

Функционал действия (A. Schild, 1976)

$$S(\varphi) = \int_{\Sigma^2} |\Lambda^2 T_\varphi(\omega^{-1})|^2 \cdot \omega$$

если заменить
2 → 1 ⇒
площадь в
индуцир.
метрике

$$(\Sigma^2, \omega) \xrightarrow[\text{отображение}]{\varphi} (X^n, g)$$

↑ поверхность ↑ симп. 2-форма ↑ римановское метрическое

Пример: $(X^n, g) = \text{евклидово пространство } \mathbb{R}^n$

$$\varphi = \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \quad x_i \in C^\infty(\Sigma)$$

$$S(\vec{x}) = \int_{\Sigma} \sum_{i < j} \{x_i, x_j\}^2 \omega$$

↑ скобка Пуассона

Критические точки

(= решения уравнений
Эйлера-Лагранжа $\frac{\delta S}{\delta \varphi} = 0$)

$$\forall i: \sum_j \{x_j, \{x_j, x_i\}\} = 0$$

• $\varphi(\Sigma)$ - минимальная поверхность $S > 0$
 $\omega = \text{const. элемент объёма для индуцир. метрики}$

• Вырожденные решения $S = 0$
 $\Sigma^2 \rightarrow \forall \text{ кривая} \hookrightarrow X$

Нормированный функционал

$$S_{\text{норм}}(\varphi) := \int_{\Sigma^2} \omega \cdot \underbrace{\int_{\Sigma^2} |\Lambda^2 T_{\varphi}(\omega^{-1})|^2 \cdot \omega}_{\text{исходальный функционал}}$$

инвариантен: $\omega \rightarrow \text{const} \cdot \omega$

Критические значения

$$S_{\text{норм}}(\varphi_{\text{crit}}) = \left(\begin{array}{c} \text{площади миним.} \\ \text{поверхностей} \end{array} \right)^2$$

$\rightsquigarrow$ КВАНТОВАНИЕ

КВАНТОВАНИЕ

(M, ω) компактное
 C^∞ симплект.
 многообразие
 $\dim M = 2d$

$f \in C^\infty_{\mathbb{R}}(M)$ $\bar{f} = f$

$u \in C^\infty_{\mathbb{C}}(M)$ $|u| = 1$

если $d=1$

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_M \cdot \omega = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_M \cdot \frac{\omega^d}{d!}$$

$\hbar \rightarrow 0$

$\rightsquigarrow$ конечномерное Гильбертово пространство $\mathcal{H}$

$$\dim \mathcal{H} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^d} \int_M \frac{\omega^d}{d!} \cdot (1 + O(\hbar))$$

$\rightsquigarrow$ самосопряжённый оператор $\hat{f} \in \text{End}(\mathcal{H})$

$$\hat{f} \cdot \hat{g} = \widehat{fg} + \frac{i\hbar}{2} \widehat{\{f, g\}} + O(\hbar^2)$$

$\rightsquigarrow$ унитарный оператор $\hat{u} \in \text{End}(\mathcal{H})$

$$\hat{u}_1 \cdot \hat{u}_2 = \widehat{u_1 u_2} \exp\left(\frac{i\hbar}{2} \underbrace{\{\log u_1, \log u_2\}}_{\text{корректно определено}} + O(\hbar^2)\right)$$

$\rightsquigarrow [\hat{f}, \hat{g}]$

$\rightsquigarrow T_\hbar(\hat{f})$

ПРИМЕР: $M = U(1) \times U(1)$ $\omega = \frac{d \log u_1 \wedge d \log u_2}{2\pi i}$

$$\hat{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 & e^{2\pi i / N} \\ & e^{2\pi i \frac{N-1}{N}} \end{pmatrix}$$

$$\hbar = \frac{1}{N} \quad N = 1, 2, \dots = \dim \mathcal{H}_N$$

Нормированный функционал

$$\dim M = 2d = 2$$

$$\int_M \omega \cdot \int_M \sum_{i < j} \{x_i, x_j\}^2 \cdot \omega$$

$i = 1, \dots, n$

$$N := \dim \mathcal{H}_h$$

$$X_i = \hat{x}_i \text{ самосопр. операторы}$$

$$\leadsto 2\pi\hbar \operatorname{Tr} \mathbb{1}_{N \times N} \cdot 2\pi\hbar \operatorname{Tr} \sum_{i < j} \left(\frac{1}{i\hbar} [X_i, X_j] \right)^2$$

$$= -(2\pi)^2 N \cdot \operatorname{Tr} \sum_{i < j} [X_i, X_j]^2$$

Уравнение
Эйлера-Лагранжа

$$\forall: \sum [X_i, [X_j, X_i]] = 0$$

Проблема: ~~∃~~ компактных миним. поверхностей в $\mathbb{R}^n$

Есть разные способы обойти:

1) Наложить условие : сфера $\sum x_i^2 = 1 \leadsto \sum X_i^2 = \mathbb{1}_{N \times N}$ и т.д.

2) отображение в $(S^1)^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$

$\leadsto$ наборы n унитарных матриц U_i

$$N \cdot \sum_{i < j} \operatorname{Tr} (2 \cdot \mathbb{1}_{N \times N} - U_i U_j U_i^{-1} U_j^{-1} - U_j U_i U_j^{-1} U_i^{-1})$$

неканоническая процедура
"симм. некоммут. многочлены"
 $\leftrightarrow$

$$x_1^3 x_2 \dots X_1 X_1 X_1 X_2 + X_2 X_1 X_1 X_1$$

или

$$X_1 X_1 X_2 X_1 + X_1 X_2 X_1 X_1$$

ГИПОТЕЗА:

Критич. значения
/ ~~неразложимые~~
решения Э-Л.

$$\operatorname{Tr} \cdot \operatorname{Tr}$$

$$\rightarrow N \rightarrow \infty$$

Крит. значения
 $\neq 0$
невырожденные

$$S \cdot S$$

$$\varphi: \Sigma^2 \rightarrow X^n$$

↑
размерности

Можно фиксировать класс гомологий

$$\varphi_* [\Sigma] \in H_2(X, \mathbb{Z})$$

ПРИМЕРЫ: 1) X : тор $\underbrace{U(1) \times \dots \times U(1)}_{n \text{ раз}}$

"Отображение" = $(U_1, \dots, U_n) \in \mathcal{U}(N)$
 $N = \dim \mathcal{H}$

? класс $\in H_2(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{n(n-1)/2}$

Ответ: компоненты (i, j) $1 \leq i < j \leq n$

$$\deg_{(i,j)} \varphi = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int \{ \log u_i, \log u_j \} \omega \approx \frac{1}{2\pi i} \text{Tr} (U_i U_j U_i^{-1} U_j^{-1} - 1)$$

Лемма: близко к целому числу
 если $|U_i U_j - U_j U_i| < \frac{c}{N}$

2) X сфера $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$$\deg \varphi = \frac{3}{4\pi} \int x_1 \{x_2, x_3\} \cdot \omega$$

Лемма: $\forall X_1, X_2, X_3 : X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = \mathbb{1}_{N \times N}$
 $|X_i X_j - X_j X_i| < \frac{c}{N}$ $X_i^\dagger = X_i$

$$\Rightarrow \text{Tr} X_1 [X_2, X_3] = \frac{2i}{3} k + o(1)$$

$k \in \mathbb{Z}$

Некомпактный случай.

Минимальные
поверхности в $\mathbb{R}^4$



параметризация
Вейерштрасса

$$dx_i = \operatorname{Re}(\alpha_i)$$

Комплексная кривая $C = \overline{C} - \{\text{проколы}\}$
и набор $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Gamma(C, K_C)$
голоморфные 1-формы

$$1) \forall i \text{ все периоды } \alpha_i \in \sqrt{-1} \mathbb{R}$$

$$2) \sum_i \alpha_i^2 = 0 \in \Gamma(C, K_C^{\otimes 2})$$

Это задача (почти) из алг. геометрии
(обобщается на поверхности в плоских торах).

Квантование: ∞ -мерное гильбертово пространство $\mathcal{H} \approx \Gamma(C, K_C^{\otimes 1/2})$

Уравнения: $\forall i \quad \sum_{j=1}^n [X_j, [X_j, X_i]] = 0 \quad X_i^\dagger = X_i \in \operatorname{End} \mathcal{H}$

+ не просто строго сформулировать
"граничные условия на бесконечности"

КАЛИБРОВАНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Уравнения 2-го порядка $\Leftrightarrow$ Набор уравнений 1-го порядка
"гармоничность" (иногда) уравнений меньше, (всегда) они проще!

Объяснение:
неравенство BPS

Масса $\geq$ | Топологический |
Заряд

ПРИМЕРЫ: 1) в кэлеровом многообразии X

Например, $\rightarrow$
комплексные
кривые

комплексные подмногообразия являются минимальными
уравнение 1-го порядка
(Коши-Римана)
уравнения 2-го порядка

2) на кэлеровом многообразии X

голоморфные расслоения
с эрмитовой нормой

Эрмитовым уравнениям

Янга-Миллса
уравнение на связность 1-го порядка

дают решения
обычных уравнений
Янга-Миллса

уравнения 2-го порядка

Алгебра Янга-Миллса

$$YM_n := \mathbb{C}\langle X_1, \dots, X_n \rangle / \forall i \sum_j [X_j, [X_j, X_i]] = 0$$

соотношения

$$\ast\text{-структура} : X_i^+ = X_i \quad \forall i$$

Объяснение названия: "Постоянная" связность в $\mathbb{R}^n$ $\nabla = d + \sqrt{-1} \sum X_i dx_i$ ← координаты
 (трансляционно-инвариантная) Решение YM $\Leftrightarrow \ast$ -представление YM_n

Эрмитова алгебра Янга-Миллса

$n = 2m$

Связь:

$$Z_k = X_k + \sqrt{-1} X_{m+k}$$

$$Z_k^+ = X_k - \sqrt{-1} X_{m+k}$$

Классический предел
 $\forall i, j \quad \{z_i, z_j\} = 0$
 $\sum \{z_k, z_k\} = 0$

$$HYM_m := \mathbb{C}\langle Z_1, \dots, Z_m, Z_1^+, \dots, Z_m^+ \rangle / \forall i, j \quad [Z_i, Z_j] = 0 = [Z_i^+, Z_j^+]$$

соотношения

$$\sum_{k=1}^m [Z_k^+, Z_k] = 0$$

Обобщение

$$[Z_i, Z_j] = c_{ij} = -c_{ji} \in \mathbb{C}$$

$$[Z_i^+, Z_j^+] = \overline{c_{ij}}$$

$$\sum_k [Z_k^+, Z_k] = c \in \mathbb{R}$$

Трансляционно-инвариантные
 решения HYM в $\mathbb{C}^m$

$\Leftrightarrow \ast$ -представления HYM_m

Свободная эрмитова алгебра Янга-Миллса
= алгебра Кинга

всего одно соотношение!

$$K_m := \mathbb{C} \langle T_1, \dots, T_m, T_1^+, \dots, T_m^+ \rangle / \sum_1^m [T_i^+, T_i] = 0$$

$$\begin{array}{ccc} K_m & \searrow & \text{НЧМ}_m \\ \text{УМ}_{2m} & \nearrow & \end{array}$$

Теорема (А. Кинг): Конечномерные $\ast$ -представления K_m / iso
 $\begin{array}{c} \text{ЧАСТНЫЙ} \\ \text{случай} \end{array}$
 $\begin{array}{c} \iff \\ 1:1 \end{array}$
 Конечномерные **полупростые** представления
 свободной алгебры $\mathbb{C} \langle T_1, \dots, T_m \rangle / \text{iso}$

Объяснение: Представления $\mathbb{C}\langle T_1, \dots, T_m \rangle \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^N)$

$\Leftrightarrow$ набор $N \times N$ -матриц $(M_1, \dots, M_m) \in \mathbb{C}^{m \times N^2}$
замены базиса $\Leftrightarrow$ действие $GL_N(\mathbb{C})$

ФАКТ: представление **полупростое** $\Leftrightarrow$ орбита $GL_N(\mathbb{C})$ **замкнута**.

Геометрическая теория инвариантов (Mumford, Kempf-Ness)

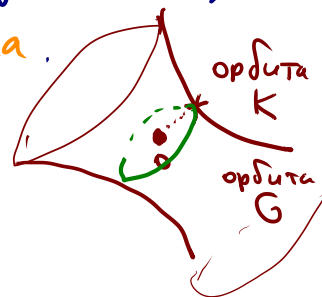
$\forall$ редуктивной группы $G/\mathbb{C}$
+ конечномерного представления V

$G(\mathbb{C}) \supset K$ максим. компактная подгруппа
 $\rho(K) \subset$ унитарная подгруппа в $GL(V)$
эрмитова норма в V

Орбита $G \cdot v$ замкнута

$\Leftrightarrow$ функция $g \cdot v \rightarrow |g \cdot v|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$
достигает **минимума**.

ФАКТ: Ближайшие к 0 точки орбит
 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^m [M_i^\dagger, M_i] = 0$



Следствие : $\forall$ конечно порождённой ассоциативной алгебры $A/\mathbb{C}$
 (теоремы Кинга) + **любого** конечного набора образующих $(a_i)_{i \in I}$

Конечномерные **полупростые** представления A / iso

$\Leftrightarrow$ конечномерные $\ast$ -представления $V = V_{(a_i)}$

$$V_{(a_i)} := A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{свободное} \\ \text{произведение}}}{\ast} A^+ / \text{соотношение} \quad \sum [a_i^+, a_i] = 0$$

$\leadsto$ Разные выборы наборов образующих
 дают **разные** $\ast$ -алгебры $V = V_{(a_i)}, V' = V_{(a'_i)}$
 с **одинаковой** теорией конечномерных $\ast$ -представлений.

Гипотеза : $\ast$ -пополнение не зависит
 от выбора образующих.

$\{\text{состояния на } V\}$
 $:= \{\tau: V \rightarrow \mathbb{C} \mid \tau(b^+ b) \geq 0 \ \forall b \in V\}$
 выпуклый конус, ? не зависит от (a_i)

Вернёмся к конечномерным представлениям:

Выбор набора образующих $\rightsquigarrow$ Функция $H = \sum_i \text{Tr } \varphi(a_i)^* \varphi(a_i) \geq 0$

$$R_N = \left\{ \text{классы из полупростых } N\text{-мерных представлений } \varphi: A \rightarrow \text{End}(\mathbb{C}^N) \right\}$$

строго плюрисубгармоническая функция

$\rightsquigarrow$ потенциал (сингулярной) кэлеровой метрики на R_N

сингулярная приведённая аффинная схема конечного типа

$\therefore$ "некоммутативная кэлерова метрика на A " индуцирована с "плоской метрики" на свободной алгебре

$$\text{Spec } A \hookrightarrow \text{Spec } \mathbb{C}\langle a_1, \dots, a_m \rangle$$

$$A \leftarrow \mathbb{C}\langle a_1, \dots, a_m \rangle$$

Гипотеза про независимость x -оболочки $B = B_{\text{univ}}$ от выбора образующих:

Класс $A \hookrightarrow B_{\text{univ}}$ x -алгебры с точностью до сопряжения x элементом $b \in B_{\text{univ}}$

Выборы вложения из этого класса

$\Leftrightarrow$

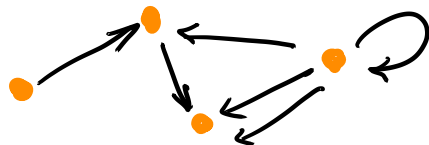
Некоммут. кэлеровы метрики на A

точнее, определение $\uparrow$
 $\therefore$

Обобщение :

$$Q = (Q_0, Q_1, Q_1 \rightarrow Q_0 \times Q_0) \quad \text{конечный колчан}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 вершины стрелки начало конец



+ набор весов $(\mu_\gamma \in \mathbb{R})_{\gamma \in Q_1}$

Представления :

$$\Sigma_{v_1} \xrightarrow{T_\alpha} \Sigma_{v_2}$$



Теорема (А. Кинг) : конечномерные $(\mu.)$ -стабильные представления Q
общий случай

$$:= \sum_\gamma \mu_\gamma \dim \Sigma_\gamma = 0$$

и для $\forall$ подпредставления $0 \subsetneq \Sigma' \subsetneq \Sigma$

$$\sum_\gamma \mu_\gamma \dim \Sigma_\gamma < 0$$

$$\sum_\alpha [T_\alpha^*, T_\alpha] = \sum_\gamma \mu_\gamma \Pi_\gamma$$

ортогональный проектор на Σ_γ
 в $\bigoplus \Sigma_\gamma$

$\mu.$ -полистабильные
 $:= \bigoplus \mu.$ -стабильных
 $\Leftrightarrow$ все $*$ -представления

1:1
 $\Leftrightarrow$

неразложимые

$*$ -представления

+ Можно обобщить гипотезу об универсальности $*$ -оболочки

Также как $\overset{\text{конечнопор.}}{\text{ассоц. алгебры}} = \overset{\text{конечнопор.}}{\text{свободные алгебры}} / \overset{\forall}{\text{соотношения}}$
 $\overset{\text{конечнопор.}}{\text{алгебры}} \supset \mathbb{C}^{Q_0} \overset{\exists}{=} \overset{\text{конечный колчан}}{\text{алгебры путей}} \mathbb{C}\langle Q \rangle / \overset{\forall}{\text{соотношения}}$

Дальнейшее обобщение:

$$A = D / I \text{ двусторонний идеал}$$

$$\text{где } D = D_{\leq 0} + D_{\leq 1} + D_{\leq 1} \otimes_{D_{\leq 0}} D_{\leq 1} + \dots$$

соотношения
 $i(a) = a$
 $\forall a \in D_{\leq 0}$

$D_{\leq 0}$ ассоц. алгебра
 $D_{\leq 1} \in D_{\leq 0}\text{-mod} - D_{\leq 0}$
 + гомоморфизм $i: D_{\leq 0} \xrightarrow{\text{diag}} D_{\leq 1}$
 биподулей

Примеры: ① колчан

$$D_{\leq 0} = \mathbb{C}^{Q_0}$$

$$D_{\leq 1} = \mathbb{C}^{Q_0} + \mathbb{C}^{Q_1}$$

$$A = \mathbb{C}\langle Q \rangle$$

пути

② "свободные дифф. операторы"

D^{free} - модуль конечнопорождённые
 как $(C_c^\infty(X))$ -модули
 = расслоения с неплоской связностью

$$D_{\leq 0} = C_c^\infty(X) \quad \text{дифф. операторы порядка 0}$$

$$D_{\leq 1} \approx C_c^\infty(X) + \Gamma(T_c X) \quad \text{пор. } \leq 1$$

Данные дающее отображение момента

и кэлерову метрику на пространстве классов изоморфизмов "стабильных представлений" A

1°: $D_{\leq 0}$ $\ast$ -алгебра

$$\leadsto D_{\leq 0} = D_{\leq 0}^+ := \overline{D}_{\leq 0}^{\text{op}}$$

2°: $\Omega^1 \in D_{\leq 0} \text{-mod-} D_{\leq 0}$
конечно порожд. проективный
как правый $\text{mod-} D_{\leq 0}$

+ дифференцирование $d: D_{\leq 0} \rightarrow \Omega^1$

$$d(fg) = f dg + df g$$

$$\Rightarrow \text{расширение симплиции:} \\ 0 \rightarrow \Omega^1 \rightarrow B \rightarrow D_{\leq 0}^{\text{Lie}} \rightarrow 0$$

$$D_{\leq 1} := \text{Hom}_{\text{mod-} D_{\leq 0}}(B, D_{\leq 0})$$

3°: ("Кэлерова форма")⁻¹ $\langle \cdot, \cdot \rangle: \Omega^1 \otimes \overline{\Omega}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ пред. Гильбертова форма удовлетворяющая

$$\langle f \alpha g, \beta \rangle = \langle \alpha, f^+ \beta g^+ \rangle$$

4°: Аналог весов $(\mu_r)_{r \in \mathbb{Q}_0}$ $\mu: D_{\leq 0} \rightarrow \mathbb{C}$ $\left[\begin{array}{l} \mu(f^*) = \overline{\mu(f)} \\ \mu([f, g]) = \langle df, dg^* \rangle - \langle dg, df^* \rangle \end{array} \right.$

~> Так получаются

- калибровочная группа $U(N)$
- уравнения Кинга
 - эрмитовы уравн. Янга-Миллса
 - уравнения Нама
 - уравнение Богомольного
 - уравнение Хитчина
 - уравнения Вары-Виттена
 - vortex equations (Álvarez-González, García-Prada)

- Некоммутативные инстанты (Connes-Douglas-Nekrasov-Schwarz)

$$D_{\leq 0} = C^{\infty}(\mathbb{R}^{2m}_{\text{quantum}} = \mathbb{C}^m_{\text{quantum}})$$

или C^{∞} (квантовый кэлеров тор)

Квантовое $\mathbb{C}^m$

$\mathcal{D}_{\leq 0}$ (топологически $\mathbb{C}^\infty$)
порождена $z_1, \dots, z_m, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_m$
соотношения:

$$[z_i, z_j] = 0 = [z_i^*, z_j^*]$$

$$[z_i^*, z_j] = \hbar \delta_{ij}$$

Коммутирующие дифференцирование
 $\partial_1, \dots, \partial_m, \bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_m$

$$\partial_i(z_j) = \delta_{ij}$$

$$\partial_i(z_j^*) = 0$$

$$\bar{\partial}_i(z_j) = 0$$

$$\bar{\partial}_i(z_j^*) = \delta_{ij}$$

Некоммутативный НУМ инстантон := конечно порождённый проективный $\mathcal{D}_{\leq 0}$ -модуль E
с эрмитовой формой

$$H: E \otimes_{\mathbb{C}} \bar{E} \rightarrow \mathcal{D}_{\leq 0} \quad H(f\varphi, g\varphi_2) = f H(\varphi, \varphi_2) g^*$$

и связностью $\nabla_i, \bar{\nabla}_i: E \rightarrow E$

СООТНОШЕНИЯ

$$[\nabla_i, \nabla_j] = [\bar{\nabla}_i, \bar{\nabla}_j] = 0$$

$$[\nabla_i, z_j] = [\bar{\nabla}_i, z_j^*] = \delta_{ij} \quad [\nabla_i, z_j^*] = [\bar{\nabla}_i, z_j] = 0$$

$$H(\bar{\nabla}_i(\varphi_1), \varphi_2) + H(\varphi_1, \nabla_i \varphi_2) = \bar{\partial}_i H(\varphi_1, \varphi_2)$$

+

$$\sum_{i=1}^m [\bar{\nabla}_i, \nabla_i] = 0$$

Эрмитов Янг-Миллс

Конструкция (Некрасов, Fuguchi, ~2000)

Некоммутативный инстантон $\leadsto$ бесконечномерное решение уравнения Кипа

Рассмотрим состояние $\tau_r: D_{\infty} \rightarrow \mathbb{C}$
(зависит от $r > 0$)

$$\tau_r: \left(\prod z_i^{k_i} \prod \bar{z}_i^{l_i} \right) := \prod_i \delta_{k_i, l_i} k_i! r^{k_i}$$

$\leadsto$ пред-Гильбертова норма на E

$$\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle := \tau_r H(\varphi_1, \varphi_2)$$

$$Z_i := z_i - r \bar{\nabla}_i$$

Факт:

$$\sum [Z_i^+, Z_i] = r \cdot m \cdot \text{id}_{\mathcal{H}}$$

$\leadsto$ пополнение

$\mathcal{H}_{\text{big}}$ гильбертово пространство

$\mathcal{H} := \bigcap \text{Ker } \bar{\nabla}_i$ подпространство

$\leftarrow$ представление НУМ_m!

Получается представление НУМ_m в $\Gamma(\mathbb{C}^m, \text{ алг. векторное расслоение })$
 $= 0$ на $\mathbb{C}P^{m-1}$ в ∞

+ в $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$ - модулях без кручения
(идеалы конечных подскома)

Связь с квантовыми минимальными поверхностями

Пример: $m=2$

$\mathbb{C}[z_1, z_2]$ - модуль $E = \mathbb{C}[z_1, z_2] / \text{идеал аффинной кривой } C \subset \mathbb{C}^2$
 $= \mathcal{O}(C)$
это модуль кружения

Гипотеза

(задача: точно сформулировать)

$\exists$ Гильбертово пополнение $\bar{E}$
в котором
$$\sum_i [z_i^+, z_i^-] = \rho \cdot \text{id}_E$$

Явное решение
для комплексной
гиперболы
 $z_1, z_2 = \text{const}$ $C \simeq \mathbb{C}^*$

Обобщение

$\forall$ "стабильного" (?) конечнопорожд. модуля $E / \mathbb{C}[z_1, \dots, z_m]$
с носителем чистой размерности $0 \leq d \leq m$
+ НУМ метрикой на $\infty \subset \mathbb{CP}^{m-1}$

$\exists!$ Гильбертово пополнение *граничные условия*

$$\sum [z_i^+, z_i^-] = \rho \cdot d \cdot \mathbb{1}_E$$

ссылки: 1903.10792
with J. Arnlind, J. Morre

2003.03171
with G. Bhatnagar