1} \geq 2$ и, следовательно, $\pi(z_{m+1}) \geq 1$.

Тогда $\sigma_m \leq 1 + A(\pi(z_m) - 1) < A\pi(z_m)$. Если же $m = t$,

$$\text{то } \sigma_m \leq 1 + A\pi(z_m) < A\pi(z_m) \left(1 + \frac{1}{A}\right) < 2A\pi(z_m).$$

Следовательно,

$$|\rho| \leq \sigma_1^{k_1} \dots \sigma_t^{k_t} < 2 \prod_{m=1}^t (A\pi(z_m))^{k_m}.$$

Далее, при всех $z \geq 2$ имеет место неравенство

$$\pi(z) \leq \frac{\alpha z}{\ln z}, \quad \text{где } \alpha = 1.25506$$

(См. J. B. Rosser, L. Schoenfeld, "Approximate formulas for some functions of prime numbers", Illinois J. Math., 6 (1962), №1, p. 64-94),

Следовательно, $|p| \leq 2 \prod_{n=1}^t \left(\frac{\alpha A z_n}{e z_n} \right)^{k_n}$, заменив

z_n на $z^{\frac{1}{2^{n-1}}}$, каждем:

$$|p| \leq 2 \prod_{n=1}^t \left(\frac{\alpha A \cdot 2^{n-1} z}{e z} \right)^{k_n} \leq 2 \left(\frac{\alpha A}{e z} \right)^{H_1} \frac{H_2}{2} \cdot z^{2t+1},$$

где для краткости обозначено:

$$H_1 = \sum_{n=1}^t k_n, \quad H_2 = \sum_{n=1}^t (n-1) k_n,$$

имеем, далее:

$$H_1 = \sum_{n=1}^t \{2(n-1) + 6\} = 6t + t(t-1) = t^2 + (6-1)t,$$

$$H_2 = \sum_{n=1}^t \{2(n-1)^2 + 6(n-1)\} = \frac{2}{6}t(t-1)(2t-1) + 6 \cdot \frac{1}{2}t(t-1)$$

$$= \frac{1}{3}t^3 + \left(\frac{6}{2}-1\right)t^2 - \left(\frac{6}{2}-\frac{1}{3}\right)t$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\alpha A}{e z} \right)^{H_1} \frac{H_2}{2} = \exp \{ H_2 e z - H_1 (e e z - e \alpha A) \} = \exp \{ H \},$$

$$H = \left(\frac{t^3}{3} + \left(\frac{6}{2}-1\right)t^2 - \left(\frac{6}{2}-\frac{1}{3}\right)t \right) e z -$$

$$- (t^2 + (6-1)t) e e z + (t^2 + (6-1)t) e \alpha A =$$

$$- t^2 e e z + \frac{e z}{3} t^3 + c_1 (e e z)^2, \quad \text{где } c_1 - \text{некоторая}$$

постоянная, зависящая от α и A ,

Далее, так $\frac{1}{e z} (e e z - e z) \leq t < \frac{1}{e z} (e e z - e z) + 1,$

имеем:

$$H \leq - \left(\frac{e e z}{e z} \right)^2 e e z + \frac{e z}{3} \left(\frac{e e z}{e z} \right)^3 + c_2 (e e z)^2 =$$

$$= - \frac{2}{3} \cdot \frac{(e e z)^3}{(e z)^2} + c_2 (e e z)^2 \leq - \frac{1}{3} \frac{(e e z)^3}{(e z)^2},$$

если только z достаточно велико ($c_2 = c_2(\alpha; A)$ - некоторая постоянная, $c_2 \geq c_1$).

замечание, утверждение теоремы остается справедливым, если вместо (1) потребовать: $|z_1| \leq L \cdot v(d)$, где $L > 1$ - абсолютная постоянная.

Если $|p| \leq 2z^{2\sigma+4} \cdot \exp\left\{-\frac{1}{3} \frac{(v(z))^3}{(e_2)^2}\right\}$. В частности, если бы не была постоянной $C > 0$, при $z \geq z_0(\alpha, A, C)$ имела бы место оценка $|p| \leq \mathfrak{D}(v(z))^{-C}$, где, как и выше, $\mathfrak{D} = z^{2\sigma+4}$. Сформулируем это в виде отдельного утверждения.

Теорема 5. Пусть выполнены все условия Т.1; $C > 1$,

$v(d) = \Delta g(d)$, и пусть, кроме того,

(1) $|za| \leq v(d)$ для всех $d | P(z)$;

(2) $0 \leq v(p) \leq A$ для всех простых $p \geq 2$, где

$A \geq 1$ - некоторая абсолютная постоянная.

Тогда при любых $x \geq x_0(A, C)$ справедливо неравенство:

$$S(A, P, z) \leq c_0 \cdot V(z) + \mathfrak{D}(v(z))^{-C}, \quad \mathfrak{D} = z^{2\sigma+4}$$

Воспользуемся этим утверждением для вывода верхней границы величины $\pi(x; q, a)$ (Оценки такого вида называются неравенствами Бруна-Титмарша).

Теорема 6. Пусть $x \geq x_0$, a, q - целые числа, $(a, q) = 1$, $1 \leq a \leq q-1$, $q \leq x$. Тогда для количества $\pi(x, q, a)$

простых чисел $p \leq x$, $p \equiv a \pmod{q}$, справедлива оценка:

$$\pi(x; q, a) \leq \frac{\lambda}{\varphi(q)} \cdot \frac{x}{e^{\frac{2\pi}{q}}}$$

где $\lambda > 1$ - абсолютная постоянная.

Д-во. Пусть c - достаточно малая абсолютная постоянная. Если $cx \leq q \leq x$, то

$$\pi(x; q, a) \leq \sum_{n \leq x, n \equiv a(q)} 1 \leq \frac{x}{q} + 1 \leq \frac{2x}{q} \leq \frac{2x}{\varphi(q)} =$$

$$= \frac{2x}{\varphi(q)} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi}{q}}}{e^{\frac{2\pi}{q}}} \leq 2 \left(e^{\frac{2}{c}}\right) \cdot \frac{x}{\varphi(q)} \cdot \frac{1}{e^{\frac{2\pi}{q}}}, \text{ и исконое}$$

неравенство выполнено с $\lambda = 2e^{\frac{2}{c}}$.

Пусть далее, $1 \leq g \leq q$. Заданное некоторое z , $2 < z \leq \sqrt{x}$,
и функция $\rho = \mathbb{I}_P$, $a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n \equiv a \pmod{q}, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$

$$\pi(x; q, a) - \pi(z; q, a) \leq S(A, \rho, z),$$

Очевидно, чтобы сумма $|A_d| = \sum_{n \leq x} 1$ была от-
лична от нуля, необходимо, $n \equiv a \pmod{q}$, $n \equiv 0 \pmod{d}$
чтобы $(q, d) = 1$. В таком случае, согласно ки-
тайской теореме об остатках, система

$$\begin{cases} n \equiv a \pmod{q} \\ n \equiv 0 \pmod{d} \end{cases} \text{ равносильна сравнению } n \equiv a_1 \pmod{qd},$$

где $1 \leq a_1 \leq qd$ - некоторый возрст, зависящий от
 q, a, d . Следовательно, для таких d имеем:

$$|A_d| = \left[\frac{x}{qd} \right] + \theta_1 = \frac{x}{qd} + \theta_2, \text{ где } 0 \leq \theta_1 \leq 1, \quad |\theta_2| \leq 1.$$

$$\text{Положим } X = \frac{x}{q}, \quad \chi(d) = \begin{cases} 1, & (q, d) = 1 \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad g(d) = \frac{\chi(d)}{d},$$

и замечая, что $|\chi(d)| \leq \chi(d)$ при всех d , получим:

$$\prod_{u < p \leq v} (1 - g(p))^{-1} \leq \prod_{u < p \leq v} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \leq B \frac{e^v}{e^u} \text{ при любых } v > u \geq \frac{3}{2}.$$

Положим $\theta = C = 2$ в теореме 5, найдем:

$$S(A, \rho, z) \leq c_0 X V(z) + z^8 (e z)^{-2}, \text{ где}$$

$$V(z) = \prod_{p \leq z, p \nmid q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{p \leq z, p \nmid q} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varphi(q)} \prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \frac{e^{-\gamma}}{e z} \left(1 + O\left(\frac{1}{e z}\right)\right).$$

$$\text{Итак, положим } z = \left(\frac{2x}{q}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ (необходимо,}$$

$$\text{чтобы } \frac{x}{q} > z^8), \text{ найдем:}$$

$$\pi(x; q, a) \leq c_0 \frac{x}{q} \cdot \frac{1}{\varphi(q)} \cdot \frac{e^{-\gamma}}{e z} \left(1 + O\left(\frac{1}{e z}\right)\right) + z + z^8 (e z)^{-2}$$

$$\leq c_0 \frac{x}{\varphi(q)} \cdot \frac{e^{-\gamma}}{e \frac{2x}{q}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{e \frac{2x}{q}}\right) \right\} + \dots \text{ что и требовалось}$$

Задача 1. Пусть $N \geq N_0 \geq 2$, $1 \leq a \leq b \leq N$ - целые числа, причем $(a, b) = 1$, $(ab, N) = 1$, $1 \leq a \leq b \leq N$. Тогда для уравнения $I_{a,b}(N)$ решений Диофантова уравнения

$$N = ar_1 + br_2 \quad (1)$$

в простых числах p_1, p_2 справедлива оценка:

$$I_{a,b}(N) \leq \frac{cN}{\varphi(ab)} \cdot \frac{1}{\left(2 \frac{2N}{ab}\right)^2} \prod_{p|N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1},$$

где c - абсолютная постоянная.

Решение. Определим последовательность $A = \{a_n\}$ следующим образом:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m \cdot \frac{N-am}{b}, \text{ где } 1 \leq m \leq \frac{N}{a} - \\ & \text{целое число, т.е. } N-am \equiv 0 \pmod{b}, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

и положим $P = \mathbb{P}$. Пусть, далее, $2 \leq z \leq \sqrt{\frac{N}{b}}$. Ясно, что для всякого решения r_1, r_2 исходного уравнения число $m = r_1$ удовлетворяет равенству

$$m \cdot \frac{N-am}{b} = r_1 \cdot \frac{br_2}{b} = r_1 r_2$$

Если, сверх того, обе компоненты решения подчинены условиям $r_1 \geq z, r_2 \geq z$, то, очевидно, возможно также

$$\left(m \cdot \frac{N-am}{b}, p(z)\right) = 1$$

т.е. число решений (1) с $r_1 \leq z$ или $r_2 \leq z$ не превосходит $2z$, то имеем:

$$I_{a,b}(N) \leq S(A, P, z) + 2z.$$

Возвращаясь теперь к $|A_d|$, для этого определим целое μ из условий $\mu \equiv \bar{a}N \pmod{b}$, $1 \leq \mu \leq b$, где $a\bar{a} \equiv 1 \pmod{b}$. Тогда $(\mu, b) = 1$ (в противном случае мы имели бы $(b, N) > 1$). Поскольку $a\mu \equiv N \pmod{b}$, то число $\nu = \frac{N-a\mu}{b}$ - целое, и $N = a\mu + b\nu$.

Очевидно, $(\nu, a) = 1$. Тогда все целые числа m , удовлетворяющие сравнению $N-am \equiv 0 \pmod{b}$, представляются в виде $m \equiv N\bar{a} \pmod{b} \equiv \mu \pmod{b}$, т.е. $m = \mu + bt$. Учитывая $0 < m < \frac{N}{a}$ даем: $0 < \mu + bt < \frac{N}{a}$,

$-\frac{\mu}{b} < t < \frac{N}{ab} - \frac{\mu}{b}$, Но тогда число n , отвечающее $a_n \neq 0$, записывается в виде

$$n \cdot \frac{N - a\mu}{b} = (\mu + bt) \cdot \frac{1}{b} (N - a(\mu + bt)) = (\mu + bt) \cdot \frac{1}{b} (bv - at) \\ = (\mu + bt)(v - at).$$

Следовательно,

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = (\mu + bt)(v - at), \text{ где } -\frac{\mu}{b} < t \leq \frac{N}{ab} - \frac{\mu}{b}, \\ & t - \text{целое число,} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Значит, $|A_d| = \left[\frac{1}{d} \right] v(d) + \theta_1 v(d)$, где $0 \leq \theta_1 \leq 1$.

T - количество целых чисел с условием $-\frac{\mu}{b} < t \leq \frac{N}{ab} - \frac{\mu}{b}$, а $v(d)$ - количество решений сравнения

$$(2) \quad (\mu + bt)(v - at) \equiv 0 \pmod{d}, \quad 1 \leq t \leq d.$$

Если $d = p$ - простое, и при этом $p | a$, то сравнение (2) принимает вид $v(\mu + bt) \equiv 0 \pmod{p}$. Т.к. $(v, a) = 1$, то $(v, p) = 1$ и, следовательно, $\mu + bt \equiv 0 \pmod{p}$, откуда $t \equiv -\mu \bar{b} \pmod{p}$ - его единственное решение. Аналогично, если $d = p$ и $p | b$, то единственным решением (2) будет $t \equiv v \bar{a} \pmod{p}$.

Пусть, далее, $d = p$, причем $(p, ab) = 1$. Тогда (2) принимает вид

$$(t + \mu \bar{b})(t - v \bar{a}) \equiv 0 \pmod{p},$$

и его решения суть

$$\begin{cases} t \equiv -\mu \bar{b} \pmod{p}, \\ t \equiv v \bar{a} \pmod{p}. \end{cases}$$

Такие решения могут совпадать. Это будет, если $v \bar{a} \equiv -\mu \bar{b} \pmod{p}$, т.е. если $a\mu + bv \equiv 0 \pmod{p}$. Но $a\mu + bv = N$, так что, это имеет смысл лишь для p , делящих N . Итак,

$$v(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p | abN, \\ 2, & \text{иначе,} \end{cases} \quad v(d) = 2^{w_{abN}(d)}$$

Окончательно имеем: $T = \frac{N}{ab} + \theta_2$, $-1 \leq \theta_2 \leq 1$,

$$|A_d| = \left(\frac{N}{ab d} + \theta_3 \right) 2^{w_{abN}(d)} + \theta_1 \cdot 2^{w_{abN}(d)}$$

$$\text{где } \theta_3 = \frac{\theta_2}{d} - \left\{ \frac{T}{d} \right\}, \text{ так что } -2 \leq \theta_3 \leq 1, \text{ и}$$

$$|A_d| = \frac{N}{ab} \cdot 2^{\omega_{abN}(d)} + A \cdot 2^{\omega_{abN}(d)}, \quad -2 \leq \theta \leq 2.$$

В частности, имеем: $|z_d| \leq 2 \cdot v(d)$.

Если $\frac{3}{2} \leq v < v$, то, как было установлено ранее,

$$\prod_{u < p \leq v} (1 - g(p))^{-1} = \prod_{\substack{u < p \leq v \\ p | a \in N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \prod_{\substack{u < p \leq v \\ p \nmid a \in N}} \left(1 - \frac{2}{p}\right)^{-1} \leq B \left(\frac{ev}{eu}\right)^2,$$

где B — некоторая абсолютная постоянная. Далее,

$$\begin{aligned} V(z) &= \prod_{p \leq z} (1 - g(p)) = \prod_{\substack{p \leq z \\ p | a \in N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{\substack{p \leq z \\ p \nmid a \in N}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \leq \\ &= \frac{a \in N}{\varphi(a \in N)} \cdot \frac{e^{-2\gamma}}{(ez)^2} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{ez}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Поэтому, задавшись точкой $\epsilon = 2$, и воспользовавшись замечанием к Теореме 5, получим:

$$\begin{aligned} I_{a, \epsilon}(N) &\ll \frac{N}{ab} \cdot \frac{a \in N}{\varphi(a \in N)} \cdot \frac{1}{(ez)^2} + \frac{z^8}{(ez)^2} \ll \\ &\ll \frac{N}{\varphi(ab)} \cdot \prod_{p | N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{(ez)^2} + \frac{z^8}{(ez)^2}. \end{aligned}$$

Положив $z = \left(\frac{2N}{ab}\right)^{\frac{1}{8}}$, окончательно получим:

$$I_{a, \epsilon}(N) \ll \frac{N}{\varphi(ab)} \cdot \frac{1}{\left(e \frac{2N}{ab}\right)^2} \prod_{p | N} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Теорема доказана.

Следующее утверждение весьма удобно для приложений.

Задача 2. Пусть $x \geq x_0$, Q — произвольное ненулевое множество простых чисел p , содержащееся в интервале $(1, x]$. Тогда для количества $\Phi(x; Q)$ чисел n , $n \leq x$, не делящихся ни простым числом из Q , справедлива оценка: $\Phi(x; Q) \leq c x \prod_{p \in Q} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$, где c — абсолютная постоянная.

Решение. Пусть $Q \subseteq (1, z]$, где $2 < z \leq x$. Рассмотрим сначала случай, когда $z \leq x^{1/8}$. Как и при доказательстве фундаментальной теоремы о решете Бруна, определим числа $z_1 = z$, $z_{k+1} = \sqrt{z_k}$, $k = 1, 2, \dots, t$, и отвечающие им множества $Q_k = Q \cap (z_{k+1}, z_k]$. Дословно повторяя соответствующие рассуждения, приходим к оценке

$$\Phi(x; Q) = \sum_{n \leq x} 1 = S(A, Q, z) \leq x V(z) \exp(E) + R,$$

$$(n, P(z)) = 1$$

$$\text{где } P(z) = \prod_{p \in Q, p \leq z} p \equiv \prod_{p \in Q} p, \quad V(z) = \prod_{p \in Q, p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \equiv$$

$$\equiv \prod_{p \in Q} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad E \leq \sum_{k=1}^t \frac{e^{L_k} L_k^{k_{k+1}}}{(k_{k+1})!}, \quad L_k = \prod_{p \in Q_k} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1},$$

а $k_1, k_2, \dots, k_t$ — некоторые целые числа.

$$\text{Замечая, что } L_k \leq \prod_{\sqrt{z_k} < p \leq z_k} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \leq L, \text{ где } L -$$

некоторая абсолютная постоянная, и используя

$$k_m = b + 2(m-1), \text{ где } b \geq 2 - \text{целое число, получаем:}$$

$$E \leq \frac{e^{2L} L^b}{(b+1)!}, \quad b \text{ выбираем при } b = 2 \text{ найдем: } E \leq \frac{(2e^L)^2}{6}.$$

Канонич., оценивая величину R подобно тому, как

$$\text{это делается в Т.5, получим: } R \leq \frac{2^{2b+4}}{(bz)^2} = \frac{2^b}{(bz)^2} \leq$$

$$\leq \frac{x}{\left(\frac{1}{8}bz\right)^2} = 8^2 \cdot \frac{x}{(bz)^2}. \text{ Замечая, что}$$

$$\prod_{p \in Q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \geq \prod_{p \leq x^{1/8}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{8e^{-\gamma}}{bx} \left(1 + O\left(\frac{1}{bx}\right)\right),$$

$$\text{получаем: } \frac{8}{bx} \leq e^{\gamma} \prod_{p \in Q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{bx}\right)\right),$$

$$R \leq \frac{8x}{bx} \cdot \frac{8}{bx} = \frac{8x}{bx} e^{\gamma} \prod_{p \in Q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{bx}\right)\right),$$

$$\Phi(x; Q) \leq x \prod_{p \in Q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left\{ e^E + \frac{8e^{\gamma}}{bx} \left(1 + O\left(\frac{1}{bx}\right)\right) \right\} \leq cx \prod_{p \in Q} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Рассмотрим теперь случай, когда $x^{1/8} < z \leq x$.

Представим тогда Q в виде $Q_1 \cup Q_2$, где $Q_1 = \{p \in Q, p \leq z_1\}$,

$Q_2 = \{p \in Q, z_1 < p \leq z\}$, $z_1 = x^{1/8}$. Замечая, что

$\Phi(x; Q) \leq \Phi(x; Q_1)$ и пользуясь уже доказанным утверждением, найдём:

$$\Phi(x; Q) \leq c_1 x \prod_{p \in Q_1} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$$

Однако

$$\begin{aligned} \prod_{p \in Q_1} \left(1 - \frac{1}{p}\right) &= \prod_{p \in Q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{p \in Q_2} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \leq \\ &\leq \prod_{p \in Q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{x^{1/8} < p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = O\left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \prod_{p \in Q} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \end{aligned}$$

так что $\Phi(x; Q) \leq 8c_1 x \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) \prod_{p \in Q} \left(1 - \frac{1}{p}\right),$

откуда легко следует основное утверждение.

q, a - фиксированные целые числа

Задача 3 Пусть $(a, q) = 1$, $\mathcal{P}$ - множество простых чисел p , $p \equiv a \pmod{q}$, $2 \leq y \leq x$. Тогда для чисел $N_{q,a}(x, y)$ целых n , $x < n \leq x+y$, не делящихся на простые числа $p \in \mathcal{P}$, справедливы оценки:

$$N_{q,a}(x, y) \ll \frac{y}{(e^y)^{1/\varphi(q)}}$$

Решение. Определим $a_n = \begin{cases} 1, & x < n \leq x+y \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$ выберем

$$2 < z \leq \sqrt{y} \text{ и рассмотрим величину } S(A, \mathcal{P}, z) = \sum_{\substack{x < n \leq x+y \\ (n, P(z)) = 1}} 1, \text{ где, как обычно, } P(z) = \prod_{\substack{p \leq z, p \in \mathcal{P}}} p = \prod_{\substack{p \leq z \\ p \equiv a \pmod{q}}} p$$

Всего n из рассматриваемых $N_{q,a}(x, y)$ чисел, очевидно, удовлетворяет условию $(n, P(z)) = 1$, значит,

$$N_{q,a}(x, y) \leq S(A, \mathcal{P}, z)$$

иначе:

$$|A_d| = \frac{y}{d} + O_d(1), \quad -1 \leq O_d(1) \leq 1, \text{ так что выберем } X = y,$$

$$g(d) = \frac{1}{d}, \quad \chi(d) = dg(d) \equiv 1, \quad \chi_d = O_d(1), \text{ так что } |\chi_d| \leq \chi(d).$$

Зададимся четным $\sigma \geq 2$ и постоянным $C \geq 2$, найдем:

$$S(A, \mathcal{P}, z) \leq X V(z) e^E + \frac{z^{2\sigma+1}}{(e^z)^C}, \text{ где}$$

$$V(z) = \prod_{p \leq z, p \equiv a \pmod{q}} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad \text{а } E = E(\sigma) - \text{постоянная.}$$

иначе:

$$V(z) = \exp \left\{ \sum_{p \leq z, p \equiv a \pmod{q}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \right\} \leq \exp \left\{ - \sum_{p \leq z, p \equiv a \pmod{q}} \frac{1}{p} \right\}$$

$$= \exp \left\{ - \frac{1}{\varphi(q)} \log z + O(1) \right\} \leq (e^z)^{-\frac{1}{\varphi(q)}}, \text{ выберем } \sigma = C = 2,$$

найдем:

$$N_{q,a}(x, y) \leq \frac{y}{(e^z)^{1/\varphi(q)}} + \frac{z^3}{(e^z)^2}$$

Наконец, выбирая $z = y^{1/8}$, приходим к искомым

оценкам:

Замечание. В частном случае $q = 4$, $a = 1$ или $a = 3$ ишем:

$$N_{4,a}(x, y) \ll \frac{y}{\sqrt{e} y}$$

Задача 4. Пусть a_1, a_2, b_1, b_2 - произвольные целые числа, $(a_1, b_1) = 1$, $H = a_1 a_2 (a_2 b_1 - a_1 b_2) \neq 0$, и пусть $N(x)$ - количество тех $m \in x$, для которых оба числа $a_1 m + b_1$, $a_2 m + b_2$ - простые. Тогда

$$N(x) \leq \frac{H}{\varphi(H)} \cdot \frac{x}{(x)^2}$$

Решение. Определим $a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = (a_1 m + b_1)(a_2 m + b_2), \text{ где } 1 \leq m \leq x, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$

и пусть $P = \mathbb{P}$ и возьмем z с условиями $2 \leq z \leq \sqrt{x}$. Тогда

$$S(A, P, z) = \sum_{m \leq x} 1$$

$$(a_1 m + b_1)(a_2 m + b_2), P(z) = 1$$

Всякое m , для которого оба числа $a_1 m + b_1$, $a_2 m + b_2$ - простые и такие, что $a_1 m + b_1 \geq z$, будут учтены в правой сумме. Значит,

$$N(x) \leq S(A, P, z) + \min\left(\frac{z - b_1}{a_1}, \frac{z - b_2}{a_2}\right) \leq S(A, P, z) + z.$$

Далее,

$$|A_d| = \sum_{m \leq x} 1 = \left[\frac{x}{d} \right] \nu(d) + O_1 \nu(d),$$

$$(a_1 m + b_1)(a_2 m + b_2) \equiv 0 \pmod{d}$$

где $\nu(d)$ - число решений сравнения

$$(a_1 m + b_1)(a_2 m + b_2) \equiv 0 \pmod{d}.$$

Пусть $d = p$ - простое. Если $p | a_1$, то имеет сравнение

$$b_1(a_2 m + b_2) \equiv 0 \pmod{p},$$

равносильное сравнению $a_2 m + b_2 \equiv 0 \pmod{p}$ (т.к.

$(b_1, a_1) = 1$). Т.к. $(a_2, b_2) = 1$, оно имеет единственное

решение $m \equiv -b_2 \bar{a}_2 \pmod{p}$. Тогда будет в сумме

$p | a_2$. Если $(p, a_1 a_2) = 1$, то имеет сравнение

$$(m + b_1 \bar{a}_1)(m + b_2 \bar{a}_2) \equiv 0;$$

решениями которого будут

$$\begin{cases} m \equiv -b_1 \bar{a}_1 \pmod{p} \\ m \equiv -b_2 \bar{a}_2 \pmod{p} \end{cases}$$

Эти решения совпадут, если $b_1 \bar{a}_1 \equiv b_2 \bar{a}_2 \pmod{p}$, или $a_2 b_1 - a_1 b_2 \equiv 0 \pmod{p}$, т.е. это имеет место тогда, когда p делит $a_2 b_1 - a_1 b_2$.

так, если

$$\chi(p) = \begin{cases} 1, & \text{если } p|H, \\ 2, & \text{если } p \nmid H. \end{cases}$$

Следовательно, $\chi(d) = 2^{\omega_H(d)}$ если

$$|Ad| = \chi g(d) + \tau_d, \quad g(d) = \frac{\chi(d)}{d}, \quad |\tau_d| \leq 2\chi(d)$$

Согласно Теореме 5, имеем:

$$S(A, P, z) \leq \chi V(z) \exp(E) + \frac{z^{2\sigma+4}}{(cz)^c}, \quad \text{где } \sigma \geq 2 -$$

некое, $c \geq 2$, $E = E(\sigma)$ — константа, и

$$V(z) = \prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p}\right) = \prod_{\substack{p \leq z \\ p|H}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{\substack{p \leq z \\ p \nmid H}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \leq$$

$$\leq \prod_{\substack{p \leq z \\ p|H}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{\substack{p \leq z \\ p \nmid H}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 = \prod_{\substack{p \leq z \\ p|H}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \leq$$

$$\leq \prod_{\substack{p \leq z \\ p \nmid H}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 = \prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \prod_{\substack{p \leq z \\ p|H}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \leq$$

$$\leq \prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \prod_{p|H} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \frac{H}{\varphi(H)} \prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \ll$$

$$\ll \frac{H}{\varphi(H)} (cz)^{-2}. \quad \text{Следовательно, при } \sigma = 2, c = 2$$

получим:

$$S(A, P, z) \ll \frac{H}{\varphi(H)} \cdot \frac{\chi}{(cz)^2} + \frac{z^8}{(cz)^2}.$$

Взяв $z = x^{1/8}$, получим следующее.

Задача 5 Пусть $x \geq x_0$, q, a — целые, $(a, q) = 1$, $h \geq 1$ — целое число. Тогда для функции $N(x)$ имеет место такое, что $m \in x$, и $m, m+h$ не делятся на простые числа $p \equiv a \pmod{q}$ справедлива оценка:

$$N(x) \ll \frac{\chi}{(cx)^{2/\varphi(q)}} \prod_{\substack{p|h \\ p \equiv a \pmod{q}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}.$$

Решение. Определим последовательность a_n следующим образом:

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{если } n = m(m+h) \text{ для некоторого } m, m \leq x, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пусть, далее, P - множество простых чисел $p \equiv a \pmod{q}$, $2 \leq z \leq \sqrt{x}$. Если m и $m+h$ не делятся на простое из P и при этом $m > z$, то ясно, что $(m(m+h), P(z)) = 1$, где $P(z) = \prod_{\substack{p \equiv a \pmod{q} \\ p \leq z}} p$. Значит,

$N(x) \leq z + S(A, P, z)$. Имеем, далее:

$$|A_d| = \sum_{\substack{m(m+h) \equiv 0 \pmod{d} \\ m \leq x}} 1 = \left[\frac{x}{d} \right] v(d) + O(v(d)), \text{ где}$$

$v(d)$ - число решений сравнения $\begin{cases} m(m+h) \equiv 0 \pmod{d} \\ 1 \leq m \leq d \end{cases}$

Пусть $d = p$ - простое. Если $p | h$, то имеем единственное решение $m \equiv 0 \pmod{p}$. Если же $p \nmid h$, то имеем два решения: $m \equiv 0, m \equiv -h \pmod{p}$. Значит,

$$v(p) = \begin{cases} 1, & p | h, \\ 2, & p \nmid h, \end{cases} \quad v(d) = 2^{\omega_h(d)}, \quad \text{и}$$

$$|A_d| = X g(d) + r_d, \quad \text{где } X \equiv x, g(d) = \frac{v(d)}{d},$$

$|r_d| \leq 2v(d)$. Согласно Теореме 5,

$$N(x) \leq x v(z) e^E + \frac{z^{2\theta+4}}{(Qz)^C}, \quad \text{где } \theta \geq 2 - \text{ число } C \geq 2, E = E(\theta), \text{ и}$$

$$v(z) = \prod_{\substack{p \leq z \\ p \equiv a \pmod{q}}} \left(1 - \frac{v(p)}{p}\right) = \prod_{\substack{p | h, p \leq z \\ p \equiv a \pmod{q}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{\substack{p \nmid h, p \leq z \\ p \equiv a \pmod{q}}} \left(1 - \frac{2}{p}\right) \leq$$

$$\leq \prod_{\substack{p | h, p \leq z \\ p \equiv a \pmod{q}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \prod_{\substack{p \nmid h, p \leq z \\ p \equiv a \pmod{q}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 = \prod_{\substack{p \leq z \\ p \equiv a \pmod{q}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^2 \prod_{\substack{p | h, p \leq z \\ p \equiv a \pmod{q}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$$

$$\leq \prod_{\substack{p | h, p \equiv a \pmod{q}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \exp \left\{ -2 \sum_{\substack{p \leq z \\ p \equiv a \pmod{q}}} \frac{1}{p} \right\} \leq \prod_{\substack{p | h \\ p \equiv a \pmod{q}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \frac{1}{(Qz)^{\frac{2}{\varphi(q)}}}$$

возьмем $\theta = C = 2$, $z = x^{1/8}$, найдем:

$$N(x) \ll \prod_{\substack{p | h, p \equiv a \pmod{q}}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} \frac{x}{(Qx)^{2/\varphi(q)}}, \quad \text{что и требовалось.}$$

Решение задачи из статьи J.B. Rosser'a и L. Schoenfeld'a:

$$\pi(x) < \frac{cx}{\ln x}, \quad c = 1.25506, \quad - \text{для всех } x > 1.$$

$$\frac{e^{-x}}{\ln x} \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) < \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right) < \frac{e^{-x}}{\ln x} \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) \quad \text{для всех } x > 1$$

$$e^x (\ln x) \left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) < \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} < e^x (\ln x) \left(1 + \frac{1}{2x^2}\right) \quad \text{для всех } x > 1.$$

$$\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} < e^x \sum_{n \leq x} \frac{1}{n}, \quad \text{для всех } x \geq 1.$$