НЕКОММУТАТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И АНАЛИЗ. ПРИЛОЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ

А.Г.Сергеев

19 июня 2020 г.

3.2. Циклы и фредгольмовы модули

Определение 1. *Циклом* размерности n называется DG-алгебра

$$\Omega^\bullet = \bigoplus_{k=0}^{n} \Omega^k,$$

заданная вместе с *интегралом* $\int$, т.е. линейным отображением $\int : \Omega^\bullet \to \mathbb{C}$ таким, что:

1. $\int \omega^k = 0 \quad$ при $k < n$;
2. $\int d\omega^{n-1} = 0$;
3. $\int \omega^k \omega^l = (-1)^{kl} \int \omega^l \omega^k$.

Циклом над алгеброй A называется цикл $(\Omega^\bullet, d, \int)$ вместе с гомоморфизмом $A \to \Omega^0$.

Стандартным примером цикла размерности n может служить комплекс де Рама над n-мерным гладким компактным многообразием. Менее тривиальные примеры строятся с помощью фредгольмовых модулей, к определению которых мы переходим.

Определение 2. *Нечетным фредгольмовым модулем* над C^*-алгеброй A называется инволютивное представление π алгебры A в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, наделенное *оператором симметрии*, т.е. линейным оператором S таким, что $S = S^*$ и $S^2 = I$, удовлетворяющим условию

$$[S, \pi(a)] \in \mathcal{K}(\mathcal{H}) \quad \text{для всех } a \in A.$$

Четный фредгольмов модуль задается представлением $\pi = \pi^0 \oplus \pi^1$ алгебры A в $\mathbb{Z}_2$-градуированном гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 \oplus \mathcal{H}^1$ с нечетным оператором симметрии S, удовлетворяющим тем же условиям, что и в нечетном случае.

Фредгольмов модуль $(A, \mathcal{H}, S)$ порождает цикл над алгеброй A с $\Omega^0 = A$, а оператор S задает $\mathbb{Z}_2$-градуировку на алгебре ограниченных линейных операторов $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Действительно, мы можем записать произвольный линейный оператор T в виде

$$T = T_+ + T_-, \quad \text{где } T_\pm = \frac{T \pm STS}{2}\,.$$

В частности,

$$T = T_+ \iff T = STS \quad \text{и} \quad T = T_- \iff T + STS = 0.$$

Кроме того, для любого линейного ограниченного оператора R имеют место соотношения

$$(TR)_+ = T_+R_+ + T_-R_- \quad \text{и} \quad (TR)_- = T_+R_- + T_-R_+.$$

Для того, чтобы определить интеграл, нам придется наложить на рассматриваемые фредгольмовы модули дополнительное *условие суммируемости* порядка n:

$$[S, \pi(a)] \in \mathcal{L}^{n+1}(\mathcal{H}).$$

При этом число n предполагается нечетным для нечетных фредгольмовых модулей и четным для четных фредгольмовых модулей.

Считая условие суммируемости выполненным, введем *дифференциал*, полагая:

$$da = i[S, \pi(a)] = 2iS\pi(a)_-$$

для $a \in A$. Для упрощения формул будем опускать далее знак π, так что последняя формула запишется в виде

$$da = i[S, a] = 2iSa_-.$$

Иначе говоря, дифференциал d выбирает S-нечетную часть элемента a и условие суммируемости можно теперь переписать в виде $da \in \mathcal{L}^{n+1}$.

Множитель i введен для того, чтобы дифференциал d коммутировал с инволюцией: $d(a^*) = (da)^*$, где справа стоит эрмитово сопряжение.

Имея дифференциал d, можно ввести и *дифференциалы высших порядков*. Для этого рассмотрим пространство 1-форм на алгебре ограниченных линейных операторов $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Оно состоит из операторов вида a_0da_1, где $a_0, a_1 \in A$, и их линейных комбинаций. Дифференциал второго порядка задается на 1-формах формулой

$$d(a_0da_1) = da_0da_1 = i[S, a_0]i[S, a_1].$$

Левую часть последней формулы можно переписать в виде

$$d(a_0da_1) = i[S, a_0da_1].$$

(Заметим, что в этой формуле, также как и в последующих, под коммутатором всегда подразумевается суперкоммутатор, так что коммутатор $[S, a_0da_1]$ на самом деле является анти-коммутатором, поскольку a_0da_1 есть 1-форма.)

Из последней формулы следует, что

$$d(a_0da_1) = i[S, a_0da_1] = 2iS(a_0da_1)_+,$$

т.е. дифференциал 2-го порядка, в отличие от дифференциала 1-го порядка, выбирает S-четную часть формы a_0da_1, принадлежащую $\mathcal{L}^{n+1} \cdot \mathcal{L}^{n+1} \subset \mathcal{L}^{(n+1)/2}$. В то же время S-нечетная часть формы a_0da_1, равная $(a_0)_+(da_1)_- + (a_0)_-(da_1)_+$ принадлежит $\mathcal{L}^{n+1}$.

Более общим образом, рассмотрим пространство k-форм Ω^k, порождаемое операторами вида

$$a = a_0da_1 \dots da_k \quad \text{с } a_0, a_1, \dots, a_k \in A.$$

Если $k = 2r$, т.е. $a \in \Omega^{2r}$, то $a_+ \in \mathcal{L}^{(n+1)/(2r)}$, $a_- \in \mathcal{L}^{(n+1)/(2r+1)}$. В случае, если $k = 2r - 1$, т.е. $a \in \Omega^{2r-1}$, будем иметь: $a_+ \in \mathcal{L}^{(n+1)/(2r)}$, $a_- \in \mathcal{L}^{(n+1)/(2r-1)}$.

Произведение форм задается композицией соответствующих операторов, а дифференциал имеет вид

$$d(a_0da_1 \dots da_k) = i[S, a_0da_1 \dots da_k] = i[S, [a_0[iS, a_1] \dots i[S, a_k]] = da_0da_1 \dots da_k$$

или более общим образом

$$d\omega = i[S, \omega] \quad \text{для } \omega \in \Omega^\bullet.$$

Перейдем теперь к определению интеграла. Введем прежде всего *условный след* оператора $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, полагая

$$\mathrm{Tr}' T := \mathrm{Tr}\, T_+.$$

Заметим, что $\mathrm{Tr}' T = \mathrm{Tr}\, T$, если $T \in \mathcal{L}^1$, благодаря цикличности обычного следа.

Предположим сначала, что n нечетно. Тогда $(\omega^n)_+ \in \mathcal{L}^1$, поэтому определен интеграл

$$\int \omega^n := \mathrm{Tr}' \omega^n.$$

Это определение можно переписать в виде

$$\mathrm{Tr}' \omega^n = -\frac{i}{2} \mathrm{Tr}(S d\omega^n).$$

Действительно,

$$S d\omega^n = iS[S, \omega^n] = iS(S\omega^n + \omega^n S) = i(\omega^n + S\omega^n S) = 2i(\omega^n)_+.$$

Для форм ω^k с $k < n$ положим по определению $\int \omega^k = 0$.

Покажем, что построенный интеграл обладает свойствами, перечисленными в определении 1. Во-первых,

$$\int d\omega^{n-1} = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(Sd^2\omega^{n-1}) = 0.$$

Во-вторых, рассмотрим формы ω^k, ω^l с $k + l = n$. Допустим для определенности, что k нечетное, а l – четное. Тогда

$$\int \omega^k\omega^l = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(Sd(\omega^k\omega^l)) =$$
$$= -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(Sd\omega^k\omega^l - S\omega^k d\omega^l) = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(-d\omega^l S\omega^k + \omega^l Sd\omega^k) =$$
$$= -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(Sd\omega^l\omega^k + S\omega^l d\omega^k) = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(Sd(\omega^l\omega^k)) = \int \omega^l\omega^k.$$

В этой выкладке мы воспользовались дважды свойством цикличности: $\mathrm{Tr}(TR) = \mathrm{Tr}(RT)$ для операторов из классов Шэттена.

Пусть теперь n четно и снова $k + l = n$. Тогда $(\omega^n)_- \in \mathcal{L}^1$. Обозначим через χ оператор градуировки на $\mathcal{H}$, собственные (± 1)-подпространства которого совпадают соответственно с $\mathcal{H}^0$ и $\mathcal{H}^1$. Определим интеграл в этом случае как

$$\int \omega^n := \mathrm{Tr}'(\chi\omega^n) = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(\chi Sd\omega^n)$$

и положим: $\int \omega^k = 0$ для форм ω^k с $k < n$. Свойство замкнутости снова очевидно:

$$\int d\omega^{n-1} = -\frac{i}{2}\mathrm{Tr}(\chi Sd^2\omega^{n-1}) = 0,$$

а свойство перестановочности

$$\int \omega^k\omega^l = (-1)^{kl}\int \omega^l\omega^k$$

проверяется также, как и выше, с учетом равенства: $\chi\omega^k = (-1)^k\omega^k\chi$.

Приведем примеры операторов симметрии.

Пример 1 (преобразование Гильберта)**.** *Преобразованием Гильберта* функции $h \in L^2(\mathbb{R})$, заданной на вещественной оси, называется интеграл вида

$$Sh(x) := \frac{i}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0+}\int_{|t|>\varepsilon}\frac{h(x-t)}{t}\,dt =: \frac{i}{\pi}P.V.\int_{\mathbb{R}}\frac{h(x-t)}{t}\,dt.$$

Преобразование Фурье этой функции совпадает с

$$\mathcal{F}(Sh)(\xi) = (\operatorname{sgn}\xi)\mathcal{F}h(\xi).$$

Хорошо известно (см. [33]), что S является оператором симметрии в $L^2(\mathbb{R})$ и обладает следующими свойствами: (1) S коммутирует с трансляциями; (2) S коммутирует с положительными растяжениями; (3) S антикоммутирует с отражениями. Более того, любой линейный ограниченный оператор в $L^2(\mathbb{R})$ с этими свойствами является скалярным кратным оператора Гильберта.

Пример 2 (операторы Рисса)**.** Операторы Рисса являются многомерными аналогами преобразования Гильберта. *Операторы Рисса* R_j, $1 \le j \le n$, действуют в $L^2(\mathbb{R}^n)$ по формуле

$$R_j h(x) := P.V. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t_j h(x-t)}{|t|^{n+1}}\, dt,$$

где $c_n = 2i/\Omega_{n+1}$, а $\Omega_{n+1} = 2\pi^{(n+1)/2}/\Gamma(\frac{n+1}{2})$ – объем единичной сферы S^n. Преобразование Фурье этой функции равно

$$\mathcal{F}(R_j h)(\xi) = \frac{\xi_j}{|\xi|}\mathcal{F}h(\xi).$$

Операторы Рисса также коммутируют со сдвигами и положительными растяжениями. Кроме того, они ведут себя ковариантным образом по отношению к вращениям и семейство операторов Рисса однозначно определяется этими свойствами с точностью до скалярного множителя. Вместо свойства симметрии имеем соотношение

$$\sum_{j=1}^{n} R_j^2 = 1.$$

Фредгольмов модуль, ассоциированный с операторами Рисса, строится по любому набору $(N\times N)$-матриц $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ таких, что

$$\gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 2\delta_{ij}.$$

Матрицы γ_j являются *матрицами Дирака*, порождающими спинорное представление алгебры Клиффорда $\mathrm{Cl}^{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $\mathbb{C}^N$, где $N = 2^{[n/2]}$. Их можно построить с помощью метода удвоения. Более подробно, при $n = 1$ положим: $\gamma_1^{(1)} = 1$. Далее, при нечетных n определим их по индукции, полагая

$$\gamma_j^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_j^{(n-2)} \\ \gamma_j^{(n-2)} & 0 \end{pmatrix}$$

при $j = 1, \dots, n-2$ и

$$\gamma_{n-1}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & -iI_{n-2} \\ iI_{n-2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_n^{(n)} = \begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & -I_{n-2} \end{pmatrix}.$$

При четных n полагаем: $\gamma_j^{(n)} = \gamma_j^{(n+1)}$ при всех $j = 1, \dots, n$. В частности, при $n = 3$ матрицы $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ совпадают с матрицами Паули.

Имея указанный набор матриц γ_j, построим ассоциированный оператор симметрии.

Введем пространство вектор-функций

$$H_N = \left(L^2(\mathbb{R}^n)\right)^N,$$

на котором операторы Рисса действуют диагонально. Иными словами, если $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_N) \in H_N$, то $R_j\mathbf{h} = (R_jh_1, \dots, R_jh_N)$, $j = 1, \dots, n$.

Оператор симметрии S_N, отвечающий набору матриц γ_j, действующий в пространстве H_N, определяется формулой

$$S_N\mathbf{h} := \sum_{j=1}^{n} \gamma_j R_j \mathbf{h}.$$

3.3. Связности и характер Черна

Определение 3. Пусть $\mathcal{E}$ есть правый A-модуль над алгеброй A. Рассмотрим правый A-модуль $\mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A$. *Связностью* на $\mathcal{E}$ называется линейное отображение

$$\nabla : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A,$$

удовлетворяющее правилу Лейбница:

$$\nabla(sa) = (\nabla s)a + s \otimes da,$$

где $s \in \mathcal{E}$, $a \in A$.

Оператор, задаваемый связностью ∇, однозначно продолжается до оператора степени $+1$ на всей градуированной алгебре $\mathcal{E} \otimes_A \Omega^\bullet A$ по формуле:

$$\nabla(s \otimes \omega) = \nabla s \otimes \omega + s \otimes d\omega,$$

где $s \in \mathcal{E}$, $\omega \in \Omega^\bullet A$ и мы отождествляем $(\mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A) \otimes_A \Omega^n A$ с $\mathcal{E} \otimes_A \Omega^{n+1} A$.

Рассматривая $\mathcal{E} \otimes_A \Omega^\bullet A$ как правый $\Omega^\bullet A$-модуль, придем к правилу Лейбница вида

$$\nabla(\sigma\omega) = (\nabla\sigma)\omega + (-1)^k \sigma d\omega,$$

где $\sigma \in \mathcal{E} \otimes_A \Omega^k A$, $\omega \in \Omega^\bullet A$.

Рассмотрим конкретные конструкции связностей.

Пример 3 (связность на тензорном произведении)**.** Пусть $\mathcal{E}$ и $\mathcal{F}$ – два A-модуля над коммутативной алгеброй A, наделенных соответственно связностями $\nabla^{\mathcal{E}}$ и $\nabla^{\mathcal{F}}$. Тогда на тензорном произведении $\mathcal{E} \otimes_A \mathcal{F}$ можно определить связность, являющуюся тензорным произведением связностей $\nabla^{\mathcal{E}}$ и $\nabla^{\mathcal{F}}$. Эта связность определяется формулой

$$\nabla^{\mathcal{E}\otimes_A\mathcal{F}} := \nabla^{\mathcal{E}} \otimes 1_{\mathcal{F}} + 1_{\mathcal{E}} \otimes \nabla^{\mathcal{F}}.$$

Пример 4 (связность в свободном модуле)**.** Обозначим через A^n свободный A-модуль, состоящий из столбцов размера $1 \times n$ с компонентами из A. Тогда $A^n \otimes_A \Omega^1 A$ можно отождествить с $(\Omega^1 A)^n$, при этом

$$d\,{}^t(a_1 \ldots a_n) := {}^t(da_1 \ldots da_n).$$

Если ∇ – связность на A^n, то $\nabla - d$ является A-линейным отображением из A^n в $(\Omega^1 A)^n$, поэтому ∇ можно записать в виде

$$\nabla = d + \alpha,$$

где α есть $(n \times n)$-матрица с компонентами из $\Omega^1 A$.

Пример 5 (связность Леви-Чивита)**.** Пусть модуль $\mathcal{E}$ имеет вид $\mathcal{E} = eA^n$, где e – идемпотент в алгебре $\mathrm{Mat}_n(A)$, т.е. элемент $e \in \mathrm{Mat}_n(A)$ такой, что $e^2 = e$. Тогда связность ∇ в этом модуле может быть задана композицией

$$\mathcal{E} \xrightarrow{i} A^n \xrightarrow{d} A^n \otimes_A \Omega^1 A \xrightarrow{e} \mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A,$$

где $i : \mathcal{E} \hookrightarrow A^n$ – вложение. Отождествляя $\mathcal{E}$ с подмодулем в A^n, запишем введенную связность в виде

$$\nabla s = e\,ds.$$

Построенная связность называется *связностью Леви-Чивита.*

Пример 6 (эрмитовы связности)**.** Если $\mathcal{E}$ является C^*-модулем, наделенным скалярным произведением $(\cdot\,,\cdot)$, то естественно пользоваться связностями ∇, совместимыми с этим скалярным произведением. Такие связности, называемые *эрмитовыми*, должны удовлетворять соотношению

$$(\nabla s, t) + (s, \nabla t) = d(s,t)$$

для всех $s, t \in \mathcal{E}$. При этом предполагается, что скалярное произведение $(\cdot\,,\cdot)$ продолжено на $\mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A$ как полуторалинейное спаривание со значениями в $\Omega^1 A$ по формуле:

$$(s, t \otimes adb) := (s,t)adb.$$

В случае связности Леви-Чивита это означает, что соответствующий идемпотент e должен быть самосопряженным оператором, т.е. проектором.

Разность $\nabla = \nabla_1 - \nabla_2$ двух эрмитовых связностей на $\mathcal{E}$ принадлежит пространству гомоморфизмов $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A)$ и является косоэрмитовым отображением, т.е.

$$(\nabla s, t) + (s, \nabla t) = 0.$$

Если $\mathcal{E} \cong pA^n$, где p – проектор в $\mathrm{Mat}_n(A)$, то

$$pA^n \otimes_A \Omega^1 A \otimes_A {}^n A p = p\mathrm{Mat}_n(\Omega^1 A)p,$$

где ${}^n A$ свободный A-модуль, состоящий из строк размера $n \times 1$ с компонентами из A.

Инволюция на $\Omega^1 A$ задается формулой $(adb)^* := d(b^*)a^* = d(b^*a^*) - b^* da^*$. Поэтому косоэрмитов оператор $\alpha \in \mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}, \mathcal{E} \otimes_A \Omega^1 A)$ можно отождествить с матрицей $\alpha \in \mathrm{Mat}_n(\Omega^1 A)$, составленной из 1-форм, так что

$$\alpha = p\alpha = \alpha p = p\alpha p \text{ и } \alpha^* = -\alpha.$$

Эрмитова связность ∇ будет при этом записываться в виде $\nabla = pd + \alpha$, где α удовлетворяет выписанным выше условиям.

Определение 4. Рассмотрим линейное отображение

$$\nabla^2 : \mathcal{E} \otimes_A \Omega^\bullet A \longrightarrow \mathcal{E} \otimes_A \Omega^{\bullet+2} A.$$

Оно удовлетворяет соотношению

$$\nabla^2(s\omega) = \nabla(\nabla s\, \omega + sd\omega) = (\nabla^2 s)\omega - \nabla s\, d\omega + \nabla s\, d\omega + sd^2\omega = (\nabla^2 s)\omega,$$

которое означает, что ∇^2 является гомоморфизмом $(\Omega^\bullet A)$-модулей и полностью определяется своим сужением на $\mathcal{E}$. Указанный гомоморфизм называется *кривизной* связности ∇ и обозначается через K_∇.

Пример 7 (кривизна связности в свободном модуле)**.** Вычислим кривизну связности $\nabla = d + \alpha$ в свободном модуле A^n. Имеем

$$K_\nabla s = \nabla(ds + \alpha s) = d^2 s + d(\alpha s) + \alpha ds + \alpha^2 s = d\alpha\, s - \alpha ds + \alpha ds + \alpha^2 s = (d\alpha + \alpha^2)s.$$

Пример 8 (кривизна связности на модуле гомоморфизмов)**.** Пусть $\mathcal{E}_0$ и $\mathcal{E}_1$ – проективные модули над коммутативной алгеброй A, т.е. прямые слагаемые в свободных модулях над A). Предположим, что они наделены связностями ∇_0

и ∇_1 соответственно с кривизнами K_0 и K_1. Тогда на A-модуле $\mathrm{Hom}_A(\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1)$ имеется ассоциированная связность ∇, задаваемая формулой

$$(\nabla T)s := \nabla_1(Ts) - T(\nabla_0 s)$$

с кривизной

$$\nabla^2 T = K_1 T - T K_0.$$

В частности, любая связность ∇ на $\mathcal{E}$ в случае коммутативной алгебры A порождает связность в $\mathrm{End}_A \mathcal{E}$, задаваемую формулой

$$\nabla T := \nabla \circ T - T \circ \nabla.$$

Пример 9 (связности в векторном расслоении)**.** Пусть M – гладкое компактное многообразие и $E \to M$ – векторное расслоение над M. Обозначим через $\Gamma^\infty(M, E) \equiv \Gamma^\infty(E)$ модуль гладких сечений этого расслоения. Поскольку это расслоение можно вложить в качестве прямого слагаемого в тривиальное векторное расслоение ранга N над M, то указанный модуль можно представить в виде $p\,[C^\infty(M)]^N$, где p – проектор в свободном модуле $[C^\infty(M)]^N$.

Наделим M римановой метрикой g и обозначим через R кривизну этой метрики. Если $s \in \Gamma^\infty(E)$ – гладкое сечение расслоения $E \to M$, т.е. $ps = s$, то

$$Rs = (\nabla_g)^2 s = (pd)(pd)s = pdpds.$$

Дифференцируя соотношение $p^2 = p$ с учетом равенства $s = ps$ выведем для R следующее соотношение

$$R = dpdp\,p = pdpdp = p(dp)^2.$$

Определение 5. *Характером Черна* проектора $p \in \mathrm{Mat}_n(A)$ над коммутативной алгеброй A называется величина

$$\mathrm{ch}\,p := \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{ch}_{2k}(p) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{tr}\,p(dp)^{2k},$$

где tr – матричный след. В случае, когда алгебра A совпадает с $C^\infty(M)$, мы можем рассматривать dp как матрицу, составленную из 1-форм, т.е. $dp \in \mathrm{Mat}_n(\Omega^1(M))$. Тогда каждый член $\mathrm{ch}_{2k}(p) \in \Omega^{2k}(M)$ и, в частности, сумма в определении характера является конечной. В этом случае характер Черна является классом когомологий де Рама многообразия M.