НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ. ПРИЛОЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ

А.Г.Сергеев

19 июня 2020 г.

РАЗДЕЛ 3: НЕКОММУТАТИВНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3.1. Универсальная дифференциальная алгебра

Пусть $\mathcal{E}$ есть бимодуль над алгеброй A с единицей 1_A.

Определение 1. *Дифференцированием* алгебры A со значениями в бимодуле $\mathcal{E}$ называется линейное отображение $D : A \to \mathcal{E}$, удовлетворяющее правилу Лейбница

$$D(ab) = (Da)b + a(Db).$$

Из этого определения сразу следует, что $D(1_A) = 0$, поскольку $D(1_A) = 2D(1_A)$.

Обозначим множество всех дифференцирований алгебры A со значениями в $\mathcal{E}$ через $\mathrm{Der}(A, \mathcal{E})$. Пространство $\mathrm{Der}(A) \equiv \mathrm{Der}(A, A)$ дифференцирований алгебры A является алгеброй Ли, поскольку коммутатор двух дифференцирований снова является дифференцированием.

Любой элемент $s \in \mathcal{E}$ определяет дифференцирование $\mathrm{ad}\, s$ из $\mathrm{Der}(A, \mathcal{E})$ по формуле

$$(\mathrm{ad}\, s)a := sa - as.$$

Такое дифференцирование называется *внутренним*.

Построим бимодуль $\Omega^1 A$ вместе с дифференцированием $d : A \to \Omega^1 A$, который обладает следующим универсальным свойством: для любого дифференцирования D алгебры A со значениями в бимодуле $\mathcal{E}$ найдется единственный морфизм бимодулей $i : \Omega^1 A \to \mathcal{E}$, делающий следующую диаграмму коммутативной:

$$\begin{tikzcd} & \Omega^1 A \arrow[d, dashed, "i"] \\ A \arrow[ur, "d"] \arrow[r, "D"'] & \mathcal{E}. \end{tikzcd}$$

Иначе говоря, линейное отображение $\mathrm{Hom}_A(\Omega^1 A, \mathcal{E}) \to \mathrm{Der}(A, \mathcal{E})$, задаваемое формулой $\varphi \longmapsto \varphi \circ d$, должно быть изоморфизмом.

Пусть $A \otimes A$ есть тензорное произведение алгебры A на себя, рассматриваемое как A-бимодуль с действием элементов из A, задаваемым на простых тензорах формулами:

$$a(b \otimes c) \equiv (a \otimes 1_A)(b \otimes c) = (ab) \otimes c,$$
$$(a \otimes b)c \equiv (a \otimes b)(1_A \otimes c) = a \otimes (bc).$$

Определим дифференцирование $d : A \to A \otimes A$ алгебры A со значениями в $A \otimes A$ по формуле:

$$da := 1_A \otimes a - a \otimes 1_A$$

(далее мы опускаем нижний индекс A в обозначении 1_A там, где это не приводит к недоразумению). Проверим, что d удовлетворяет правилу Лейбница. Для этого вычислим сначала

$$adb = a(1 \otimes b) - a(b \otimes 1) = (a \otimes 1)(1 \otimes b) - (a \otimes 1)(b \otimes 1) = a \otimes b - (ab) \otimes 1,$$
$$(da)b = (1 \otimes a)b - (a \otimes 1)b = (1 \otimes a)(1 \otimes b) - (a \otimes 1)(1 \otimes b) = 1 \otimes (ab) - a \otimes b.$$

Тогда

$$d(ab) = 1 \otimes (ab) - (ab) \otimes 1 = a \otimes b - (ab) \otimes 1 + 1 \otimes (ab) - a \otimes b = adb + (da)b,$$

т.е. d действительно является дифференцированием алгебры A со значениями в $A \otimes A$.

Обозначим через $\Omega^1 A$ подмодуль в $A \otimes A$, порожденный элементами вида adb. Он совпадает с ядром отображения

$$m : A \otimes A \longrightarrow A, \quad a \otimes b \longmapsto ab.$$

Действительно, если элемент $\sum_k a_k \otimes b_k \in A \otimes A$ принадлежит $\operatorname{Ker} m$, то есть $\sum_k a_k b_k = 0$, то

$$\sum_k a_k \otimes b_k = \sum_k a_k(1 \otimes b_k - b_k \otimes 1) = \sum_k a_k db_k,$$

откуда и следует указанное утверждение.

Введем на $\Omega^1 A$ структуру A-бимодуля, полагая

$$a(bdc) := (ab)dc, \quad (adb)c := ad(bc) - (ab)dc.$$

Проверим теперь универсальность построенного бимодуля $\Omega^1 A$. Пусть $\mathcal{E}$ – произвольный бимодуль над алгеброй A и $D : A \to \mathcal{E}$ – дифференцирование алгебры A со значениями в $\mathcal{E}$. Определим отображение $i : \Omega^1 A \to \mathcal{E}$, полагая его равным на простых тензорах из $A \otimes A$

$$i(a \otimes b) := a(Db)$$

и сужая затем на $\Omega^1 A \subset A \otimes A$. Указанное отображение является морфизмом A-бимодулей, откуда следует, что бимодуль $\Omega^1 A$ действительно обладает универсальным свойством, отмеченным в начале этого пункта.

Определение 2. *Градуированная дифференциальная алгебра* (кратко: DG-*алгебра*) $(R^\bullet, \delta)$ есть ассоциативная алгебра

$$R^\bullet = \bigoplus_{n=0}^{\infty} R^n,$$

которая наделена *градуированным произведением*, т.е. произведением, обладающим свойством $R^m \cdot R^n \subsetneqq R^{m+n}$, и *дифференциалом* δ, т.е. линейным отображением, удовлетворяющим условиям:

1. δ является отображением степени $+1$, т.е. переводит $R^n \to R^{n+1}$,
2. $\delta^2 = 0$,
3. δ является *нечетным дифференцированием*, т.е. удовлетворяет правилу Лейбница вида
$$\delta(\omega^n \eta) = (\delta\omega^n)\eta + (-1)^n \omega^n \delta\eta,$$
где $\omega^n \in R^n$.

Наша цель состоит в том, чтобы построить DG-алгебру

$$\Omega^\bullet A = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \Omega^n A$$

с дифференциалом d, первые два слагаемых которой имеют вид: $\Omega^0 A = A$, $\Omega^1 A$ – бимодуль 1-форм, определенный выше, а дифференциал d продолжает построенное выше дифференцирование из алгебры A в $\Omega^1 A$. Кроме того, мы хотим, чтобы указанная DG-алгебра обладала следующим универсальным свойством: если $(R^\bullet, \delta)$ – другая DG-алгебра, то любой гомоморфизм алгебр $\psi : A \to R^0$ должен продолжаться до гомоморфизма алгебр $\psi : \Omega^\bullet A \to R^\bullet$ степени нуль, сплетающего дифференциалы d и δ.

Обозначим через $\bar{A}$ фактор $\bar{A} := A/\mathbb{C}$ и через $\bar{a}$ образ элемента $a \in A$ при проекции в $\bar{A}$. Введенный ранее бимодуль $\Omega^1 A$ можно отождествить с

$$\Omega^1 A \cong A \otimes \bar{A}$$

посредством отображения: $a \otimes \bar{b} \mapsto adb$. Это отождествление определено корректно, поскольку $d(1_A) = 0$.

Введем на $A \otimes \bar{A}$ структуру A-бимодуля, определяя левое и правое умножение на элементы $c \in A$ по формулам

$$c(a_0 \otimes \bar{a}_1) = (ca_0) \otimes \bar{a}_1,$$
$$(a_0 \otimes \bar{a}_1)c = a_0 \otimes \overline{a_1 c} - (a_0 a_1) \otimes \bar{c}.$$

С учетом этого определения отображение $A\otimes\bar A\to\Omega^1 A$ становится изоморфизмом бимодулей, поскольку

$$
\begin{aligned}
&c(a_0\otimes\bar a_1)=(ca_0)\otimes\bar a_1\longmapsto(ca_0)da_1,\\
&(a_0\otimes\bar a_1)c=a_0\otimes\overline{a_1c}-(a_0a_1)\otimes\bar c\longmapsto a_0da_1c-(a_0a_1)dc=(a_0da_1)c.
\end{aligned}
$$

Положим теперь по определению

$$\Omega^2A:=\Omega^1A\otimes_A\Omega^1A=(A\otimes\bar A)\otimes_A(A\otimes\bar A)=A\otimes\bar A\otimes\bar A.$$

Более общим образом, определим

$$\Omega^nA:=\Omega^1A\otimes_A\ldots\otimes_A\Omega^1A\ (n\text{ раз}),$$

так что

$$\Omega^nA=A\otimes\bar A^{\otimes n}.$$

Дифференциал $d:A\otimes\bar A^{\otimes n}\to A\otimes\bar A^{\otimes(n+1)}$ задается сдвигом

$$d(a_0\otimes\bar a_1\otimes\ldots\otimes\bar a_n):=1_A\otimes\bar a_0\otimes\bar a_1\otimes\ldots\otimes\bar a_n.$$

Тогда $d^2=0$, поскольку $\bar 1_A=0$ в алгебре $\bar A$.

Отождествляя, как и выше, $A\otimes\bar A^{\otimes n}$ с $(\Omega^1A)^{\otimes n}$ будем иметь

$$a_0\otimes\bar a_1\otimes\ldots\otimes\bar a_n=a_0da_1\ldots da_n.$$

Введем на $\Omega^\bullet A$ структуру A-бимодуля. Умножение слева задается очевидным образом:

$$c(a_0da_1\ldots da_n)=(ca_0)da_1\ldots da_n.$$

Чтобы определить умножение справа, воспользуемся правилом Лейбница:
$da\cdot b=d(ab)-adb$. Тогда

$$
\begin{aligned}
(a_0da_1\ldots da_n)c&=a_0da_1\ldots da_{n-1}d(a_nc)-a_0da_1\ldots da_{n-1}a_ndc=\ldots\\
\ldots&=(-1)^n(a_0a_1)da_2\ldots da_ndc+\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{n-j}a_0da_1\ldots d(a_ia_{j+1})\ldots da_ndc+\\
&\qquad+a_0da_1\ldots da_{n-1}d(a_nc).
\end{aligned}
$$

Наконец, определим произведение в $\Omega^\bullet A$, полагая:

$$(a_0da_1\ldots da_n)(b_0db_1\ldots db_m):=(a_0da_1\ldots da_n\cdot b_0)\,db_1\ldots db_m.$$

Тем самым, $\Omega^\bullet A$ становится DG-алгеброй, называемой *универсальной DG-алгеброй* над алгеброй A.

Отметим следующие полезные формулы:

$$d(a_0 da_1 \dots da_n) = 1_A da_0 da_1 \dots da_n = da_0 da_1 \dots da_n$$

и

$$a_0[d, a_1] \dots [d, a_n] \cdot 1_A = a_0 da_1 \dots da_n.$$

Первая из них перефразирует определение дифференциала с учетом отождествления $A \otimes \bar{A}^{\otimes n}$ с $(\Omega^1 A)^{\otimes n}$, а для доказательства второй заметим, что

$$[d, a_n] \cdot 1_A = da_n - a_n d1_A = da_n,$$
$$[d, a_{n-1}] da_n = d(a_{n-1} da_n) = da_{n-1} da_n$$

и т.д. по индукции.

Проверим свойство универсальности построенной DG-алгебры $\Omega^\bullet A$. Пусть задана другая DG-алгебра $(R^\bullet, \delta)$ и гомоморфизм алгебр $\psi : A \to R^0$. Тогда его продолжение до морфизма $\psi : \Omega^\bullet A \to R^\bullet$ задается формулой

$$\psi(a_0 da_1 \dots da_n) := \psi(a_0)\delta\left(\psi(a_1)\right) \dots \delta\left(\psi(a_n)\right).$$